

(3) 最適化手法を利用した骨組構造物の 弾塑性解析と設計法

ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS AND DESIGN METHOD OF SKELETAL
STRUCTURES BY USING OPTIMIZATION TECHNIQUES

三原徹治・石川信隆** 香月 智*** 星川辰雄****

By Tetsuji MIHARA, Nobutaka ISHIKAWA, Satoshi KATSUKI and Tatsuo HOSHIKAWA

This paper presents a holonomic elastic-plastic analysis and design method of skeletal structures by using optimization techniques. The necessary and sufficient conditions for the holonomic elastic-plastic analysis of skeletal structures are firstly derived as a linear complementarity problem by using the sequential linearized yield condition. The complementary pivoting algorithm is applied to solve the linear complementarity problem of the elastic-plastic analysis to enhance the computational efficiency. Furthermore, an optimal elastic-plastic design is performed by satisfying the elastic-plastic deformation constraint. The steel-pipe circular arch is analyzed and designed as the numerical example in order to illustrate the scope and the application of this approach.

Key Words : Elastic-Plastic Analysis, Optimization Technique, Sequential
Linearized Yield Condition, Optimal Elastic-Plastic Design

1. 緒 言

通常の比較的頻度の多い作用荷重に対しては構造部材の弾性応答で構造物の機能を保持し、構造物の耐用年数中に1回か2回程度生起すると考えられる大きな作用外力に対しては構造物のねばり(塑性率)に期待して安全を図ろうとする設計、すなわち構造物の弾塑性変形を考慮した限界状態設計法の開発が、土石流を受ける鋼製砂防構造物などを対象として検討されている¹⁾。このためには、弾性限界を超えた荷重レベルから終局荷重レベルに至る弾塑性変形量を算定する必要があり、しかも、一般に構造物は組合せ応力を受けその弾塑性挙動は複雑になるので、できるだけ効率的で精度の高い弾塑性解析法の開発が必要である。

さて、従来、最適化手法を用いて材料非線形を考慮した効率的な弾塑性解析法として、大久保ら²⁾はトラス構造やはり構造などを対象にエネルギー原理に基づく解法を提案しており、著者ら³⁾も、組合せ応力を受ける骨組構造について相補掃出法を用いたホロノミック弾塑性解析法を基礎的に開発し、その妥当性や効率性について検討してきた。

* 工博 九州共立大学助教授 工学部土木工学科 (〒807 北九州市八幡西区自由ヶ丘1-8)

** 工博 防衛大学校教授 土木工学科 (〒239 横須賀市走水1-10-20)

*** 防衛大学校助手 土木工学科 (同 上)

**** 防衛大学校理工学研究科学生 (同 上)

本研究は、上記研究³⁾を実用的に展開するために、組合せ応力として鋼管断面における曲げモーメントと軸力の組合せを受ける円弧アーチ構造を対象として、その弾塑性解析と設計法を提示するものである。すなわち、まずホロノミック弾塑性解析の基本式を一般的に示したうえで、鋼管断面の非線形降伏条件を逐次線形近似する手法を提示した。次にこの逐次線形近似降伏条件を用いて、ホロノミック弾塑性解析の基本式を、線形相補問題 (Linear Complementarity Problem, LCP) ⁴⁾として定式化し、相補掃出法 (Lemke法) ⁴⁾を適用した解法を示した。さらに、鋼管製両端固定円弧アーチを対象として、弾塑性変位制約を考慮した最適弾塑性設計法を開発し、本法の妥当性と応用性について数値的に検討した。

なお、本研究では次の仮定を用いた。

- (1) 各部材の内力と内変形の関係は、完全弾塑性型とする。
- (2) つり合い条件は変形前において求められるものとし、微小変形理論にしたがう。
- (3) 作用荷重は比例的に変化するものとする。
- (4) 局部座屈や全体座屈などの座屈現象はメカニズムが生起するまで起こらないものとする。

2. 弾塑性解析の基本式

弾塑性解析には、全変形理論に基づき過去の荷重履歴とは無関係に、ある荷重レベルでの構造物の弾塑性変形状態を求めるホロノミック解析と、ひずみ増分理論に基づき荷重経路に依存し、除荷の影響を考慮しながら逐次荷重～変位関係を追跡する増分解析とがある。ホロノミック弾塑性解析は、除荷の影響を無視しているため弾塑性増分解析法に比較すると解の厳密性に欠ける場合があるが、設計問題への平易な適用が可能である。よって、本研究では設計問題への適用性から、弾塑性解析の基本式としてホロノミック弾塑性解析を採用する。

(1) ホロノミック弾塑性解析の必要十分条件

応力法によるコンプレメンタリーエネルギー最小化の方法によれば、ホロノミック弾塑性解析の基本式は、平衡条件と降伏条件を満足させたいでコンプレメンタリーエネルギーを最小にする2次計画問題として得られる^{5), 6)}。この問題にクーン・タッカー (Kuhn-Tucker) 条件を適用すれば、ホロノミック弾塑性解析の必要十分条件が平衡条件式(E)、弾塑性変形適合条件(C)、降伏条件(Y)、塑性変形発生条件(P)および塑性乗数の非負条件(N)の5つの条件式として表される³⁾。

(2) 非線形降伏条件式の逐次線形化

ここでは、塑性容量を比較的正確に評価し、さらに計算容量の縮小を図るため、内力状態の変化に応じて逐次、非線形降伏条件を線形化する逐次線形化手法を用いる。以下、曲げモーメントと軸力を受ける鋼管部材の降伏条件について、その適用方法を示す。

まず、図-1のように要素内力をとると構造要素kの鋼管断面iおよびi+1の非線形な降伏条件式は次式のように表される⁷⁾。

$$\begin{aligned}\Phi_i &= \left(\frac{Q_2}{M_p} \right) - \cos \left(\frac{\pi Q_1}{2 N_p} \right) \leq 0, \\ \Phi_{i+1} &= \left(\frac{Q_3}{M_p} \right) - \cos \left(\frac{\pi Q_1}{2 N_p} \right) \leq 0\end{aligned}\quad (1)$$

ただし、 M_p は全塑性曲げモーメント容量、 N_p は塑性軸力容量である。

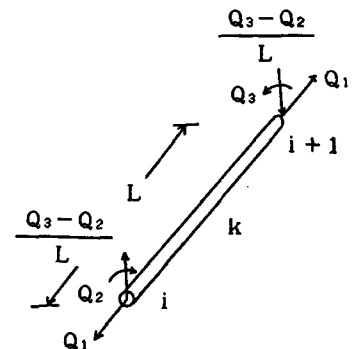


図-1 構造要素の内力Q

次に、肩字 j を線形化の繰返し回数を示す記号とすれば $j+1$ 回目の未知内力 Q^{j+1}_k は、 j 回目の既知内力 Q^j_k と未知内力変化量 ΔQ^{j+1}_k の和として得られる。よって、式(1)の非線形降伏条件は、図-2を参照して次のように線形化降伏条件として変換することができる。

$$(N^j_k)^T (Q^j_k + \Delta Q^{j+1}_k) - R^j_k \leq 0 \quad \text{----- (2)}$$

$$\text{ただし、} (N^j_k)^T = \begin{vmatrix} \gamma_i \pi \sin(n^*_{i+1} \pi/2) / (2N_p) & \text{sign}(Q^j_2) \gamma_i / M_p & 0 \\ \gamma_{i+1} \pi \sin(n^*_{i+1} \pi/2) / (2N_p) & 0 & \text{sign}(Q^j_3) \gamma_{i+1} / M_p \end{vmatrix}_k,$$

$$R^j_k = \begin{vmatrix} \gamma_i \{m^*_{i+1} + \pi n^*_{i+1} \sin(n^*_{i+1} \pi/2) / 2\} \\ \gamma_{i+1} \{m^*_{i+1} + \pi n^*_{i+1} \sin(n^*_{i+1} \pi/2) / 2\} \end{vmatrix}_k,$$

$$\gamma_{i(i+1)} = 1 / \sqrt{1 + \pi^2 \sin^2(n^*_{i(i+1)} \pi/2) / 4},$$

$$m^*_{i(i+1)} = \cos(n^*_{i(i+1)} \pi/2),$$

$$n^*_{i(i+1)} = Q^j_j M_p \cos(n^*_{i(i+1)} \pi/2) / (Q^j_{2(3)} N_p) \quad (3)$$

ここに、式(3)は修正ニュートン・ラプソン法で解くことができる。

したがって、 K を構造要素の総数として式(2)を $k=1, 2, \dots, K$ に拡張すれば、構造全体の逐次線形化降伏条件が次のように得られる。

$$(N^j)^T (Q^j + \Delta Q^{j+1}) - R^j \leq 0 \quad \text{----- (4)}$$

$$\text{ただし、} N^j = \text{diag } N^j_k$$

(3) 逐次線形化降伏条件を用いたホロノミック弾塑性解析のLCP基本式

式(4)に示す逐次線形化降伏条件を用いたホロノミック弾塑性解析の必要十分条件は、2. (1) で得た5つの条件式をまとめて以下のように得られる³⁾。

$$\begin{array}{ll} \text{未知数} & : \Phi^{j+1}, \Delta \lambda^{j+1} \\ \text{(P)} & : (-\Phi^{j+1})^T \Delta \lambda^{j+1} = 0 \quad \text{----- (5a)} \end{array}$$

$$\text{(E)+(C)+(Y)} : D^j \Delta \lambda^{j+1} + (-\Phi^{j+1}) = -B^j \quad \text{----- (5b)}$$

$$\text{(N)} : \Delta \lambda^{j+1} \geq 0 \quad \text{----- (5c)}$$

$$\text{(N)} : (-\Phi^{j+1}) \geq 0 \quad \text{----- (5d)}$$

$$\text{ただし、} B^j = (N^j)^T Q^j - R^j \quad \text{----- (6a)}$$

$$D^j = (N^j)^T (k C K^{-1} C^T k - k) N^j \quad \text{----- (6b)}$$

$$K = C^T k C$$

ただし、 C は適合マトリックス、 Q は内力ベクトル、 Φ は降伏関数ベクトル、 N は線形化降伏面に対する単位外向法線マトリックス、 R は塑性容量ベクトル、 k は集合剛性マトリックス、 u は節点変位ベクトル、 λ は塑性乗数ベクトルであり、記号 T および -1 はそれぞれ転置および逆マトリックスを示し、 i は断面番号を示す記号である。ここに、式(5a)は2つの未知数 Φ^{j+1} と $\Delta \lambda^{j+1}$ のうち一方を非負の値として定めれば他方は必然的に0の値をとるという相補条件を意味し、式(5c,d)はともに未知数の非負条件を示し、また、式(5b)は未知数の数が式の数のちょうど2倍の線形方程式である。よって、式(5)はLCPの条件⁴⁾を備えている。

なお、繰返し過程における内力 Q^{j+1} は、次式のように塑性乗数の変化量 $\Delta \lambda^{j+1}$ の関数として得られる

³⁾。

$$Q^{j+1} = Q^j + \Delta Q^{j+1} = Q^j + (k C K^{-1} C^T k - k) N^j \Delta \lambda^{j+1} \quad \text{----- (7)}$$

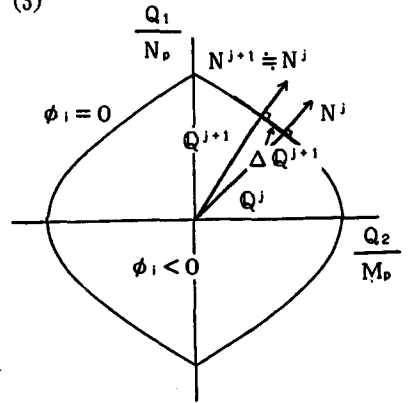


図-2 曲げモーメントと軸力を受ける鋼管断面の線形化降伏条件

3. ホロノミック弾塑性解析の解法と適用例

(1) 相補掃出法による解法³⁾

前述のように、式(5)はLCP問題の条件を備えているので、LPを繰返し用いる方法³⁾により解くか、または、相補掃出法⁴⁾により解くか、いずれかの方法を用いることとなる。ここでは相補掃出法を用い、逐次線形化降伏条件に基づくホロノミック弾塑性解析の解法を以下の手順により示すこととする。

- ①まず初期内力 Q^0 として、降伏面を考慮しない弾性内力を与える。
- ②得られた内力状態を基に、式(2)に示す線形化降伏条件を仮定する。
- ③式(6)により求めた B^j 、 D^j に対するLCP(式(5))を相補掃出法を適用して解き、塑性乗数の未知変換量 $\Delta\lambda^{j+1}$ を求める。
- ④得られた $\Delta\lambda^{j+1}$ を式(7)に代入して Q^{j+1} を求める。この Q^{j+1} が非線形降伏条件(式(1))をすべて満足すれば、計算を終了する。
- ⑤そうでなければ、②に戻る。

(2) 鋼管円弧アーチの弾塑性変形解析

本解析法の適用例として、図-3に示すような中央集中荷重を受ける鋼管製両端固定円弧アーチの弾塑性変形解析を行った。解析にあたっては、円弧アーチを材軸方向に20等分し、各分割要素を直線要素に置換し、その断面を直径12.0cmの鋼管とした。よって、各構造要素端の降伏条件には式(1)を適用した。中央点集中荷重は $P=11.0\text{tf}$ で、支点間距離 $L_s=440.0\text{cm}$ 、半中心角 $\theta=37.0^\circ$ 、鋼管の降伏応力度 $\sigma_y=2400\text{kgf/cm}^2$ 、ヤング係数 $E=2.1\times 10^6\text{kgf/cm}^2$ 、鋼管径 $d=12\text{cm}$ とし、鋼管肉厚 t を0.50～0.64cm間で変化させて中央点最大鉛直変位 u_o を求めた。

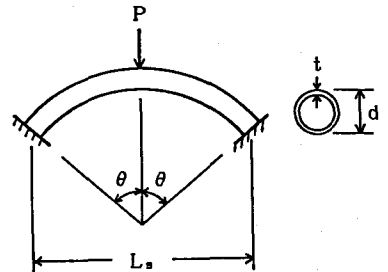


図-3 鋼管製両端固定円弧アーチ

図-4に肉厚 t と本法により求めた最大変位 u_o との関係を示す。また、図中の弾性変位 u_o^e は、弾性解析により求めた最大変位である。肉厚 t が増せば全体の剛性が高まり、塑性容量も大きくなるため、 u_o 、 u_o^e はともに減少するが、その差、すなわち塑性変形による節点変位量も減少し、 $t=0.63\text{cm}$ 付近で $u_o=u_o^e$ となり、以後塑性変形は生じない(弾性状態)ことがわかる。このように、本解析法を用いれば弾性限界状態から崩壊状態に至る任意の弾塑性変形状態を容易に求めることができる。

4. 弾塑性変位制約を考慮した最適弾塑性設計

ここでは、先に示したホロノミック弾塑性解析法を用いた一般的な弾塑性変位制約を考慮した最適弾塑性設計問題を定式化し、次いで、鋼管円弧アーチを対象とした具体的な定式化および設計計算例の結果について示す。

(1) 設計基本式

弾塑性変位制約を考慮した最適弾塑性設計^{9), 10)}とは、構造物のねばり、つまり弾塑性変形に期待して構造物の安全性と経済性を図ろうとするものである。すなわち、

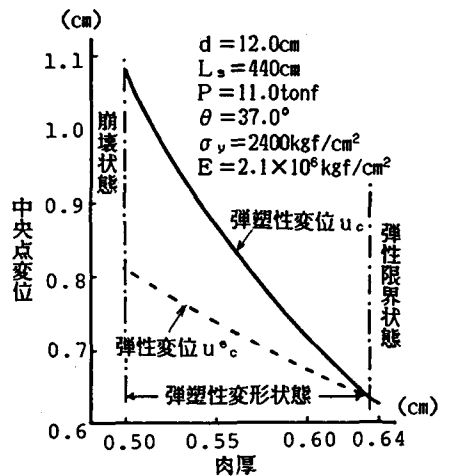


図-4 肉厚 t と最大弾塑性変位 u_o との関係

構造物が所用の耐力を保持したうえで、最大変位が定められた許容変位以下になるように制約したうえで、構造重量を最小にするよう設計変数の値を決定する問題であり、骨組構造の場合、次式のように一般的に定式化される。

目的関数： $W = \sum_{k=1}^K w_k(\rho_k, L_k, \mathbf{X}) \longrightarrow \min.$ ----- (8a)

制約条件： $\max_j u_j \leq u_a$ ----- (8b)

$\alpha \mathbf{F} \geq \alpha_o \mathbf{F}$ ----- (8c)

$\mathbf{X}^L \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}^U$ ----- (8d)

ここに、式(8a)は構造重量Wが最小になることを、式(8b)は最大弾塑性変位 $\max u_j$ が許容変位 u_a を越えないという弾塑性変位制約を示し、また、式(8c)は構造物が保有する崩壊荷重 $\alpha \mathbf{F}$ が指定した終局崩壊荷重 $\alpha_o \mathbf{F}$ を上回るという塑性崩壊制約を表しており、構造物が $\alpha_o \mathbf{F}$ 以下では無制限の塑性流れ状態に至らないことを保証している。さらに、式(8d)は工学的見地からの設計変数ベクトル $\mathbf{X}$ に対する側面制約を表している。ただし、 w_k は構造要素kの重量関数、 ρ_k 、 L_k はそれぞれ構造要素kの単位体積重量および要素長、 u_j は着目点jの弾塑性変位、 $\mathbf{F}$ は基準とする外力ベクトル、 α は崩壊荷重係数、 α_o は終局崩壊荷重係数、 $\mathbf{X}^U$ 、 $\mathbf{X}^L$ は設計変数ベクトル $\mathbf{X}$ に対する上下限值ベクトルである。

なお、式(8b)の弾塑性変位 u_j は先述のホロノミック弾塑性解析により求めることができ、また式(8c)の崩壊荷重係数 α は塑性解析の静的アプローチに基づく逐次線形化降伏条件を導入した塑性解析法¹¹⁾によって求められる。

(2) 鋼管円弧アーチへの適用

式(8)に示した一般的な設計基本式を図-2に示した鋼管円弧アーチの最適設計に適用する。設計荷重として中央点集中荷重 $\alpha \cdot P$ ($P=10.0\text{tf}$)、支点間距離 L_s を440.0cmに固定、全断面均一、その単位体積重量 ρ および分割数Nを与え、設計変数を半中心角 θ 、鋼管肉厚 t 、鋼管直径 d とし、構造体積 $V(=W/\rho)$ を最小化するような次の設計問題として定式化される。

目的関数： $V = N\pi t(d-t)L_s \sin(\theta/N) / \rho \sin \theta \longrightarrow \min.$ ----- (9a)

制約条件： $u_o(\theta, t, d) \leq u_a$ ----- (9b)

$\alpha P(\theta, t, d) \geq \alpha_o P$ ----- (9c)

$\beta^L d \leq t \leq \beta^U d$ ----- (9d)

ただし、式(9d)は直径 d に対して肉厚 t が鋼管として適当な値となることを保証する条件を示し、 β^U ⁽¹⁾は直径 d に対する肉厚 t の上(下)限值である。

式(9)は目的関数と制約条件の一部に強い非線形性が予想される非線形計画問題であるが、設計変数の数は3個と少ないので、次のような対話形式の解法によって最適解を求めた。まず、任意の設計値とその設計値からただ1個の設計変数値を単位量だけ変化させた設計値3組、計4組の設計値に対して式(9a)による構造体積の算定、式(5)による弾塑性変形解析および崩壊荷重解析¹¹⁾を行い、各設計変数の変化が V 、 u_o および αP に及ぼす影響、すなわち感度を求める。次に、式(9d)を考慮して、 V を減少させ、式(9b,c)の条件が満足されるよう得られた感度に従って各設計変数の新たな値を設定する。以下、構造解析、感度解析および設計変数値の変更を繰返し、一連の試行の後、制約条件を満足し構造重量を最も小さくする設計値を最適値として採用した。

鋼管の降伏応力度 $\sigma_y=2400\text{kgf/cm}^2$ 、ヤング係数 $E=2.1 \times 10^6\text{kgf/cm}^2$ 、 $\beta^L=0.025$ 、 $\beta^U=0.050$ とし、弾塑性許容変位 u_a を0.8cm、0.9cm

表-1 設計結果

u_a (cm)	d (cm)	t (cm)	θ (°)	V (cm ³)
0.80	14.8	0.37	29.6	7917
0.90	14.2	0.37	39.2	7862
0.91以上	14.4	0.36	40.1	7786

および0.91cm以上としたときの設計結果を表-1に示す。表-1から、許容変位が大きくなると構造体積が小さくなることがわかる。また、許容変位を0.91cm以上にすると許容変位の値に関わらず一定の設計が得られ、その設計は、弾塑性変位制約がアクティブでないことから、塑性最小重量設計であることがわかる。

5. 結 言

本研究で得られた成果を列挙すると以下のようである。

- (1) 曲げモーメントと軸力を受ける鋼管断面の非線形降伏条件に対して、逐次線形化手法を適用したホロノミック弾塑性解析基本式を、LCPとして定式化することができた。
- (2) 上記問題に対し、解の保証が得られている相補掃出法を用いた解法を示した。
- (3) 本解析法を鋼管製両端固定円弧アーチの数値計算に適用して、弾塑性変形量を効率的に算定できることを確認した。また、本解析法が弾性限界状態から崩壊状態に至る弾塑性変形状態に対し、適用可能であることを認めた。
- (4) さらに、弾塑性変位制約を考慮した最適弾塑性設計法を開発することができ、本設計法が鋼管製両端固定円弧アーチに対しても有用であることを数値的に確認した。

謝 辞

本研究について、カナダWaterloo大学のGrierson教授の有益な御助言を得た。また、数値計算の一部には、同学Cameron研究員の御助力を得た。ここに厚く謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 砂防・地すべりセンター鋼製砂防構造物委員会：鋼製砂防構造物に設計便覧，p.59，昭和62年版
- 2) 大久保禎二，藤脇敏夫：最小コンプリメンタリーエネルギー原理による連続ばりの材料非線形解析，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第12巻，pp.127～132，1988.7.
- 3) 三原徹治，北小路雅倫，石川信隆，太田俊昭：相補掃出法を用いた立体骨組構造のホロノミック弾塑性解析，構造工学論文集，Vol.35A，pp.383～392，1989.3.
- 4) 今野浩，山下浩：非線形計画法，日科技連，pp.299～306，1978.3.
- 5) 石川信隆，三原徹治，香月智：最適化手法による骨組構造物の弾塑性解析に関する一考察，土木学会第37回年次学術講演会講演概要集第1部，pp.33～34，1982.10.
- 6) De Donato, O.: Fundamentals of Elastic-Plastic Analysis, Engineering Plasticity by Mathematical Programming, edited by Cohn, M.Z. and Maier, G., Pergamon Press, pp.325～350, 1979.
- 7) 日本建築学会：鋼構造塑性設計指針，P.51，1965.11.
- 8) 北小路雅倫，三原徹治，石川信隆：最適化手法を用いた組合せ応力を受ける構造物のホロノミック弾塑性解析，土木学会第41回年次学術講演会講演概要集第1部，pp.261～262，1986.11.
- 9) 石川信隆，香月智，三原徹治，古川浩平：降伏部材選択方式によるトラス構造の最適弾塑性設計法に関する一考察，土木学会論文集，第350号/I-2，pp.321～329，1984.10.
- 10) 三原徹治，北小路雅倫，石川信隆，太田俊昭：感度解析を用いたトラス構造物の最適弾塑性設計法とその応用例，土木学会論文集，第392号/I-9，pp.249～258，1988.4.
- 11) 三原徹治：逐次線形化降伏条件を用いた塑性解析基本式，昭和63年度土木学会西部支部研究発表会講演概要集，1989.3.