

(14) 構造同定における on-line 法の比較

COMPARATIVE STUDY ON ON-LINE APPROACHES TO STRUCTURAL IDENTIFICATION

栗田哲史*

松井邦人**

松島 学***

Tetsushi KURITA, Kunihiro MATSUI, Manabu MATSUSHIMA

Structural identification methods are broadly divided into two groups, which are on-line and off-line approaches. Two methods representative of on-line approaches are "Dynamic Programming" and "Extended Kalman Filter", which are used to identify structural characteristics. The methods are compared in view of computational efficiency and effectiveness.

Numerical experiments are performed by using multi-degree-of-freedom system. The effect of measuring noises on the identification is investigated. It is also found that a repetition of the approaches improves the identified results.

Key Words : Structural Identification, Dynamics, Dynamic Programming, Extended Kalman Filter

1. はじめに

構造物の動的応答を観測し、その観測値より構造物の動特性や系定数の推定を行う試みは数多くなされている。この様な時刻歴領域における同定問題の手法は大きく分けて、on-line法とoff-line法に分類できる。on-line法にはDynamic Programming¹⁾²⁾、Kalman Filter³⁾⁻⁵⁾、Invariant Imbeddingの非線形フィルター⁶⁾⁷⁾等がある。また、off-line法では、Gauss-Newton法⁸⁾、準線形化法⁷⁾の他、共役勾配法やDFP法、BFGS法等の非線形最適化手法⁹⁾があげられる。on-line法はデータを逐次入力し、逐次処理するシーケンシャル処理であるため制御の分野で発達した。また、地震入力を受ける構造物のアクティブ・コントロールはon-line法を用いる必要がある¹⁰⁾。on-line法で挙げた三つの手法のうちDynamic ProgrammingとInvariant Imbedding Filterは基本的考え方は異なるが、最終的に得られる最適フィルター方程式は全く同じになる¹¹⁾。そこで、本研究では、Dynamic ProgrammingとKalman Filterを非線形システムに応用した拡張Kalman Filterの二つの手法に着目し、両手法の比較検討を行う。

以下に、両手法の理論と例題を示す。例題では観測値として系定数を与えたモデルを用い、前もって動的応答解析を行い作成したものを用い数値実験を行うこととした。また、実際の観測値には観測ノイズが含まれるので、バンドリミテッド・ホワイトノイズを作成し観測波に加え、ノイズの同定結果に及ぼす影響について検証した。

* 東京電機大学大学院 理工学研究科 建設工学専攻

** Ph.D. 東京電機大学 教授 理工学部 建設工学科

*** 工修 東電設計株式会社 課長代理 技術開発本部耐震技術部

2. 同定手法

一般に、動的外力を受ける多自由度系モデルの運動方程式は次式のように表すことができる。

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + Kz = f(t) \quad (1)$$

ここで、 M 、 C 、 K はそれぞれ質量マトリックス、減衰マトリックス、剛性マトリックスである。また、 f は動的荷重を表す外力ベクトル。そして、 $\ddot{z}$ 、 $\dot{z}$ 、 z は構造物の応答を表す加速度ベクトル、速度ベクトル、変位ベクトルである。

(1) Dynamic Programming⁶⁾

式(1)のような運動方程式で表される系の状態方程式は

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

と表される。また、観測ベクトルを $\mathbf{w}$ 、観測ノイズをベクトル $\mathbf{v}$ とすると観測方程式は

$$\mathbf{w} = \Gamma \mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (3)$$

である。ここで、 Γ は状態ベクトルと測定値を対応付けるマトリックスである。いま、質量は既知であり、減衰、剛性を未知パラメータとすると状態ベクトルは

$$\mathbf{x} = \{z_1, z_2, \dots, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dots, c_1, c_2, \dots, k_1, k_2, \dots\}^T \quad (4)$$

である。Dynamic Programmingの評価関数は次のように表される。

$$J = \int_0^t \{ (\mathbf{w} - \Gamma \mathbf{x})^T (\mathbf{w} - \Gamma \mathbf{x}) dt + (\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0)^T \Lambda (\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0) \} \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{x}_0$ は $t=0$ の時のアприオリな推定値であり、 Λ は初期推定値と真値の誤差に対するウェイト・マトリックスである。評価関数を最小とする $\mathbf{x}$ の最適な推定値を $\mathbf{e}$ と表すと

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{h}(\mathbf{e}) + \mathbf{Q}\Gamma^T (\mathbf{w} - \Gamma \mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (6)$$

また、式中の $\mathbf{Q}$ はウェイト・マトリックスであり

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{e})}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \left(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{e})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T - \mathbf{Q}\Gamma^T \Gamma \mathbf{Q} \quad , \quad \mathbf{Q}(0) = \Lambda^{-1} \quad (7)$$

式(6),(7)を連立させて解くことにより $\mathbf{e}(t)$ を求めることができる。

(2) 拡張Kalman Filter²⁾

式(1)のような運動方程式で表される系の状態方程式は時間連続型で

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t)] \quad (8)$$

と表されるとする。また、観測ベクトルを $\mathbf{w}$ 、観測ノイズをベクトル $\mathbf{v}$ とすると観測方程式は時間離散型で

$$\mathbf{w}(i) = \Gamma \mathbf{x}(i) + \mathbf{v}(i) \quad (9)$$

但し、

$$E[\mathbf{v}(i)] = \mathbf{0} \quad (10)$$

$$E[\mathbf{v}(i)\mathbf{v}^T(j)] = \mathbf{R}(i)\delta_{ij} \quad (11)$$

である。ここで、 Γ は状態ベクトルと測定値を対応付けるマトリックスであり、 $E[\cdot]$ は期待値を、 δ はクロネッカのデルタ関数を表す。いま、質量は既知であり、減衰、剛性を未知パラメータとすると状態ベクトルは

$$\mathbf{x} = \{z_1, z_2, \dots, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dots, c_1, c_2, \dots, k_1, k_2, \dots\}^T \quad (12)$$

となる。式(8),(9)で表されるシステムに対する拡張Kalman Filterのアルゴリズムは以下のようになる。

a) フィルター方程式

$$\hat{\mathbf{x}}(i+1/i) = \hat{\mathbf{x}}(i/i) + \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} \mathbf{h}[\hat{\mathbf{x}}(t/i)] dt \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(i+1/i+1) = \hat{\mathbf{x}}(i+1/i) + \mathbf{G}[i+1; \hat{\mathbf{x}}(i+1/i)] [\mathbf{w}(i+1) - \Gamma \hat{\mathbf{x}}(i+1/i)] \quad (14)$$

b) カルマンゲイン

$$\mathbf{G}[i+1; \hat{\mathbf{x}}(i+1/i)] = \mathbf{P}(i+1/i) \Gamma^T [\Gamma \mathbf{P}(i+1/i) \Gamma^T + \mathbf{R}(i+1)]^{-1} \quad (15)$$

c) 推定誤差の共分散

$$\mathbf{P}(i+1/i) = \Phi[i+1, i; \hat{\mathbf{x}}(i/i)] \mathbf{P}(i/i) \Phi^T[i+1, i; \hat{\mathbf{x}}(i/i)] \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(i+1/i+1) = & \{ \mathbf{I} - \mathbf{G}[i+1; \hat{\mathbf{x}}(i+1/i)] \Gamma \} \mathbf{P}(i+1/i) \\ & * \{ \mathbf{I} - \mathbf{G}[i+1; \hat{\mathbf{x}}(i+1/i)] \Gamma \}^T \\ & + \mathbf{G}[i+1; \hat{\mathbf{x}}(i+1/i)] \mathbf{R}(i+1) \mathbf{G}^T[i+1; \hat{\mathbf{x}}(i+1/i)] \end{aligned} \quad (17)$$

d) 初期条件

$$\hat{\mathbf{x}}(0/0) = \mathbf{x}_0 \quad (18)$$

$$\mathbf{P}(0/0) = \mathbf{P}_0 \quad (19)$$

但し

$$\Phi[i+1, i; \hat{\mathbf{x}}(i/i)] \cong \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{H}[i; \hat{\mathbf{x}}(i/i)] \quad (20)$$

$$\mathbf{H}[i; \hat{\mathbf{x}}(i/i)] \cong \left[\frac{\partial \mathbf{h}_k[\mathbf{x}(t)]}{\partial \mathbf{x}_k} \right] \quad \text{at } \mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(i/i) \quad (21)$$

ここで、 $\mathbf{I}$ は単位行列を表す。また、式(21)の右辺は $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(i/i)$ で計算した値である。式(13)～(21)を用いて最適推定値 $\hat{\mathbf{x}}(i)$ を求めることができる。

3. 数値解析例

図-1のような5自由度系のモデルを用いる。モデルの諸元は、質量 $m_1 \sim m_5 = 1.0 \text{ kgf} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}$ 、減衰係数 $c_1 \sim c_5 = 0.5 \text{ kgf} \cdot \text{sec}/\text{cm}$ 、剛性 $k_1 \sim k_5 = 40.0 \text{ kgf}/\text{cm}$ とした。入力波として El Centro 波(El Centro 1940 NS Imperial Valley Earthquake)を最大加速度 300 gal に調節し、時間刻み $\Delta t = 0.02$ 秒で $t=0 \sim 20$ 使用し Runge-Kutta 法(4次)により動的応答解析を行い、その変位応答を観測波とした。

(1) 繰り返し計算の影響

未知パラメータの初期値を $c_1 \sim c_5 = 0.0$ 、 $k_1 \sim k_5 = 20.0$ 、ウェイトの初期値 $Q_{ij}(0) = 0.0$ ($i \neq j$)、 $Q_{ii}(0) = 1.0$ ($i=1 \sim 10$)、 $Q_{ii}(0) = 10^3$ ($i=11 \sim 20$) と与え Dynamic Programming を用い同定を行った。on-line 法は同定結果が初期条件の影響を受ける可能性があると思像されるため、繰り返し計算を10回行ったものと合わせて表-1 その結果を示す。また、同時に観測ノイズによる影響を調べるため、0.1Hz～25Hz までのバンドリミテッド・ホワイトノイズ $\mathbf{v}(t)$ を作成し SN 比を

$$\text{SN 比} = \frac{\max |\mathbf{v}(t)|}{\max |\mathbf{z}(t)|} \times 100 \quad (22)$$

と定義して、SN 比 0%、5%、10%、20% のノイズを変位応答 $\mathbf{z}(t)$ に加え同定を行った。次に、推定誤差の共分散の初期値を $P_{ij}(0/0) = 0.0$ ($i \neq j$)、

$P_{ii}(0/0) = 1.0$ ($i=1 \sim 10$)、 $P_{ii}(0/0) = 10^4$ ($i=11 \sim 20$)、観測ノイズの共分散

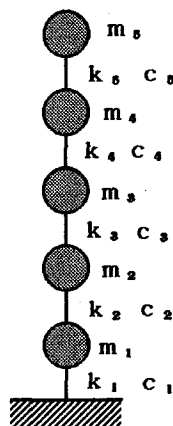


図-1 5自由度系モデル

散を $R_i(0) = 10^{-5} \sim 10^3$ ($i=1 \sim 20$) として、拡張Kalman Filterにより同定を行った。その際、未知パラメータの初期値はDaynamic Programmingの時と同じ値を用いた。また、同様のノイズを変位応答に加え、繰り返し計算を行わない場合と繰り返し計算10回行う場合について検討した。その結果を表-2に示す。表-1, 2より、SN比0%の場合、特にDynamic Programmingは繰り返し計算を行わなくても精度良い結果が得られている。両手法とも観測波にノイズが加わった場合、繰り返し計算を行わないとかなり精度が悪いことがわかる。しかも、その影響は減衰係数の結果に顕著に現れている。

表-1 繰り返し計算の回数による同定結果の違い(Dynamic Programming)

SN比	0%		5%		10%		20%	
繰り返し回数	1	10	1	10	1	10	1	10
c_1	0.49116	0.50129	0.42031	0.49127	0.53879	0.46390	-0.07134	0.36201
c_2	0.50588	0.49933	0.49922	0.50316	0.31955	0.51185	0.19535	0.60020
c_3	0.50189	0.49931	0.56197	0.51525	0.62434	0.54125	1.1774	0.53423
c_4	0.49015	0.49935	0.62417	0.50602	0.89704	0.53175	2.4912	0.63574
c_5	0.49793	0.50203	0.32139	0.48912	-0.32690	0.45579	-0.24868	0.36830
k_1	40.053	39.998	40.006	40.096	39.649	40.166	38.743	40.189
k_2	40.037	40.000	40.112	39.833	40.827	39.717	43.078	39.975
k_3	39.897	40.000	39.819	40.043	39.454	39.989	34.904	39.340
k_4	39.964	40.001	39.988	40.010	39.882	40.078	52.771	40.096
k_5	40.065	40.000	39.863	39.902	38.679	39.796	30.197	40.211

表-2 繰り返し計算の回数による同定結果の違い(拡張Kalman Filter)

SN比	0%		5%		10%		20%	
繰り返し回数	1	10	1	10	1	10	1	10
c_1	0.44524	0.50000	0.32878	0.49390	0.21704	0.41675	0.05855	0.24195
c_2	0.60544	0.50000	0.78874	0.44941	0.79394	0.45701	1.5597	0.82795
c_3	0.42446	0.50000	0.36428	0.57855	0.54562	0.67379	-0.59048	0.21603
c_4	0.40715	0.50000	0.46665	0.49957	0.38082	0.54814	0.45481	0.78162
c_5	0.59133	0.50000	0.61952	0.44907	0.96751	0.36357	1.6402	0.15022
k_1	39.848	40.000	39.626	40.235	39.783	40.489	42.301	40.898
k_2	40.243	40.000	40.882	39.730	40.502	39.327	38.265	39.004
k_3	40.165	40.000	40.005	40.091	40.898	40.374	42.490	40.809
k_4	40.326	40.000	39.171	39.841	37.834	39.604	34.229	38.529
k_5	40.172	40.000	42.311	39.965	43.794	39.951	46.122	39.174

(2) 観測ノイズの影響

観測ノイズの同定結果に及ぼす影響を調べるため、SN比5%、10%、20%のバンドリミテッド・ホワイトノ

イズをそれぞれ30波作成し変位応答に加えDynamic Programmingを用い同定を行った結果の平均値、標準偏差、変動係数を表-3に示す。同様に拡張Kalman Filterを用いた場合の結果を表-4に示す。両手法とも初期条件は(1)の場合と同様であり、10回の繰り返し計算を行った結果である。

両手法とも剛性はSN比20%の場合でも変動係数の最大値が10%程度であり、かなり精度良く求められている。しかし、減衰係数はSN比5%の場合で変動係数10%程度、SN比20%の場合では変動係数の最大値は125%とノイズの影響を受けて結果のばらつきが大きいことがわかる。また、手法別にみた結果の比較をすると、拡張Kalman FilterよりDynamic Programmingの方がやや精度のよい結果が得られているようである。

表-3 同定結果の平均値、標準偏差、変動係数(Dynamic Programming)

SN比	5%			10%			20%		
	平均値	標準偏差	変動係数(%)	平均値	標準偏差	変動係数(%)	平均値	標準偏差	変動係数(%)
C ₁	0.49834	0.018764	3.7653	0.48659	0.043544	8.9488	0.49005	0.20657	42.152
C ₂	0.49708	0.021193	4.2635	0.49059	0.053804	10.967	0.43124	0.33978	78.791
C ₃	0.50732	0.026219	5.1682	0.51999	0.081455	15.665	0.82025	0.52851	64.433
C ₄	0.49874	0.019574	3.9246	0.52633	0.073761	14.014	0.79702	0.99721	125.12
C ₅	0.49894	0.030386	6.0901	0.44823	0.11403	25.439	0.55736	0.53482	95.956
k ₁	39.991	0.050128	0.12535	39.983	0.097380	0.24355	39.829	0.79488	1.9957
k ₂	39.998	0.11480	0.28701	40.013	0.17653	0.44119	40.209	0.95383	2.3722
k ₃	40.009	0.15388	0.38460	39.983	0.24684	0.61737	39.899	1.5446	3.8712
k ₄	40.003	0.15088	0.37716	40.015	0.28261	0.70625	40.611	4.8482	1.1938
k ₅	40.001	0.21273	0.53181	39.941	0.45839	1.1477	39.248	3.7384	9.5250

表-4 同定結果の平均値、標準偏差、変動係数(拡張Kalman Filter)

SN比	5%			10%			20%		
	平均値	標準偏差	変動係数(%)	平均値	標準偏差	変動係数(%)	平均値	標準偏差	変動係数(%)
C ₁	0.50985	0.046216	9.0646	0.49805	0.098222	19.721	0.44266	0.24072	54.382
C ₂	0.47133	0.056721	12.034	0.44999	0.13065	29.034	0.53411	0.27885	52.208
C ₃	0.51676	0.064134	12.411	0.55837	0.17114	30.651	0.60425	0.51980	86.023
C ₄	0.50181	0.035223	7.0192	0.54955	0.20283	36.909	0.90386	0.59003	65.279
C ₅	0.47800	0.065993	13.806	0.39254	0.16056	40.902	0.58222	0.35486	60.949
k ₁	40.077	0.17892	0.44644	40.234	0.45978	1.1427	40.677	1.0147	2.4944
k ₂	40.013	0.13374	0.33424	39.623	0.67242	1.6970	40.056	1.3997	3.4943
k ₃	39.860	0.32243	0.80892	40.279	0.74678	1.8540	39.476	2.4975	6.3267
k ₄	39.976	0.20187	0.50498	39.959	0.59906	1.4992	39.424	2.1261	5.3929
k ₅	39.963	0.33002	0.82581	39.430	1.3596	3.4482	38.514	3.7409	9.7130

4. 結論

on-line法の代表的な手法であるDynamic Programmingと拡張Kalman Filterを用い、繰り返し計算の影響、観測ノイズの影響に着目し両手法の有効性を検証した。

以上の結果より、次のような結論が得られる。

①Dynamic Programming、拡張Kalman Filter共に、繰り返し計算を行わない場合、同定結果の精度が悪く、精度を上げるためには繰り返し計算が必要である。

②観測ノイズの影響は、減衰係数の推定値に顕著に現れる。

③Dynamic Programmingと拡張Kalman Filterを比較すると、Dynamic Programmingの方がやや精度がよい。

構造同定問題において、on-line法はそのままでは精度が悪く繰り返し計算を行い精度の向上を図る必要がある。そのためon-lineの特徴が活かされず、結局off-lineとして同定を行っていることになる。

参考文献

- 1) Simonian, S.S. : Inverse problems in structural dynamics-I. Theory, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.17, pp.357~365, 1981.
- 2) Simonian, S.S. : Inverse problems in structural dynamics-II. Applications, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.17, pp.367~386, 1981.
- 3) Yun, C-B. and Shinozuka, M. : Identification of nonlinear structural dynamic systems, Journal of Structural Mechanics 8(2), ASCE, pp.182~203, 1980.
- 4) 星谷勝・斉藤悦郎 : 拡張カルマン・フィルターを用いた同定問題の各種振動系への応用, 土木学会論文報告集, 第 339 号, pp. 59~67, 1983.
- 5) Hoshiya, M. and Saito, E. : Structural identification by extended kalman filter, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 110, No. 12, pp.1757~1770, December, 1984.
- 6) Distefano, N. and Rath, A. : System identification in nonlinear structural seismic dynamics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 5, No. 3, pp. 353~372, 1975.
- 7) Lee, E. S. : Quasilinearization and Invariant Imbedding, Academic Press, New York, N.Y., 1968.
- 8) 松井邦人・栗田哲史 : 応答加速度波を用いた構造動特性の同定, 構造工学論文集, Vol. 35A, pp. 689~698, 1989.
- 9) 嘉納秀明 : システムの最適理論と最適化, コロナ社, 1987.
- 10) Yang, J.N., Akbarpour, A. and Ghaemmaghami, P. : New optimal control algorithms for structural control, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 113, No.9, pp. 1369~1386, September, 1987.
- 11) Distefano, N. and Pena-Pardo, B. : System identification of frames under seismic loads, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 102, No. EM2, pp. 313~330, April, 1976.