

(11) 測定誤差が同定パラメータに及ぼす影響

SENSITIVITY OF PARAMETER ESTIMATES DUE TO MEASUREMENT ERRORS

三瓶 辰之*

松井 邦人**

溝淵 優***

Tatsuyuki SANPEI, Kunihito MATSUI, Masaru MIZOBUCHI

Various approaches to structural identification have been developed in the past. Most of them are based on error minimization in a least square sense. There have been little work how significant measurement errors will affect parameter estimates. Hence a method to find error sensitivity has been derived in this paper.

By choosing a pavement structure as an example problem, the effects of errors involved in measured surface deflections are computed by means of the method presented. The results are compared with those obtained from a structural identification technique to show computational effort, efficiency and effectiveness.

Key Words : Structural Identification, Statics,
Measurement Errors, Sensitivity

1. はじめに

土質・地盤工学における諸問題を解析するためにさまざまな逆解析法が提案されてきている。

例えば、Arai等¹⁾は共役勾配法、Cividini等²⁾はベイズ理論、また斉藤・古賀³⁾及び村上・長谷川等⁴⁾はカルマンフィルターを用いている。舗装においてもその健全性を力学的に評価する非破壊試験法（ベンケルマンビーム試験、ダイナフレクト試験、フォーリングウェイト試験等）を行っている。この試験法は舗装表面に荷重を作用させ、その時の荷重載荷点近傍の舗装表面の変形状態を測定することを目的としている。そして、これらの試験より測定して得られた表面たわみ量より舗装各層の弾性係数の推定を行う研究^{5) 6)}が報告されてきている。筆者等^{7) 8)}も最小2乗法の概念に基づく、Gauss-Newton法と多層弾性理論とを組み合わせた逆解析法を提案してきた。しかし、測定されたデータには誤差が必ず存在するものであり、それが逆解析に及ぼす影響については十分な検討が行われていない。

本研究では、最適設計の最適解の感度解析として開発された手法に基づき、Gauss-Newton法を用いて理論的に各測定位置における測定誤差が未知パラメータ（弾性係数等）の推定値に及ぼす影響（感度）を求める方法を誘導し、例題による検証を行う。

* 東京電機大学大学院 理工学研究科 建設工学専攻

** Ph.D 東京電機大学教授 理工学部建設工学科

*** 工博 日本舗道(株) 技術研究所

2. 構造モデル

本研究においては舗装構造を多層弾性構造にモデル化し、以下のような仮定を行っている。

- (1) 舗装各層は路床上に構築させた1つ、またはそれ以上の厚さが有限で、無限に水平に広がっている。
- (2) 路床は表面が水平な半無限遠である。
- (3) 各層の材料特性は等方・等質性で線形弾性挙動を示す。
- (4) 各層間の境界面では滑動が生じない。
- (5) 作用荷重と舗装構造は軸対称である。

多層弾性構造モデルを図-1に示す。

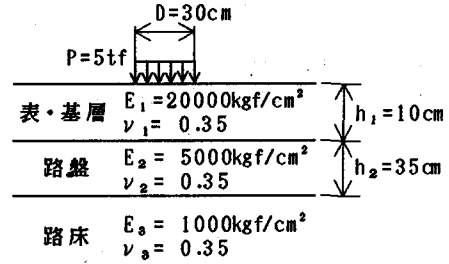


図-1 多層弾性構造モデル

3. 理論

各層の弾性係数を未知パラメータとし、層厚、ポアソン比等は与えられるものとする。いま、未知パラメータを $\mathbf{x} = \{x_j\}$ ($j=1,2,\dots,M$)、測点 i における測定変位を $\mathbf{u} = \{u_i\}$ ($i=1,2,\dots,N$)、この点に対応する解析変位は $\mathbf{z}$ の関数であるから $z_i(\mathbf{x})$ と書くことができる。目的関数 f は、

$$f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_i \{u_i - z_i(\mathbf{x})\}^2 \quad (1)$$

と表すことができる。よって未知パラメータ $\mathbf{x}$ は、目的関数 f を最小となるように決定すれば良いことがわかる。ここで w_i は重み係数を示す。

いま、測点 l ($l=1,2,\dots$) の測定値 u_l に Δu_l だけの誤差が混入し、他の測点では正確に測定されているものと仮定すると式(1)は、

$$f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_i \{u_i - z_i(\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_l} \Delta u_l)\}^2 + \frac{1}{2} w_l \{u_l + \Delta u_l - z_l(\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_l} \Delta u_l)\}^2 \quad (2)$$

となる。いま Δu_l の影響が十分に小さいとすると、式(2)は、

$$\begin{aligned} f &\approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_i \{u_i - z_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^M \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_l} \Delta u_l\}^2 + \frac{1}{2} w_l \{u_l + \Delta u_l - z_l(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^M \frac{\partial z_l}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_l} \Delta u_l\}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_i \{-\sum_{j=1}^M \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \Gamma_{j,l}\}^2 (\Delta u_l)^2 + \frac{1}{2} w_l (1 - \sum_{j=1}^M \frac{\partial z_l}{\partial x_j} \Gamma_{j,l})^2 (\Delta u_l)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

但し、

$$\Gamma_{j,l} = \frac{\partial x_j}{\partial u_l} \quad (4)$$

式(3)は $\Gamma_{j,l}$ の関数である Δu_l は任意であるから、 $(\Delta u_l)^2$ の値の如何にかかわらず最小となるための必要条件は、

$$\frac{\partial f}{\partial \Gamma_{k,l}} = \sum_{i=1}^N w_i (-\sum_{j=1}^M \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \Gamma_{j,l}) (-\frac{\partial z_i}{\partial x_k}) + w_l (1 - \sum_{j=1}^M \frac{\partial z_l}{\partial x_j} \Gamma_{j,l}) (-\frac{\partial z_l}{\partial x_k}) = 0 \quad (5)$$

となる。上式を整理すると次のようになる。

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M w_i \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \frac{\partial z_i}{\partial x_k} \Gamma_{j,l} = w_l \frac{\partial z_l}{\partial x_k} \quad (k=1,2,\dots,N) \quad (6)$$

この式は $\Gamma_{j,l}$ に関する線形連立方程式となり容易に解くことができる。 $\Gamma_{j,l}$ は測点 l にのみ単位量の誤差が混入するとき、それが x_j に及ぼす影響を示している。

4. 例題

図-1に示した3層の弾性構造モデルを用いて、3.で示した理論より求めた各測定位置での誤差の感度を表-1に示す。なお、各測定位置は荷重載荷点中心より水平方向に、0cm,20cm,45cm,90,cm,150cmの5点としている。

次に、5個の測定点のうちの1つの測定たわみ量にのみ、+0.1%,+1.0%,+5.0%,+10.0%の誤差を加えたデータを用いて逆解析の手法により弾性係数を求めたものと、理論に同様な誤差を混入して得た感度より求めた弾性係数との比較を表-2に示す。

表-1 理論式による誤差の感度

測定位置 (cm)	誤差の感度		
	$\frac{\partial x_1}{\partial u_1}$	$\frac{\partial x_2}{\partial u_1}$	$\frac{\partial x_3}{\partial u_1}$
0.0	-4.52E+6	1.62E+5	5.16E+3
20.0	6.95E+6	-7.15E+5	-2.33E+2
45.0	2.84E+5	1.20E+5	-2.44E+4
90.0	-2.62E+6	4.38E+5	-2.86E+4
150.0	-1.64E+6	2.99E+5	-2.05E+4

表-2 誤差の感度より求めた弾性係数と逆解析による弾性係数との比較

誤差を与えた位置と大きさ		E ₁ (kgf/cm ²)		E ₂ (kgf/cm ²)		E ₃ (kgf/cm ²)	
位置 (cm)	誤差 (%)	感度より求めた値	逆解析による結果	感度より求めた値	逆解析による結果	感度より求めた値	逆解析による結果
0	0.1	1.978E+4	1.978E+4	5.008E+3	5.008E+3	1.000E+3	1.000E+3
	1.0	1.796E+4	1.796E+4	5.077E+3	5.077E+3	1.003E+3	1.003E+3
	5.0	1.215E+4	1.215E+4	5.349E+3	5.349E+3	1.013E+3	1.013E+3
	10.0	8.158E+4	8.159E+4	5.625E+3	5.624E+3	1.025E+3	1.025E+3
20	0.1	2.025E+4	2.025E+4	4.975E+3	4.975E+3	9.999E+2	1.000E+3
	1.0	2.258E+4	2.259E+4	4.755E+3	4.754E+3	1.000E+3	1.000E+3
	5.0	3.405E+4	3.412E+4	3.956E+3	3.952E+3	1.004E+3	1.004E+3
	10.0	4.877E+4	4.889E+4	3.237E+3	3.233E+3	1.015E+3	1.015E+3
45	0.1	2.001E+4	2.000E+4	5.003E+3	5.003E+3	9.994E+2	9.994E+2
	1.0	2.006E+4	2.003E+4	5.030E+3	5.033E+3	9.941E+2	9.941E+2
	5.0	2.011E+4	2.032E+4	5.168E+3	5.149E+3	9.710E+2	9.712E+2
	10.0	2.049E+4	2.042E+4	5.312E+3	5.316E+3	9.440E+2	9.441E+2
90	0.1	1.996E+4	1.996E+4	5.007E+3	5.007E+3	9.996E+2	9.996E+2
	1.0	1.961E+4	1.962E+4	5.068E+3	5.066E+3	9.956E+2	9.956E+2
	5.0	1.810E+4	1.821E+4	5.347E+3	5.335E+3	9.786E+2	9.787E+2
	10.0	1.657E+4	1.646E+4	5.696E+3	5.710E+3	9.585E+2	9.585E+2
150	0.1	1.998E+4	1.998E+4	5.003E+3	5.003E+3	9.998E+2	9.998E+2
	1.0	1.985E+4	1.985E+4	5.028E+3	5.028E+3	9.980E+2	9.980E+2
	5.0	1.925E+4	1.927E+4	5.144E+3	5.142E+3	9.902E+2	9.903E+2
	10.0	1.860E+4	1.858E+4	5.286E+3	5.287E+3	9.807E+2	9.807E+2

5. 結論

構造同定問題において測定値に含まれる誤差が、構造に関わるパラメータの推定値に与える影響を求める理論式を誘導した。従来、誤差の影響を調べる方法としてモンテカルロ・シミュレーションが用いられている。モンテカルロ・シミュレーションでは誤差の含まれた測定データの分布を作成し、逆解析手法を用いて推定値のばらつきを求めている。そのため、幾度も逆解析を行い、その度に繰り返し計算をする必要がある。

しかし本論文の手法では、1度の解析で誤差の影響度（感度）が計算可能であり、同時に推定値に+に影響するか、-に影響するのかも判断することができる。

また、例題の結果より以下のことがわかる。

- 1) 舗装表面における測定値の誤差の影響は非常に大きい。
- 2) 誤差の大きさが与えられると、推定値の値を精度良く補正できる。

参考文献

- 1) Arai, K., Ohta, H. and Yasui, T.: Simple Optimization Techniques for Evaluating Deformation Moduli from Field Observations, Soils and Foundations, Vol.23, No.1, pp.107~113, 1983.
- 2) Cividini, A., Maier, G. and Nappi, A.: Parameter Estimation of a Static Geotechnical Model Using a Bayes' Approach, Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol.20, No.5, pp.215~226, 1983.
- 3) 斉藤悦郎・古賀重利: EK-WGI法による山留め壁の作用外力の同定, 土木学会論文報告集, 第380号, pp.459~465, 1987年4月.
- 4) 村上 章・長谷川高士: Kalmanフィルター有限要素法による逆解析と観測節点配置, 土木学会論文報告集, 第388号, pp.227~235, 1987年12月.
- 5) 丸山暉彦・後藤 巖・阿部長門・姫野賢治・林 正則: アスファルト舗装のFWDたわみに関する研究, 第4回北陸道路舗装会議, pp.73~78, 昭和63年6月
- 6) Ullidtz, P., Stubstad, R.N.: Analytical-Empirical Pavement Evaluation Using the Falling Weight Deflectometer, Transportation Research Record 1022, pp.36~pp.44
- 7) 松井邦人・岡崎竜也・井上武美: 拡張最小2乗法に基づく弾性多層構造の逆解析, 第23回土質工学研究発表会, 昭和63年6月.
- 8) 松井邦人・井上武美: 多層弾性舗装構造の逆解析法の考察, 第43回土木学会年次学術講演会, V-41, 昭和63年10月.