システム最適化に関するシンポジウム講演論文集　1989年11月

(12) 時間領域におけるモード解析を利用した地震波スペクトル解析手法について

A SPECTRAL ANALYSIS OF AN EARTHQUAKE RECORD USING THE MODAL ANALYSIS IN THE TIME DOMAIN

○ 安藤幸治 *　　岩楯敞広 **

KOJI ANDO , TAKAHIRO IWATATE

This paper describes a new method of spectral analysis of an earthquake record. In general, this spectral analysis is treated by the Fourier transformation. But it is not easy to understand the dynamic property of ground from a Fourier Spectrum, because earthquake records contain so many influencing noises. In this paper, the theory is developed on the basis of assumption that the motion of the shearing wave is governed by the equation of motion. We shall proceed step by step, as follows. ① By applying the so-called the modal analysis in the time domain, we shall obtain the two modal parameters, that is, the eigenvalue and the eigenvector. ② Those modal parameters will be synthesized so that the result will be a solution of the equation of motion. ③ The remaining parameters are used to determine the spectrum of an earthquake record. From the results by means of these procedures, it is concluded that the present analysis is useful for a spectral analysis. One of the results is exhibited in this paper.

Keywords: *spectral analysis, modal analysis, least squares method, fourier transformation, model identification*

1．はじめに

通常、地震波観測データについてのスペクトル解析は、フーリエ級数展開に基づいて行なわれ、係る展開係数がスペクトルを形成する。周知のようにフーリエ級数は正弦、余弦関数の線形和の形で表現される。そして、これら三角関数は、$\Delta f=1/N\Delta t$（Δtは観測データの時間刻み、Nはデータ数である。）を基本周波数に持ち、観測データに対して周期性を仮定している。

以下に述べるモード解析とは、対象構造物において観測された動的データを利用して、振動時における構造物固有の基本モードを見出すための一手法である。ここに基本モードを特徴付ける物理量として、固有値とこれに属する固有ベクトルがある。固有値は、振動系の固有周波数と固有減衰定数を含み、振動系の持つ全ての固有値を総称してスペクトルと言う。自由度Mの振動系にはM個の基本モードがあるが、これらはM次元ベクトル空間にある振動系の基本ベクトルを構成する。従ってモード解析に依れば、対象構造物の動特性が明らかになる。このとき構造物は運動方程式に従うことを仮定し、観測データに対して、入力、出力の関係を明確にした上で解析が行なわれる。

このようにモード解析は、スペクトル解析を兼ねており、以後、モード解析という言葉をスペクトル解析と同義に使用していく。

一方フーリエ級数展開は、基本周波数Δfとその整数倍の周波数を持つ、データ数N個と同数の三角関数に

＊正会員　丸紅ハイテック株式会社　FA部技術1課　　（〒112　東京都文京区小石川四丁目20番地）

＊＊正会員　工博　（財）電力中央研究所　土木研究所　（〒270-11　千葉県我孫子市我孫子1646）

分解している、と考えることができる。これらN個の三角関数は、完全直交関数系として知られ、時間領域において、N次元ベクトル空間の基本モードを構成する。時系列データについては、このベクトル空間の任意のN元ベクトルのひとつとみなすことができ、各モードへの成分がフーリエ級数の展開係数となる。

ところで精度良く測定されたデータを解析の対象とした場合、従来から行なわれている入出力時系列データの双方についてフーリエ変換をして、Δf毎に出力データの展開係数を入力データのそれで割って得られた伝達関数は、モード解析による結果に一致する。これはフーリエ級数の性質を考えれば当然であるが、データが雑音を含まない場合は、このデータは振動系固有の基本モードによってのみ構成されており、フーリエ級数展開においては、データ数だけの未知数を用意しているので、このようなデータに限らず常に再現は可能である。

しかし地震波のようにたくさんの雑音を含むデータについては、フーリエ変換による伝達関数から振動系の動特性を把握するのは難しい。フーリエ級数展開時には雑音の概念が不明瞭で、単にデータの表現にとどまり、伝達関数はN個のモードが乱立するように複雑な形状を示してくる。つまり観測されたデータは、フーリエ級数によって表現された場合、全て物理的に有意な実現値とみなされるのである。このようなデータについては、予め時間領域で雑音を解析値に対する誤差として考えているモード解析を行なう方が良い。

またスペクトル解析結果は振動系の数値モデル化の際に利用されるが、運動方程式を満たす、という前提のもとに解析を行なって得たモード解析の結果を採用する方が、合理的である。

以下に時間領域におけるモード解析手法を紹介し、次いで、その結果を利用した伝達関数の作成手法について述べていく。

2．解析手法の概要と特徴

時間領域データを扱ったモード解析手法に関して、J.L.Beck[1] が既に発表している。彼は解析対象モードを１個に絞り、解析的に解を求める形を採っている。即ち、加速度の線形展開式(11)式において、あるモードｓ次を考える場合、次の式を仮定している。

$$\ddot{x} - \sum_{r \neq s} \dot{\alpha}_r \lambda_r u_r = \dot{\alpha}_s \lambda_s u_s \qquad \text{(a)}$$

上式は、ｓ次モード以外のモード定数、即ち、固有値λ_r、固有ベクトルu_rを真値とみなしている、と言える。ところが、これらは、右辺にあるｓ次モード定数と同様収束して得たモードではなく、変化しつつあるパラメータである。最小二乗法では回帰式による値は、母集合の中の標本に対応する。しかしながら(a)式については、この標本に対応すべき左辺が未知変数を含むため、標本の母数に対する推定値が種々に変動し、収束性に疑問が持たれる。従って、(a)式の仮定は、初期値として与えなければならない固有値（固有周波数及び減衰定数）の推定が難しい場合は、適さない。そして(a)式において固有ベクトルは$\ddot{x}$に対して線形の関係に、固有値は非線形の関係にあるが、この2つのパラメータの内最小二乗法に従って厳密に解いているのは固有ベクトルだけで、固有値については、人為的に固有値に含まれる固有周波数と減衰定数を変化させ、そのときの誤差、即ち、(a)式の左辺について時間と測点数に渡る二乗和の動向を見て決定している 。本来なら、(b)式のように振動系の固有周波数と減衰定数は固有値1個の変数に含まれるために、固有値をパラメータとして扱わなければいけないのであるが、ここでは固有周波数と減衰定数を別個に推定しているため、最小二乗法における正規方程式の係数行列が、数式上特異になるので、止むを得ず採り入れた手法である。

$$\lambda_r = -2\pi f_r h_r + i(2\pi f_r)(1-h_r^2)^{1/2} \qquad \text{(b)}$$

ここに、f_r、h_rは、それぞれ第ｒ次固有周波数、減衰定数である。

ここでは、次式のように固有ベクトルu_rで線形展開をした理論値(回帰式)を考えている。

$\ddot{x} = \Sigma_r \dot{\alpha}_r \lambda_r u_r$ (c)

ここに紹介する解析手法の特徴を要約すれば次のようになる。①同時に複数個のモードが扱える。②固有値、固有ベクトルを最小二乗法を使用して解いている。③収束性に優れている。

ところで最小二乗法は、常に正規方程式の特異問題を抱えているが、この特異性は、誤差の評価を行なう際に最も大きな問題になる。特に非線形問題を扱う場合には、この特異性が発散の原因になることがよくある。そこで演算の安定化を図るために、種々な方法が考えられている[(2)]。ここに紹介する解析手法は、特異問題を解決した上で最小二乗法の原理に忠実に展開した手法である。この手法の解析能力は、計算例に見るように充分評価に耐え得るものと考えている。なかでも固有値の初期値については、その適当な値に対して常に優れた収束性を示し、最小二乗法の特徴が現われている。

3．時間領域におけるモード解析手法の提案[(3)]

自由度Nを持つ振動系の運動方程式は、次式となる。今対象としている系の運動が、この方程式に従うことを前提として考えていく。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t) \quad (1)$$

ここにM、C、Kは、それぞれ質量、減衰、剛性の(N×N)行列であり、x、fは相対変位、外力を意味するN元ベクトルである(以下、行列、ベクトルは太字で記す)。入力が加速度であれば、外力fは慣性力となる。

以下で扱う観測値は、加速度である。そして観測対象系において基準点を決め、この点で観測したデータを対象系に対する入力波とし、他の点の観測値をその応答値と考える。従って基準点の加速度は慣性力として系に働き、他の点の加速度は、基準点に対する相対加速度応答値の意味を持ち、両者は、(1)式の運動方程式によって関係付けられる。

(1) 理論式の展開

振動系の有する固有ベクトルは、系のベクトル空間の基本ベクトルを形成する。そこで、はじめに運動方程式(1)式に従う剪断波を固有ベクトルの線形結合で表現するために、固有値問題を考えていく。

ここで以下の展開の便宜のために、(1)式を次のように改める。

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \quad (2)$$

また上式を簡略に表現するために、次の行列、ベクトルを導入する。

$$A\dot{X} + BX = F(t) \quad (3)$$

ここに、 $A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix}$、$B = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$、$X = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix}$、$F = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$ (4)

(3)式の固有値問題は、F＝0と置いた閉鎖系において論じられる。このとき解Xを、$X(t) = V\exp(\lambda t)$とすれば、(3)式は次の固有方程式へ移行する。

$$\lambda_r A V_r + B V_r = 0 \quad (r = 1 \sim 2N) \quad (5)$$

ここに、λ_r、V_rは、それぞれ第r次の固有値、固有ベクトルであり、ベクトルV_rは次の内容を持つ。

$$V_r = (\lambda_r u_r \ \ u_r)^T \quad (6)$$

ここにベクトルu_rは、第r次変位ベクトルである。またベクトルV_rは、次の直交性を満たす。

$$V_s^T A V_r = \delta_{sr} \quad (7) \qquad V_s^T B V_r = -\lambda_r \delta_{sr} \quad (8)$$

ここにδは、クロネッカーのデルタであり、Tは、転置を意味する。

こうして、(7)(8)の直交性を満たす基本ベクトルV_rを固有方程式(5)式より求め、(4)式の中のベクトルX(t)について、展開係数をα_r(t)としてV_rによる線形展開が可能となる。それは次のようになる。

$$X(t) = \sum_{r=1}^{2N} \alpha_r(t) V_r \quad (9)$$

以下Σについては記さぬ限り，r=1～2Nを意味するものとする。この内のN個は他のN個の共役複素数を採る 。

相対変位ベクトルx(t)、及び相対加速度$\ddot{x}$(t)については、(4)、(6)の両式から、次のようになる。

$$x(t) = \sum_r \alpha_r(t) u_r \quad (10) \qquad \dot{x}(t) = \sum_r \dot{\alpha}_r(t) \lambda_r u_r \quad (11)$$

展開係数α_rに関しては、(9)式を(3)式に代入し、ベクトルの直交性(7)(8)の両式を考慮すれば、α_rについて次の微分方程式を得る。

$$\dot{\alpha}_r(t) - \lambda_r \alpha_r(t) = u_r^T f(t) \quad (12)$$

よって上式をα_rについて解けば、相対変位、相対加速度が求まる。今問題にしている加速度については次のようになる。

$$\dot{x}(t) = \sum_r \{\lambda_r \alpha_{r0} \alpha_r(t) + u_r^T \dot{\beta}_r(t)\} \times \lambda_r u_r \quad (13)$$

ここにα_{r0}はα_rの初期値、$\alpha_r(t)=\exp(\lambda_r t)$である。ベクトル$\beta_r$については、次の微分方程式を満たす。

$$\dot{\beta}_r(t) = \lambda_r \beta_r(t) + f(t) \quad (14)$$

またモード定数λ_r、u_rについて共役複素数を考慮すれば、(13)式は次のようになる。

$$\dot{x}(t) = 2\,\mathrm{Real}\left[\sum_r \{\lambda_r \alpha_{r0} \alpha_r(t) + u_r^T \dot{\beta}_r(t)\} \lambda_r u_r\right] \quad (r=1\sim N) \quad (15)$$

この相対加速度が、観測値の相対加速度応答値に対応する。

ところでモード解析とは、(15)式の理論値と観測値との誤差の二乗和を評価して、固有値λ_rと固有ベクトルu_rを決定することを意味する。次にその決定方法について考えていく。

（２）　固有ベクトルの決定について

固有ベクトルu_rは、固有値λ_rを既知として扱い、観測点毎に決めていく。(15)式より、観測点jの相対加速度は、次式となる。

$$\dot{x}_j(t) = 2\,\mathrm{Real}\left[\sum_r \{\lambda_r \alpha_{r0} \alpha_r(t) + u_r^T \dot{\beta}_r(t)\} \lambda_r u_{rj}\right] \quad (16)$$

そして、未知変数α_{r0}、u_{rj}は、上式を既知変数α_r、β_r、f、λ_rについて整理をして、$\ddot{x}_j$(t)に対して線形的に扱い、最小二乗法によって得られる。このとき誤差評価関数は、次のようになる。

$$\varepsilon_j = \sum_i (\dot{x}^e_{ji} - \dot{x}_{ji})^2 = \sum_i \{\dot{x}^e_{ji} - 2\,\mathrm{Real}\sum_r (a_{rj}\lambda_r \alpha_{ri} + \lambda_r U_{rj}^T \dot{\beta}_{ri})\}^2 \quad (17)$$

ここに、$a_{rj}=\alpha_{r0}u_{rj}$、$U_{rj}=u_{rj}u_r$ある。また$\dot{x}^e_{ji}$は観測値を、添字iは時間$t=t_i$を意味する。α_{r0}、u_{rj}を含む新たな未知変数a_{rj}，U_{rj}は、(17)式のε_jをおのおので偏微分した式をゼロと置いて正規

方程式を立て、これを解いて得られる。

（３）　固有値の決定について

ここでは、固有ベクトルu_rを既知として扱う。(15)式より、相対加速度$\ddot{x}$は、固有値λ_rについて非線形の関係にある。そこではじめに、λ_rの微小変化分$\Delta\lambda_r$について$\ddot{x}$をテーラー展開をし、$\Delta\lambda_r$の一次までとってこの線形化を行なう。

即ち、観測点ｊの時間t_iにおける相対加速度$\ddot{x}_{ji}$は次のようになる。

$$\ddot{x}_{ji}=\ddot{x}_{ji0}+2\,\mathrm{Real}\,[\sum_r\{2\lambda_r a_{rj}\alpha_{ri}+\lambda_r a_{rj}t_i\alpha_{ri}$$
$$+U^T_{rj}(2\lambda_r\beta_{ri}+\lambda^2_r\partial\beta_{ri}/\partial\lambda_r+f_i)\}\Delta\lambda_r] \qquad (18)$$

ここに、$\ddot{x}_{ji0}$は、固有値をλ_rに持つときの理論値である。未知変数$\Delta\lambda_r$は、(18)式の理論値と観測値の差の二乗和を評価し、最小二乗法によって得られる。このとき、誤差評価関数は次式である。

$$\varepsilon=\sum_{ij}(\ddot{x}^e_{ji}-\ddot{x}_{ji})^2 \qquad (19)$$

こうして求まった$\Delta\lambda_r$は、固有値λ_rに加えられ更新される。

以上のように計算は、固有ベクトル、固有値を個別に求め、(19)式の誤差の変化率が、ある許容値に達するまで繰り返し行なわれる。

（４）　伝達関数について；スペクトル作成

ここでは、モード解析より得られるモード定数を利用した伝達関数の表現法を考えていく。扱うデータは、周波数領域データである。

今(3)式のベクトル$X(t)$、外力$F(t)$に対するフーリエスペクトルをそれぞれ$X(\omega)$、$F(\omega)$とすれば、(3)式の両辺をフーリエ変換して次式を得る。

$$i\omega AX(\omega)+BX(\omega)=F(\omega) \qquad (20)$$

ここで、上式のベクトル$X(\omega)$を(6)式の固有ベクトルV_rで線形展開をすれば、次のようになる。

$$X(\omega)=\sum_r\alpha_r V_r \qquad (21)$$

展開係数α_rは、上式を(20)式へ代入し直交性(7)(8)の両式を考慮すれば求まり、$X(\omega)$、そして(4)(6)の両式より変位ベクトル$x(\omega)$は、次のようになる。

$$X(\omega)=\sum_r\frac{u^T_r f}{i\omega-\lambda_r}V_r \qquad (22) \qquad\qquad x(\omega)=\sum_r\frac{u^T_r f}{i\omega-\lambda_r}u_r \qquad (23)$$

(23)式が、伝達関数を与えるモード定数λ_r、u_rの関数式である。

ところで、地震波の伝達関数は、対象点の絶対値(加速度、速度、変位)を、予め設けた基準点の絶対値で割って作成される。これを踏まえて(23)式より、地震波の伝達関数は次のようになる。

$$T(\omega)=\sum_r\frac{\omega^2 u^T_r Me}{i\omega-\lambda_r}u_r+1 \qquad (24)$$

ここにMは質量行列、ｅは全ての要素に1を持つベクトルである。そして外力ｆに対して慣性力ω^2Meを与えているが、Mは計算の中に消えてなくなり具体値を必要としない。また一般に(24)式は、地震スペクトルと呼ばれている。

4．実地震観測データを対象にした解析例

ここで扱う地震観測データは、Fig.1に地盤のモデルを示しているが、このモデル上の測点G1(地下24.5m)と測点G12(地表面)の2点で観測した絶対加速度である。Fig.2にG1の、Fig.3にG12の各データを示す。運動方程式(1)式に関して言えば、G1が入力加速度となり、従ってG1と地表面G12間の地盤に対してこの加速度による慣性力が働き、G12は、その応答値のひとつとなる。Fig.4、5は、モード解析の結果である（図は、グラフを拡大表示するために2つに分けている）。点線が観測値G12のG1に対する相対加速度を、実線がそのモード解析結果を表している。このように、(19)式の意味する誤差を大きく残してはいるものの、(1)式の運動方程式に従う剪断波、3波を容易に抽出し得た。ここに観測値の最大相対加速度、99.365galに対して、解析値のそれは、95.383galである。

Fig.6は、(24)式から得た伝達関数、即ちスペクトルである。この関数の特徴、即ち、固有周波数は、これまで多くの人達によって検討されてきた値[4] [5]にほぼ等しく、この地震波を観測した地盤の動特性をよく捉えている。

Fig.7には、本解析結果と比較する意味でフーリエ変換による伝達関数を示している。このように非常に複雑な形状をしており、中でも位相スペクトルは特徴の捉えどころがない。これまで位相スペクトルは、あまり重要視されることはなかったが、数値モデルを念頭に置いた場合、それの果たす役割は大きく無視できない。本解析より得られた絶対値、位相の両スペクトルは、ともに理想的な形状を示している。

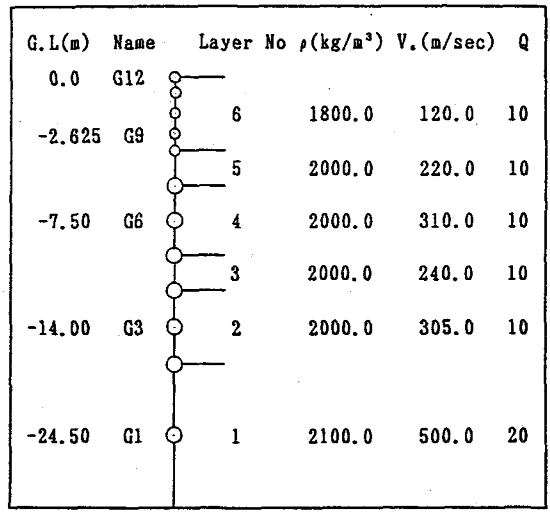

Fig.1 Numerical model of ground with 12 DOF

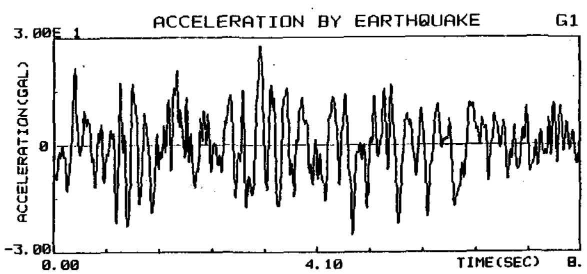

Fig.2 Earthquake record at G1

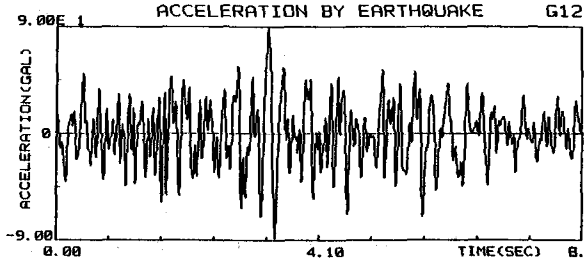

Fig.3 Earthquake record at G12

5．実地震スペクトルに対する数値モデルの同定[6]

モデル同定とは、はじめに観測対象振動系に見合った運動方程式を、即ち、数値モデルを仮定し、このモデルが観測値を再現するように、モデル値、観測値双方の伝達関数の誤差の二乗和を評価して、質量、減衰、剛性の各系定数を修正していくモデル作成手法のことを言う。ここでは、(24)式から得られた伝達関数(Fig.6)を対象にして、モデル同定を行なっている。はじめに仮定した数値モデルは、地盤調査から得られた密度ρ、剪断速度V_s Q値を利用して作成した12質点系剪断モデル(Fig.1)である。同定結果をFig.8に示す。点線が地震波伝達関数を、実線が同定して得たモデル値を表している。

このモデル同定解析では、運動方程式(1)式の質量、減衰、剛性の各係数行列を構成する密度、剪断速度 、Q値をパラメータに選んでいるが、同定結果については、Table.1に示している。初期値は、地盤調査か ら得られた物性値であり、最終的に求まった値をあわせて紹介している。これらパラメータの中で、それぞれ最も大きな変化を示したものは、元の調査値に比較して、剪断速度が1割、Q値が2割程度であった(密度 は固定している)。これは、本解析から得られたスペクトルの妥当性を裏付ける結果である、と言える。

6. 結論

一般にモード解析は、フーリエ変換によって作成された周波数領域データ、即ち、伝達関数を対象にして行なわれ、スペクトルを数値として捉えてきた。しかし冒頭で指摘したフーリエ級数の性質から解析可能なデータは限られてきて、起振実験や振動台試験等により精度よく観測されたデータが対象となる。地震波のように雑音を含むデータについては解析不能となることが多い(Fig.7)。

ここで、本解析を通して得られた成果をまとめれば次のようになる 。

(1)雑音を含む観測データを対象にしてスペクトル解析を行なう場合は、時間領域でモード解析を行ない、その結果を利用して伝達関数を作成した方が良い。フーリエ変換による伝達関数については、シミュレーションにおける解析値に対する誤差の定義が難しい。これは一方が三角関数座標系、他方が構造固有のモード座標系というベクトル空間に違いがあり、更に前者の座標系においては、

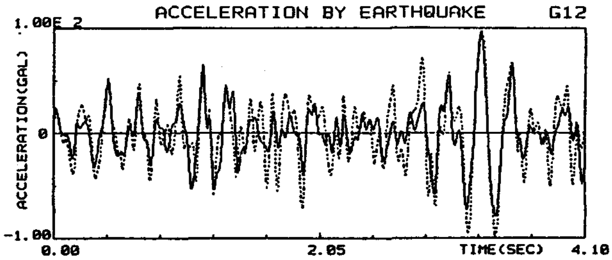

Fig.4 Earthquake record used in analysis(----) and the result calculated by the present analysis(——)

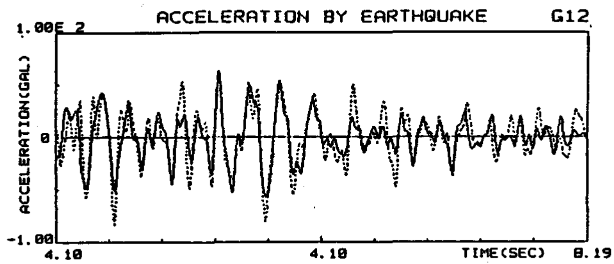

Fig.5 Earthquake record used in analysis(----) and the result calculated by the present analysis(——)

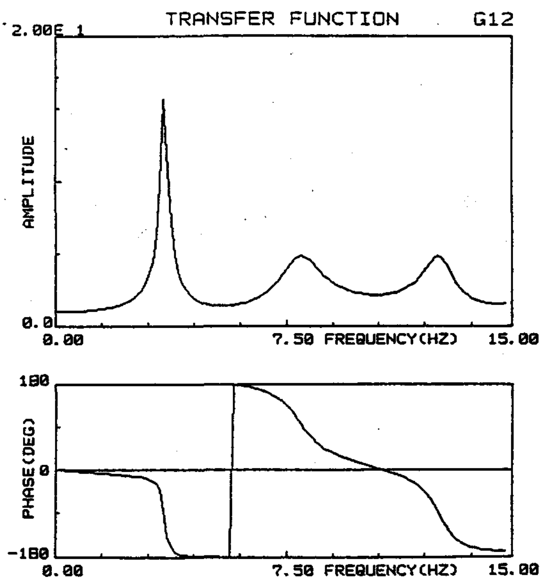

Fig.6 Transfer function of ground

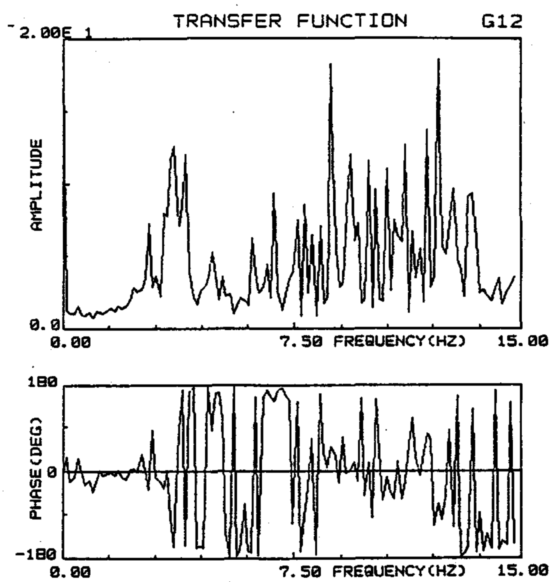

Fig.7 Transfer function of ground using FT

雑音の概念が不明確である、この2点に由来する。
(2)本解析手法によれば、地震観測データは、地表面においては最も小さい固有周波数を持つ第1次モードが、他のモードに比較して卓越している場合が多い、と言える。即ち、2次モード以降のモードは、1次モードに小さく重畳しているに過ぎないのである。それ故に時間領域では、数値モデル等から得られる理論値が、対象構造物の1次モード、即ち、1次固有周波数と減衰定数を正確に捉えてさへいれば、たとえ2次モード以降が不適切な値であっても、観測値に対して形状や振幅のよく似た値を示してくる。従ってこの点を考慮して、2次モード以降が1次モード同様に重要になる地盤ー建屋モデル等については、観測データを周波数領域で検討しなければならない。
(3)本解析理論は、最小二乗法に従って展開している。従来よりフーリエ変換が、有力な解析手法として使用されており、また周波数領域におけるモード解析手法が確立されていることを考えれば、時間領域でモード解析を行なう必要性を疑問視していた。ところが計算例で良好な結果をみたように、最小二乗法に従って理論を組み立てていけば、ガウス分布における誤差の定義の仕方に関わることであるが、本質的な部分に言及していけることがわかり、改めてその威力を思い知らされた。

以上であるが、これらについて本解析手法の有用性が認められ、今後データの解析対象範囲が更に広がるものと考えている。

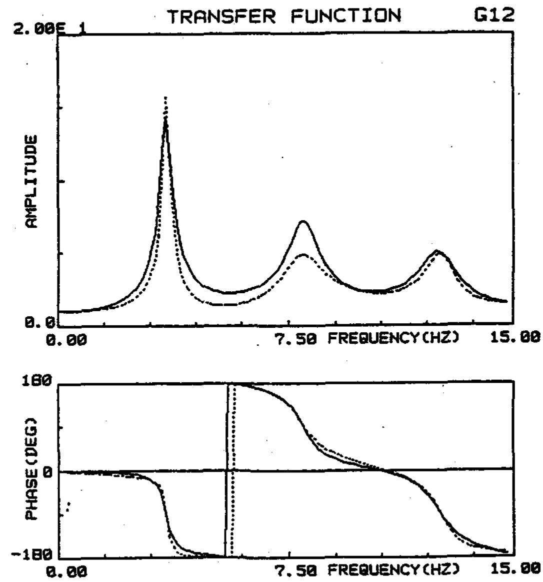

Fig.8 The result calculated by the present analysis (----) and identified model(——)

	Parameters			
	Initial estimates		Final estimates	
Layer No	V_s(m/sec)	Q	V_s(m/sec)	Q
1	500.00	20.0	481.89	17.20
2	305.00	10.0	272.39	7.99
3	240.00	10.0	233.38	8.69
4	310.00	10.0	335.27	8.84
5	220.00	10.0	242.93	9.11
6	120.00	10.0	108.80	7.56

Table.1 Optimal estimates of ground constants

謝辞：本研究を進めるうえで、(財)電力中央研究所土木研究所の澤田義博、花田和史、上島照幸各氏をはじめ、多くの方々に御検討を頂いた。また、清水建設株式会社技術研究所の田蔵隆、清水勝美両氏には、種々の貴重な御助言を頂いた。ここに、厚く御礼を申し上げます。

参 考 文 献

1)J.L.Beck : Determining Models of Structures from Earthquake Records,C.I.T,Pasadena,1978
2)中川徹　小柳義夫 : 最小二乗法による実験データ解析、東京大学出版会、1982
3)安藤幸治 : 時間領域に対するモード解析手法について、土木学会第42回年次学術講演会講演概要集第1部 動的応答解析法(2) (I-483)、1987
4)澤田義博　花田和史　岩楯敞広他 : JPDR(動力試験炉)を対象とした構造物ー地盤系の動特性 (3)地震観測に基づく動特性の検討、電力中央研究所報告383029、1983
5)花田和史　澤田義博　岩楯敞広他 : JPDR(動力試験炉)を対象とした構造物ー地盤系の動特性 (5)構造物ー地盤系挙動の数値模擬、電力中央研究所報告384023、1985
6)日本機械学会編 : モード解析の基礎と応用 3-8系定数の同定、丸善株式会社、　1986