

(13) 材料物性値の空間分布推定法

ESTIMATION OF SPATIAL VARIATION OF MATERIAL PROPERTIES

鈴木 誠* 石井 清**

Makoto SUZUKI, Kiyoshi ISHII

The finite element method has been a successful analytical tool in solving various structural engineering problems. The accuracy of the finite element analysis depends on the estimation of material properties. However, a reliable estimation of material properties cannot always be obtained easily. Hence, the spatially variable material properties tries to be evaluated using measured response values. Since the material properties of elements are considered, the number of unknown parameters has to be larger than one of measured response values generally. The estimation of unknown parameters can be performed using an extended Kalman filter algorithm under this condition. Furthermore a discussion on applicability of this identification is provided.

Key Words : probability theory, finite element method, mapping, identification, back analysis

1. まえがき

有限要素法は種々の構造工学の問題に有効な解析手法である。有限要素法の解析精度は、入力データである材料物性値の推定精度の信頼性に強く依存するが、実際の問題を解く場合には必ずしも信頼性の高い材料物性値が常に得られるとは限らない。特に材料物性値が空間的に分布している場合に、問題によってはこの空間分布を考慮することが必要となることもある。数少ない試験データから材料物性値の空間分布を確定することは難しいので、確率論的に取り扱われることが多い。

一般的な手法として、確率過程論を空間に拡張した確率場の概念を用いる手法がある¹⁾。確率場は、平均値、分散および相関モデル(自己相関関数など)により規定される確率特性を満足する母集団を扱うものである。また一方、場を母集団から選ばれた1つの標本場と仮定して推定する手法もある。たとえば、この中には試験データを直接使用して材料物性値の空間分布を推定しようとするクリッキング²⁾や、変形量などの観測値から材料物性値の空間分布を同定しようとする逆解析手法³⁾がある。

さて、本研究では後者の逆解析手法を用い、材料物性値の空間分布を同定を行う。金属板などの弾性係数は小さなピースの試験から求められるが、その結果はばらつき、一様な定数として扱うと変形のばらつきが考慮

* 清水建設(株)大崎研究室

** 工博 清水建設(株)大崎研究室

できない。そこで、非破壊試験を行い、弾性係数の空間分布を同定することができれば、重要な部材の安全性の検査に有効となる。Giodaによると逆解析手法には、大別して数理計画法の最適化手法により確定論的にデータを取り扱う手法と、ベイズ理論により確率論的にデータを取り扱う手法とがある⁴⁾。確定論的手法には、通常の順解析の逆定式化による直接法^{5),6)}と、逆定式化を必要とせずに繰り返し収束計算を行う間接法^{7),8)}とがある。また確率論的手法には、事前分布を観測値を用いて更新し、事後分布を作成するベイズ理論による手法^{9),10)}がある。本研究で用いる解析手法は、標本場の概念をもとにして、カルマン・フィルター¹¹⁾とベイズ理論を結び付けた有限要素法である。本手法によれば、材料物性値の空間分布に対して、観測値をもとに推定値と推定誤差を評価することができる。逆解析手法のなかで、村上らは間接法の一つであるカルマン・フィルターと有限要素法を結び付けたカルマン・フィルター有限要素法により観測節点配置を検討している¹²⁾。さて本研究では、カルマン・フィルターの初期値を経験的ではなく確率・統計的に計算より求めて、材料物性値である未知数の数が観測値である既知数の数より多い場合の逆解析を行うことを主題としている。さらに、本手法の適用性の検討として、単純な例題において観測節点と推定精度についてまとめる。

2. 拡張カルマン・フィルターの定式化

カルマン・フィルターは、次式に示す観測方程式とシステム状態方程式により構成される¹³⁾。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \quad (1)$$

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{G}_t \mathbf{w}_t \quad (2)$$

式(1),(2)は離散表示されており、添字 t は時間あるいは繰り返しのステップ数を示す。ここで、 $\mathbf{x}_t$:状態量ベクトル(n)、 $\mathbf{y}_t$:観測値ベクトル(p)、 $\mathbf{H}_t$:観測マトリックス($p \times n$)、 $\mathbf{F}_t$:状態遷移マトリックス($n \times n$)、 $\mathbf{G}_t$:システム雑音係数マトリックス($n \times m$)、 $\mathbf{v}_t$:観測雑音ベクトル(p)、 $\mathbf{w}_t$:システム雑音ベクトル(m)である。

式(1)は観測方程式で、状態量と観測値との関係を示す。今回の問題では材料物性値が状態量(未知数)に、変位量が観測値となる。式(2)はシステム状態方程式で、状態量の時間的遷移を記述するものである。さらに、雑音ベクトルは正規性のホワイトノイズを考慮して、以下の性質を有するものとする。

$$E[\mathbf{w}_t] = E[\mathbf{v}_t] = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$E \left[\begin{pmatrix} \mathbf{w}_t \\ \mathbf{v}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_s^T & \mathbf{v}_s^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_t \end{pmatrix} \delta_{ts} \quad (4)$$

ここで、 δ_{ts} はクロネッカーデルタ関数である。また、 $\mathbf{Q}_t$, $\mathbf{R}_t$ はシステム雑音および観測雑音の共分散マトリックスである。

カルマンフィルターは、式(1)と式(2)に示す線形観測方程式と線形システム状態方程式を基本として、システムの最適状態推定に対する漸化的なアルゴリズムを構成したものである。これに対して拡張カルマンフィルターは、次式に示す非線形観測方程式と非線形システム状態方程式を基本としたものである。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t \quad (5)$$

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{G}_t \mathbf{w}_t \quad (6)$$

この基本式に対するアルゴリズムでは、式(5)と式(6)を線形化するために、 $\mathbf{h}_t$ と $\mathbf{f}_t$ を推定値 $\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}$ と $\hat{\mathbf{x}}_{t/t}$ のまわりにテーラー展開し、2次以降を無視する。

$$\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t) \approx \mathbf{h}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}) + \mathbf{H}_t(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}) \quad (7)$$

$$\mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t) \approx \mathbf{f}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t/t}) + \mathbf{F}_t(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t/t}) \quad (8)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{x}}$ は推定値を、また、 $t/t-1$ は $\mathbf{y}_{t-1}$ が与えられたときの t ステップの推定値を、 t/t は $\mathbf{y}_t$ が与えられたときの t ステップの推定値を示す。 $\mathbf{H}_t$ と $\mathbf{F}_t$ は次式で定義されるマトリックスである。

$$\mathbf{H}_t = \left(\frac{\partial \mathbf{h}_t}{\partial \mathbf{x}_t} \right)_{\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}} \quad (9)$$

$$\mathbf{F}_t = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_t}{\partial \mathbf{x}_t} \right)_{\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t/t}} \quad (10)$$

次に、拡張カルマン・フィルタによる最適化のアルゴリズムを、以下に示す。フィルタ方程式は、基礎式から雑音を除いたもので、状態量の更新を行う式である。

$$\text{フィルタ方程式:} \quad \hat{\mathbf{x}}_{t+1/t} = \mathbf{f}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t/t}) \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t/t} = \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} + \mathbf{K}_t \{ \mathbf{y}_t - \mathbf{h}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}) \} \quad (12)$$

$$\text{カルマン・ゲイン:} \quad \mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t/t-1} \mathbf{H}_t^T (\mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t/t-1} \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1} \quad (13)$$

$$\text{推定誤差共分散マトリックス:} \quad \mathbf{P}_{t+1/t} = \mathbf{F}_t \mathbf{P}_{t/t} \mathbf{F}_t^T + \mathbf{G}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{G}_t^T \quad (14)$$

$$\mathbf{P}_{t/t} = \mathbf{P}_{t/t-1} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t/t-1} \quad (15)$$

$$\text{初期条件:} \quad \hat{\mathbf{x}}_{0/-1} = \hat{\mathbf{x}}_0, \quad \mathbf{P}_{0/-1} = \mathbf{\Sigma}_0 \quad (16)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{x}}_{t/t}$: $\mathbf{y}_t$ が与えられたときの時間 t における状態量の推定値 (n)、 $\mathbf{P}_{t/t}$: $\hat{\mathbf{x}}_{t/t}$ と真値 $\mathbf{x}_t$ との推定誤差共分散マトリックス ($n \times n$)、 $\mathbf{K}_t$: 時間 t におけるカルマン・ゲイン ($n \times n$)、 $\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{\Sigma}_0$: 状態量の推定値と推定誤差共分散の初期値 (n), ($n \times n$) である。推定誤差共分散 $\mathbf{P}_{t/t}$ は、状態量の推定値と真値の差の共分散を表し、カルマン・ゲイン $\mathbf{K}_t$ は、状態量の推定値と推定誤差共分散の更新を行う際の、 $\mathbf{x}_t$ の修正量を調整するものである。

3. 有限要素法を用いた空間分布推定法の定式化

拡張カルマン・フィルタに有限要素法を組み込み、変位の観測値から材料物性値の空間分布を推定するための定式化を次に示す。提案する方法では、初期値設定にベイズ理論の事前分布を導入している。

(1) 観測方程式

一般の有限要素法において、変位と荷重の関係は次の剛性方程式で与えられる。

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (17)$$

ここで、 $\mathbf{K}$ は剛性マトリックスであり、材料物性値である状態量 (未知数) $\mathbf{x}$ の関数となる。 $\mathbf{u}$ は変位ベクトル、 $\mathbf{f}$ は荷重ベクトルである。変位 $\mathbf{u}$ は、式 (17) より次のように表現する。

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \quad (18)$$

観測値 $\mathbf{y}$ は、変位 $\mathbf{u}$ に観測雑音ベクトル $\mathbf{v}$ を加えたものになるので、観測方程式は次のように定義できる。

$$\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \quad (19)$$

また、式 (17) の両辺を $\mathbf{x}$ で偏微分すると

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{K}^{-1} \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u} \right\} \quad (21)$$

となり、荷重 $\mathbf{f}$ と状態量 $\mathbf{x}$ は独立であるとするれば、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u} \quad (22)$$

となる。式 (19) は式 (5) の観測方程式に対応し、式 (22) は式 (9) の偏微分係数 $\mathbf{H}_t$ に対応している。後で示す例題では、観測値が一時に一度だけ収録されたとすることから、拡張カルマン・フィルタは状態量 (未知数) を初期値より漸次改善していくためのものであり、時間 t は時間的な遷移を示すのではなく、収束計算の繰り返しステップを表すことになる。

(2) システム状態方程式

観測値が一時に (一組) 収録されたとすれば、地盤物性値である状態量 $\mathbf{x}$ は変化しないので、状態遷移マトリックス $\mathbf{F}_t$ を単位マトリックス $\mathbf{I}$ として、式 (12) あるいは式 (2) によるシステム状態方程式は次式で表せる。

$$\mathbf{x}_{t+1/t} = \mathbf{I} \mathbf{x}_{t/t} \quad (23)$$

式(23)において、 $\mathbf{x}_t$ について誤差は混入しないものと考えて、システム雑音は無視している。

(3) 初期条件

本手法では、カルマン・フィルターの推定値と推定誤差共分散マトリックスの初期値として、ベイズ理論の事前分布の平均値と共分散をそれぞれ用いる。これは、推定される材料物性値の標本場を正規確率過程の実現値であると仮定していることによるためである。以下に理由を述べる。

ベイズ理論は、事前情報として事前分布の確率特性を与え、観測値を事後情報として事後分布の確率特性を求めるものである。ここで、事前分布を分散が既知な正規確率過程の平均値とすると、確率特性は平均値の推定値および推定誤差共分散により与えられる。さらに、自乗誤差を基準(損失関数)として、ベイズ理論による標本場の推定の定式化を行うと、推定値は最小分散推定値になる。すなわち、カルマン・フィルターにより推定しようとする対象を標本場とすると、カルマン・フィルターのアルゴリズムはCividiniらが行っているベイズ理論による逆解析と同じものになる。ここに、カルマン・フィルターの初期値として、ベイズ理論による事前分布の平均値と共分散を用いる理由がある。

具体的な計算では、最初に材料物性値を単一の状態量として適当な初期値と分散を与え、観測値を用いてトレンド成分と見なせる平均値 $\mathbf{x}_0$ を推定し、推定値の初期値とする。ここでトレンドとは全体的な傾向を表すもので、重回帰分析などから求められる。この段階では状態量より観測値の数が多いので、初期値は一意的に決まる。次に、材料物性値の自己共分散関数をもとに、要素の分散や要素間の共分散は要素の大きさを考慮して得られる共分散マトリックスを求め、これを推定誤差共分散マトリックスの初期値 Σ_0 とする。もちろん、材料物性値の自己共分散関数は経験的に定められるかもしれないが、従来では根拠なく定められていたカルマン・フィルターの推定誤差共分散マトリックスの初期値を、確率場で表現される場の共分散として経験によらず計算から求め、材料物性値の空間分布推定に用いるところが本手法の1つの特徴である。

4. 解析例

図-1に示すモデルを用いて、本手法の有効性を検証する。解析モデルは、10×10の正方形であり、100個の2次元平面ひずみの三角形要素より構成されている。外力として、このモデルの上端に、鉛直方向上向きに1.0の等分布荷重を与える。ここで、長さや荷重の大きさは無次元量と考えている。材料物性値は次のように設定した。ポアソン比も不確定性による影響をみる上で重要なパラメータであるが、ここでは問題を簡単にするために確定値として0.3とする。弾性係数は平均値1.0、変動係数0.3の正規確率過程として、空間的な相関特性を次に示す自己相関関数より与えている。変動係数を0.3と大きめの値をとったのは、要素での弾性係数の差を明確にみるためである。

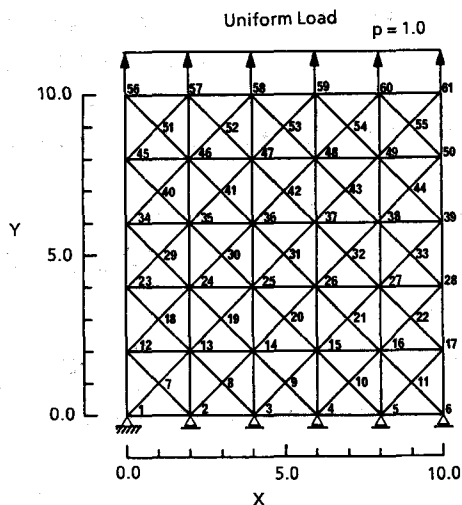


図-1 解析モデル

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \exp \left[- \left\{ \left(\frac{\Delta x}{2.0} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{2.0} \right)^2 \right\} \right] \quad (24)$$

ここで、 ρ は相関係数を表し、 $\Delta x, \Delta y$ は、それぞれ水平(H)、鉛直(V)方向の2地点間の距離である。

この例題では、変位量を既知として、要素における弾性係数を推定しようとする問題であることから、まず、上述の確率特性を有する弾性係数の場(空間分布)をシミュレーション法により、1つ発生させた。これを図-2に示す。この弾性係数から通常の有限要素法を用いて変位量を求めた。次に、この変位量を用いて、弾性

係数を未知として、各要素の弾性係数を本手法により推定する。このとき、解の収束判定は、すべての変位の誤差が0.01以下として計算を打ち切っている。変位の許容誤差0.01は、最大観測変位量12.8の約0.1%になっており、それより小さい値は、一般的にも観測精度から無理と考えたものである。解析にあたり、初期値としては状態量の推定値は1.0、推定誤差共分散は最初に与えた変動係数と自己相関関数より求めたものを用いた。ここで、初期に与える観測雑音の共分散マトリックスRは、対角項を0.1、非対角項を0.0している。

解析は、観測点の数や位置(方向)を変化させた4ケースを行った。結果を表-1に示す。このモデルでは、100個の要素の弾性係数が状態量となり、理論的には100個の観測値があれば正解が求まるわけであるが、実際には観測値に入る雑音や本手法の数値誤差、計算の打ち切りなどにより若干の誤差がでることが考えられる。

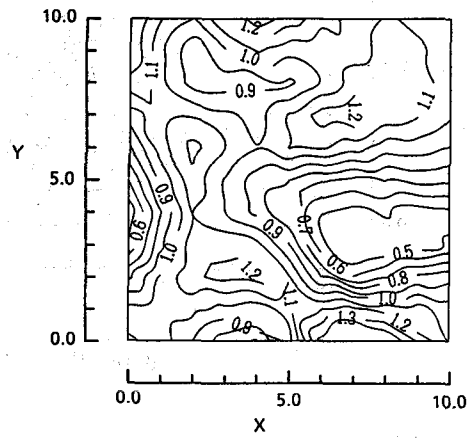


図-2 弾性係数の目標値

表-1 解析ケース

Case	Number of measurement values	Measurement points
		V : Vertical displacement H : Horizontal displacement
1	12	V : 56, 57, 58, 59, 60, 61 H : 56, 57, 58, 59, 60, 61
2	21	V : 17, 28, 39, 50, 56, 57, 58, 59, 60, 61 H : 6, 17, 28, 39, 50, 56, 57, 58, 59, 60, 61
3	33	V : 12, 17, 23, 28, 34, 39, 45, 50, 56, 57, 58, 59, 60, 61 H : 2, 3, 4, 5, 6, 12, 17, 23, 28, 34, 39, 45, 50, 56, 57, 58, 59, 60, 61
4	51	V : 9, 12, 17, 20, 23, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 39, 42, 45, 50, 53, 56, 57, 58, 59, 60, 61 H : 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 17, 20, 23, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 39, 42, 45, 50, 53, 56, 57, 58, 59, 60, 61

Case-1の推定値を図-3に示す。目標値と比較すると、右側の部分で上部はやや大きく下部は小さい傾向を示している。図-4に推定誤差を示すが、右側の値は0.1と小さくなった。Case-2では、Case-1に対して9個の観測値を追加した。推定値を図-5に示す。推定値はCase-1とほぼ同じ値となっている。また、図-6に示す推定誤差は、右端の観測値を加えたためか、右側の要素の推定誤差が小さくなっている。これは、節点1で水平方向の自由度を拘束しているため、左側の水平変位が右側に比べて小さくなっており、これが各要素の収束に影響していることによる。Case-3の推定値を図-7に示すが、ほぼ目標値を表している。推定誤差は図-8のようになり、周辺だけの情報では中心部の推定誤差が大きい。Case-4の推定値を図-9に示す。Case-3と同様に、ほぼ目標値を表している。推定誤差を図-10に示すが、入力0.3と比較して高いところでも0.1と小さくなっている。全体的にいくつかのコンター図で、周辺部に極端な値を示しているものがあるが、これは要素重心に値を与えて各節点に補間するとき、周辺部は外挿となっているためである。

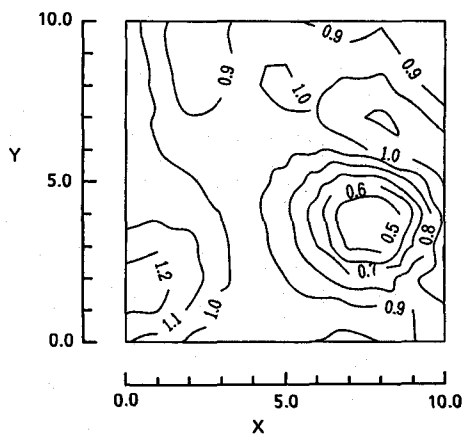


図-3 推定値(Case-1)

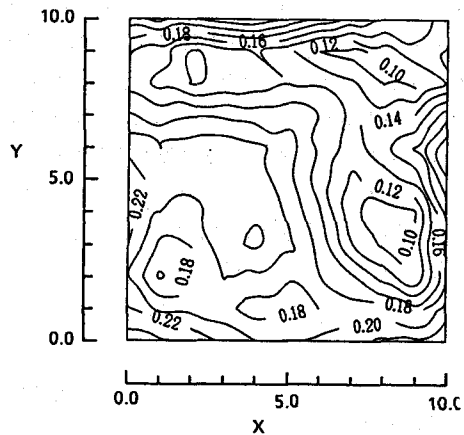


図-4 推定誤差(Case-1)

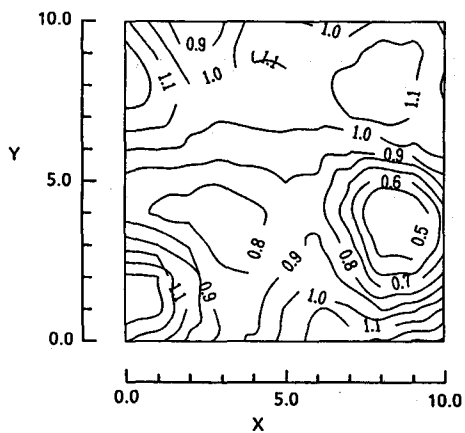


図-5 推定値(Case-2)

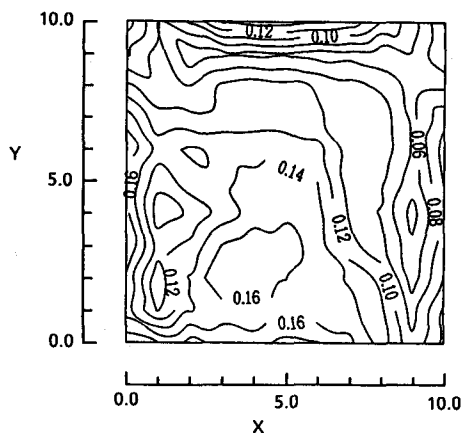


図-6 推定誤差(Case-2)

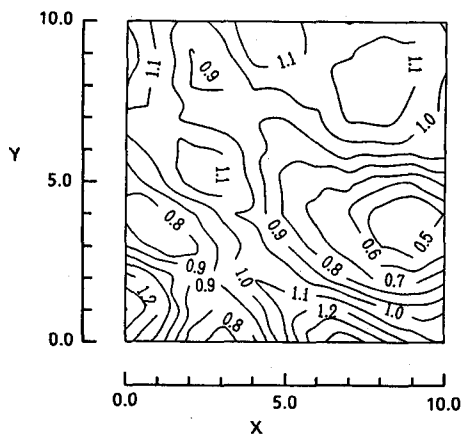


図-7 推定値(Case-3)

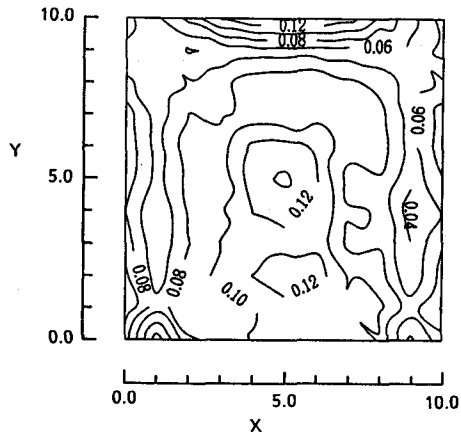


図-8 推定誤差(Case-3)

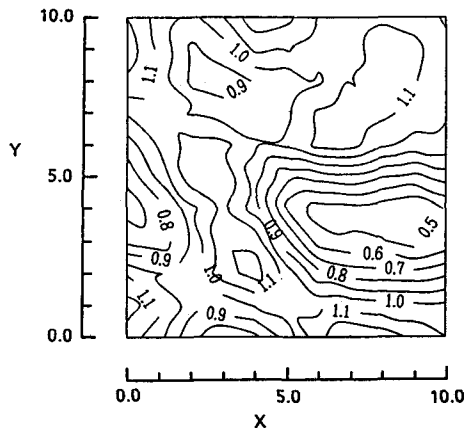


図-9 推定値(Case-4)

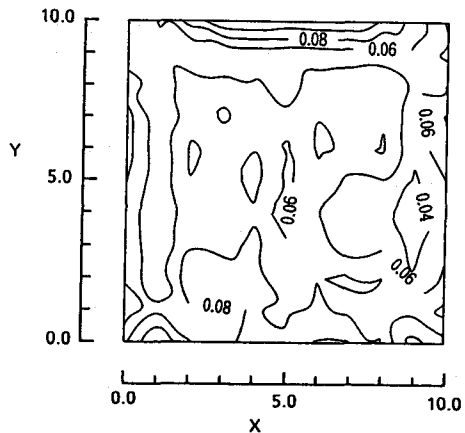


図-10 推定誤差(Case-4)

コンター図からだけでは収束の判定が難しいので、すべての要素の推定誤差分散を加えた値を指標とした。結果を表-2に示す。初期値としては9.0を与えていることになるので、それから比べると各ケースともかなり収束していることがわかる。Case-1とCase-2を比較すると、観測点を増やしても小さくならず、効果的な観測でないことがわかる。Case-4では、観測をすることによって推定誤差分散が10分の1以下となっている。

表-2 推定誤差分散の和

Case	Number of measurement values	Summation of estimation error variances
1	12	3.209
2	21	3.349
3	33	1.738
4	51	0.790

5. 結論

本研究で提案した解析手法は、拡張カルマン・フィルタに有限要素法を組み込んだ逆解析手法により、材料物性値の空間分布を、観測値をもとに推定(同定)するものである。ここで、材料物性値は確率場の中の1つの標本(標本場)と考え、拡張カルマン・フィルタの初期条件として、確率過程の確率特性である平均値と分散および自己相関関数を用いている。結果は次のようにまとめることができる。

- ① 本手法は、確率場の確率特性を導入することにより、観測数が推定する未知数より少なくても、観測値を有効に用いることができる逆解析手法である。
- ② この逆解析手法は、材料物性値の分布を推定するときに、推定誤差も同時に評価することができる。要素数100個に対して、観測値を51個で推定誤差を10分の1以下まで小さくできる。
- ③ ただし、通常の逆解析手法では、推定しようとする未知数についての情報はほとんど不要なのに対して、本手法では確率場を仮定しているため、正確な確率特性を求める必要がある。

参考文献

- 1) Vanmarcke, E.H. : Random Fields, The MIT Press, 1983.
- 2) 鈴木 誠・石井 清 : 土質定数の空間分布推定法を用いた確率有限要素法, 土木学会論文集, 第349号/Ⅲ-9, pp.97~104, 1988.
- 3) Gioda, G. and Sakurai, S : Back Analysis Procedures for the Interpretation of Field Measurement in Geomechanics, International Journal for Numerical and Analytical Method in Geomechanics, Vol. 11, pp.555~583, 1987.
- 4) Gioda, G : Some Remarks on Back Analysis and Characterization Problems in Geomechanics, Fifth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Nogoya, pp.47~61, 1985.
- 5) Kavanagh, K. and Clough, R. W. : Finite Element applications in the characterization of elastic solids, International Journal of Solids Structures, Vol. 7, pp.11~23, 1971.
- 6) 桜井 春輔・武内 邦文 : トンネル掘削時における変位計測結果の逆解析法, 土木学会論文報告集, No. 337, pp.137~145, 1983.
- 7) Arai, K., Ohta, H. and Yasui, T. : Simple Optimization Techniques for Evaluating Eeformation Moduli from Field Observations, Soils and Foundations, Vol. 23, No. 1, pp.107~113, 1983.
- 8) Hisatake, M. and Ito, T : Back Analysis for Optimization Method, Fifth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Nogoya, pp.1301~1307, 1985.
- 9) Asaoka, A. : Observational Procedure of Settlement Prediction, Soils and Foundations, Vol. 18, No. 4, pp.87~101, 1978.
- 10) Cividini, A., Maier, G. and Nappi, A. : Parameter Estimation of a Static Geotechnical Model using a Bayes' approach, International Journal of Rock Mechanics Mining Sciences and Geomechanics, Vol. 20, No. 5, pp.215~226, 1983.
- 11) 片山 徹 : 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, pp.73~78, 1983.
- 12) 村上 章・長谷川 高士 : Kalmanフィルター有限要素法による逆解析と観測節点配置, 土木学会論文集, 第388号/Ⅲ-8, pp.227~235, 1987.
- 13) Kalman, R. E. and Bucy, R. S. : New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, Vol. 83, pp.95~108, 1961.