

(51) 押し・剥離を考慮したアーチ合成梁の実用基本式について

原田 晶利

正会員 ケンテック株式会社 技術部 (〒101-0031 東京都千代田区東神田2丁目1番地-8号)
E-mail: m-harada@kentec-web.co.jp

鉄筋コンクリート梁とH形鋼や鋼製デッキプレート、鉄筋トラス付鋼製デッキプレートとが結合された様な合成梁で、各々の梁の支持状態を自由に表現するにはズレ剛性のみならず押し・剥離剛性を考慮しなければならない。梁が曲率を持つ場合、曲率があることで剪断力と軸力が互いに独立で無いのと同様、結合部分のズレ応力・押し剥離応力も互いに独立では無い。本論文は合成平面円弧アーチ梁で結合部分のズレ剛性・押し剥離剛性を考慮し、結合される各々の梁の支持状態を自由に扱える基本式を作成したものである。基本式は合成作用による対軸力 T を不静定力とすると、直線合成梁の場合と同様、 T は張り角 ϕ に対する6階の微分方程式となる。

Key Words : composite circular arch beam, basical equation, coupled axial force, split-off action, border differential equation

1. はじめに

一般に合成梁は完全合成として扱われる。しかし鉄筋コンクリートスラブとH形鋼や鋼製デッキプレートとの合成梁・合成スラブではH形鋼やデッキプレートはあるスパンで支持されるのに対し、鉄筋コンクリートスラブは連続しているので各々の支持条件が異なる場合が殆どである。また結合手段として多用されている頭つきスタッドや合成スラブ用デッキプレートの突起、材軸方向の小溝にしても実際はある程度のズレが生ずるので完全合成では無い場合が殆どである。不完全直線合成梁の基本式は結合されている各々の梁の撓みは同じであるとし、結合部分のズレ剛性のみを考慮して導かれた合成作用による対軸力 T の2階微分方程式が多様されている。これは簡便で便利な式である。また梁が曲率を持つ場合は曲率を介して梁の軸力と剪断力が互いに独立ではないので、 T を材軸方向(張り角)に積分した $\int T d\phi$ の4階の微分方程式になる¹⁾。これらの基本式は結合されている各々の梁の支持状態を自由に扱うためには難があるのも事実である。従って結合される各々の梁の支持条件を扱える基本式が欲しい。文献2では結合部分のズレ剛性と押し・剥離剛性を考慮することで、結合している各々の梁の支持状態を自由に扱える直線合成梁の基本式が作成されている。本論文は梁が曲率を持つ円弧アーチ梁で各々

の梁の支持状態を自由に扱える合成円弧アーチ梁の基本式を作成したものである。基本式は文献2の直線合成梁の場合と同様、合成作用による対軸力 T に関する6階の微分方程式になる。

2. 構造モデル

図1に2つの円弧アーチ梁が結合された構造モデルを示す。

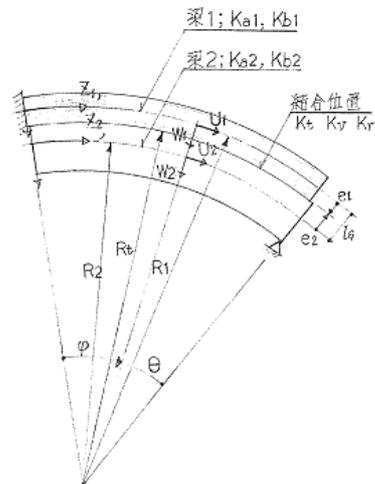


図1 構造モデル

2つの梁の図心間距離を l_G とする。各々の梁はその図心から e_1, e_2 の位置で結合されている。各々の梁の軸、曲げ剛性を $K_{a1}, K_{b1}, K_{a2}, K_{b2}$ 、材軸、法線方向の変位を U_1, W_1, U_2, W_2 とする。 R_1, R_2, R_t は梁1, 梁2, 結合位置の曲率半径である。

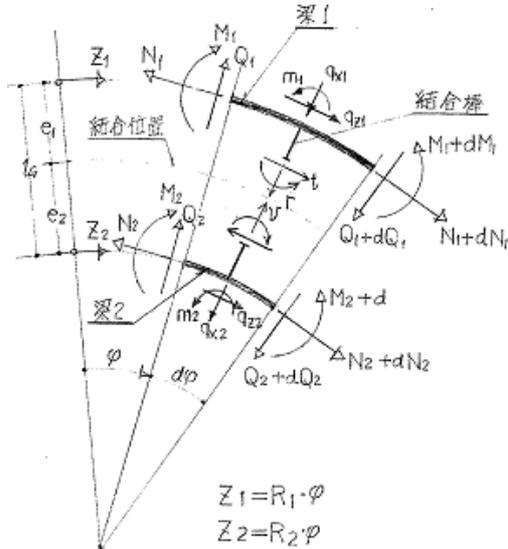


図2 梁1, 梁2, 結合部分の応力, 分布荷重

図2に梁1, 梁2および結合部分に作用する応力を示す。 $M_1, M_2, N_1, N_2, Q_1, Q_2$ は曲げモーメント, 軸力, 剪断力である。 t, v は結合部分に作用するズレ応力, 剥離応力である。 R_1, R_2 は梁1, 梁2の図心に対する曲率半径である。各々の梁の図心位置に材軸, 法線方向の分布荷重, 分布モーメントは $q_z, q_{x1}, m_1, q_{z2}, q_{x2}, m_2$ が作用している。

3. 外力による軸力、剪断力、曲げモーメント

梁1, 梁2が結合されている合成梁に作用する外力は釣り合っていないなければならない。図3に合成円弧アーチ梁に作用する外力を示す。

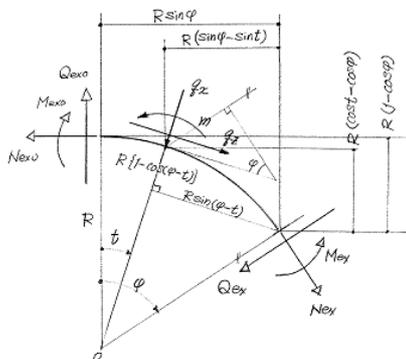


図3 外力による軸力、剪断力、曲げモーメント

外力 $M_{exo}, N_{exo}, Q_{exo}$ は(1)式から(3)式で与えられる。

$$N_{ex}(\phi) = N_{exo} \cos(\phi) + Q_{exo} \sin(\phi) + N_{ex.e}(q_{x1} q_{z1} m_1) \quad (1)$$

$$Q_{ex}(\phi) = -N_{exo} \sin(\phi) + Q_{exo} \cos(\phi) + Q_{ex.e}(q_{x1} q_{z1} m_1) \quad (2)$$

$$M_{ex}(\phi) = M_{exo} - N_{exo} R_G (1 - \cos(\phi)) + Q_{exo} R_G \sin(\phi) + M_{ex.e}(q_{x1} q_{z1} m_1) \quad (3)$$

ここで、

$$q_x = q_{x1} + q_{x2}, \quad q_z = q_{z1} + q_{z2}, \quad m = m_1 + m_2$$

また分布荷重による外力の釣合から $M_{ex.e}, N_{ex.e}, Q_{ex.e}$ は(4)式から(6)式を満たさなければならない。

$$\left(\frac{d^2}{d\phi^2} + 1\right) N_{ex.e} = -R_G \left(\frac{dq_z}{d\phi} + q_x\right) \quad (4)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\phi^2} + 1\right) Q_{ex.e} = -R_G \left(\frac{dq_x}{d\phi} - q_z\right) \quad (5)$$

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{d^2}{d\phi^2} + 1\right) M_{ex.e} = -R_G^2 \left(\frac{dq_x}{d\phi} - q_z\right) - \left(\frac{d^2 m_1}{d\phi^2} + m_1\right) \quad (6)$$

$M_{exo}, N_{exo}, Q_{exo}$ は未知量である。

4. 助変数

以下に示す助変数を使用して基本式を作成する。

$$R_1 = R_t + e_1, \quad \bar{K}_{a1} = K_{a1} / R_1, \quad \bar{K}_{b1} = K_{b1} / R_1^2$$

$$R_2 = R_t + e_2, \quad \bar{K}_{a2} = K_{a2} / R_2, \quad \bar{K}_{b2} = K_{b2} / R_2^2$$

$$\bar{K}_v = K_v \cdot R_t, \quad \bar{K}_t = K_t \cdot R_t, \quad l_G = e_1 + e_2$$

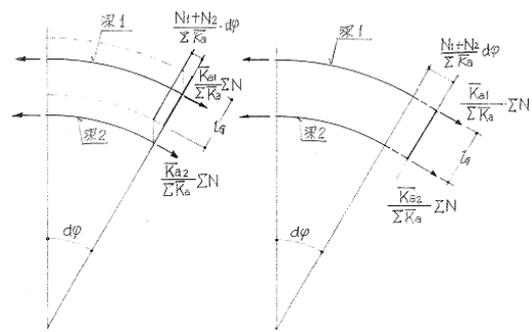
$$\bar{K} = \frac{K_{a1} \cdot K_{a2}}{K_{a1} + K_{a2}}$$

$$\bar{K}_a = \frac{\bar{K}_{a1} \cdot \bar{K}_{a2}}{\bar{K}_{a1} + \bar{K}_{a2}}, \quad \Sigma \bar{K}_a = \bar{K}_{a1} + \bar{K}_{a2}$$

$$\bar{K}_b = \frac{\bar{K}_{b1} \cdot \bar{K}_{b2}}{\bar{K}_{b1} + \bar{K}_{b2}}, \quad \Sigma \bar{K}_b = \bar{K}_{b1} + \bar{K}_{b2}$$

5. 軸力 N_1, N_2

軸力 N_1, N_2 は図4(b)に示されている様に各々の梁の材軸方向の変位が等しくなる成分と対軸力 T で表される。



(a) (b)

図4 軸力

各々の梁の材軸方向の変位が等しくなる成分により材軸は伸びるので、図4 (a) の破線で示されている様に曲率半径は大きくなる。これより軸力 N_1 , N_2 に関して (7) 式 (8) 式が得られる。

$$N_1 = \frac{\bar{K}_{a1}}{\Sigma \bar{K}_a} \Sigma N + \frac{\bar{K}_{a2} N_1 - \bar{K}_{a1} N_2}{\Sigma \bar{K}_a} = \frac{\bar{K}_{a1}}{\Sigma \bar{K}_a} N_{ex} + T \quad (7)$$

$$N_2 = \frac{\bar{K}_{a2}}{\Sigma \bar{K}_a} \Sigma N - \frac{\bar{K}_{a2} N_1 - \bar{K}_{a1} N_2}{\Sigma \bar{K}_a} = \frac{\bar{K}_{a2}}{\Sigma \bar{K}_a} N_{ex} - T \quad (8)$$

ここで、

$$\Sigma N = N_1 + N_2 = N_{ex}$$

対軸力 T と N_1, N_2 の関係は (9) 式となる。

$$T = \frac{\bar{K}_{a2} N_1 - \bar{K}_{a1} N_2}{\Sigma \bar{K}_a} = \bar{K}_a \left(\frac{N_1}{\bar{K}_{a1}} - \frac{N_2}{\bar{K}_{a2}} \right) \quad (9)$$

6. 曲げモーメント M_1, M_2

曲げモーメント M_1, M_2 は図5に示されている様に梁1, 梁2に同じ曲率変化を与える成分と逆向きの曲率変化を与える成分 M_v で表される。

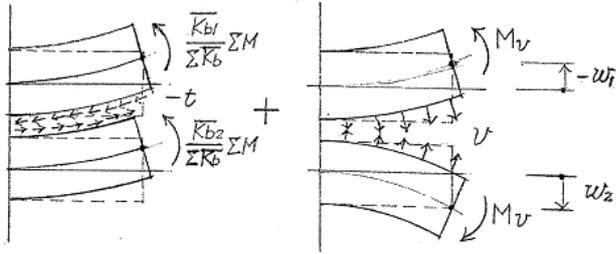


図5 曲げモーメント

同じ曲率変化を与える成分で結合部分にズレ応力 t が生じ、逆向きの曲率変化を与える成分で押し・剥離応力 v が生ずる。これより曲げモーメント M_1, M_2 に対して (10) 式, (11) 式が得られる。

$$M_1 = \frac{\bar{K}_{b1}}{\Sigma \bar{K}_b} \Sigma M + \frac{\bar{K}_{b2} M_1 - \bar{K}_{b1} M_2}{\Sigma \bar{K}_b} = \frac{\bar{K}_{b1}}{\Sigma \bar{K}_b} \Sigma M + M_v \quad (10)$$

$$M_2 = \frac{\bar{K}_{b2}}{\Sigma \bar{K}_b} \Sigma M - \frac{\bar{K}_{b2} M_1 - \bar{K}_{b1} M_2}{\Sigma \bar{K}_b} = \frac{\bar{K}_{b2}}{\Sigma \bar{K}_b} \Sigma M + M_v \quad (11)$$

ここで、

$$M_1 + M_2 = M_{ex} + T \ell_G$$

M_v は (12) 式で計算される。

$$M_v = \bar{K}_b \left(\frac{M_1}{\bar{K}_{b1}} - \frac{M_2}{\bar{K}_{b2}} \right) = \frac{\bar{K}_b}{\bar{K}_v} \Delta v R_t \quad (12)$$

ここで、

$$\Delta = \frac{d^2}{d\phi^2} + 1$$

また円弧梁の曲げモーメント M と曲率 $1/\rho$, 法線方向変位 w と曲率 $1/\rho$ の関係

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = \frac{M_1}{\bar{K}_{b1}} - \frac{M_2}{\bar{K}_{b2}} = -\Delta (w_1 - w_2) R_t = -\frac{\Delta v R_t}{\bar{K}_v}$$

$$\frac{M_1}{\bar{K}_{b1}} - \frac{M_2}{\bar{K}_{b2}} = \frac{\Delta v R_t}{\bar{K}_v}$$

から、 M_1, M_2 は Δ, T で表される。

$$M_1 = \frac{\bar{K}_b}{\bar{K}_v} \Delta v R_t + \frac{\bar{K}_{b1}}{\Sigma \bar{K}_b} (M_{ex} + T \ell_G) \quad (13)$$

$$M_2 = -\frac{\bar{K}_b}{\bar{K}_v} \Delta v R_t + \frac{\bar{K}_{b2}}{\Sigma \bar{K}_b} (M_{ex} + T \ell_G) \quad (14)$$

6. 梁1, 梁2の釣合い式

円弧梁1, 2の釣り合い式は

$$\frac{dN_1}{d\phi} - Q_1 + t R_t + q_{z1} R_1 = 0 \quad (15a)$$

$$\frac{dN_2}{d\phi} - Q_2 - t R_t + q_{z2} R_2 = 0 \quad (15b)$$

$$\frac{dQ_1}{d\phi} + N_1 + v R_t + q_{x1} R_1 = 0 \quad (16a)$$

$$\frac{dQ_2}{d\phi} + N_2 - v R_t + q_{x2} R_2 = 0 \quad (16b)$$

$$\frac{dM_1}{d\phi} - Q_1 R_1 + t R_t e_1 + m_1 = 0 \quad (17a)$$

$$\frac{dM_2}{d\phi} - Q_2 R_2 + t R_t e_2 + m_2 = 0 \quad (17b)$$

7. $t R_t = t R_t (M_v, T)$

釣合い式 (15a) 式から (17b) 式と (10) 式, (11) 式を使い若干の演算により結合位置の単位材軸長さ当りのズレ応力 $t R_t$ を計算すると (18) 式となる。

$$t R_t = F_T T^{(1)} + \frac{1}{R_t} M_v^{(1)} + F_M M_{ex}^{(1)} + F_{qz} \tilde{q}_z \quad (18)$$

ここで、

$$F_T = -\frac{\bar{K}_a}{R_t \bar{K}_a} \left\{ \frac{\bar{K}_{b1}}{\Sigma \bar{K}_b} \left(\frac{\bar{K}_{b1}}{R_1 \bar{K}_{a1}} - \frac{\bar{K}_{b2}}{R_2 \bar{K}_{a2}} \right) \right\}$$

$$F_M = \frac{\bar{K}_a}{R_t \bar{K}_a} \frac{1}{\Sigma \bar{K}_b} \left(\frac{\bar{K}_{b1}}{R_1 \bar{K}_{a1}} - \frac{\bar{K}_{b2}}{R_2 \bar{K}_{a2}} \right)$$

$$F_{qz} = -\frac{\bar{K}_a}{R_t}$$

$$\tilde{q}_z = \frac{q_{z1} R_1 - m_1}{\bar{K}_{a1}} - \frac{q_{z2} R_2 - m_2}{\bar{K}_{a1}}$$

7. $v R_t = v R_t (M_v, T)$

釣合い式 (15a) 式から (17b) 式と (10) 式, (11) 式を使い若干の演算により結合位置の単位材軸長さ当り

のズレ応力 vR_t を計算すると (19) 式となる。

$$vR_t = -T + G_T T^{(2)} - \frac{1}{R_t} M_v^{(2)} + G_M M_{ex}^{(2)} + G_N N_{ex} + G_q \tilde{q}_x + G_{qz} \tilde{q}_z^{(1)} \quad (19)$$

ここで、

$$G_T = \frac{\bar{K}_b \ell_G^2}{R_1 R_2 \Sigma \bar{K}_b} + F_T \left\{ \frac{1}{\bar{K}_b} - \frac{R_t (R_1 \bar{K}_{b1} + R_2 \bar{K}_{b2})}{R_1 R_2 \bar{K}_{b1} \bar{K}_{b2}} \right\}$$

$$G_M = \frac{\bar{K}_b \ell_G}{R_1 R_2 \Sigma \bar{K}_b} + F_M \left\{ \frac{1}{\bar{K}_b} - \frac{R_t (R_1 \bar{K}_{b1} + R_2 \bar{K}_{b2})}{R_1 R_2 \bar{K}_{b1} \bar{K}_{b2}} \right\}$$

$$G_N = \frac{1}{\bar{K}_a} \left(\frac{\bar{K}_{a1}}{\bar{K}_{b1}} - \frac{\bar{K}_{a2}}{\bar{K}_{b2}} \right)$$

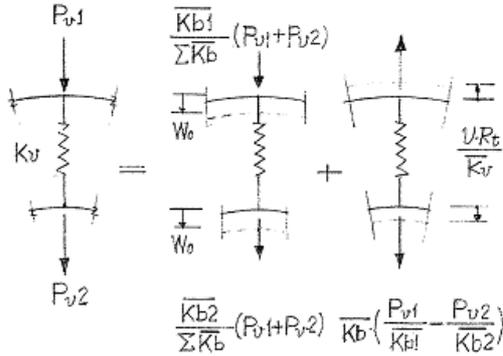
$$G_{qx} = -\bar{K}_b$$

$$G_{qz} = \frac{R_t}{\bar{K}_a} \left(\frac{1}{\bar{K}_b} - \frac{R_1 \bar{K}_{b1} + R_2 \bar{K}_{b2}}{R_1 R_2 \bar{K}_{b1} \bar{K}_{b2}} \right)$$

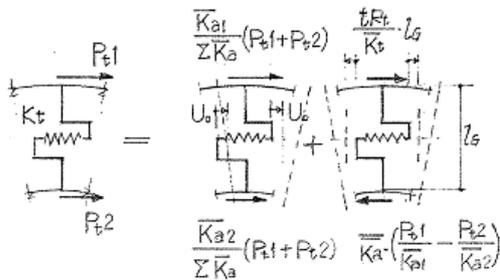
$$\tilde{q}_x = \frac{q_{x1} R_1 + m_1^{(1)}}{\bar{K}_{b1}} - \frac{q_{x2} R_2 + m_2^{(1)}}{\bar{K}_{b2}}$$

8. 結合バネの応力 tR_t , vR_t と梁1, 梁2の軸力 N_1 , N_2 と剪断力 Q_1 , Q_2 との関係

結合部分のズレ応力、押し・剥離応力は図6に示す様に結合部分の押し・剥離バネ、ズレバネで生ずると考える。



(a) 押し・剥離バネ



(b) ズレバネ

図6 ズレ応力、押し・剥離応力

ズレバネ、押し・剥離バネに生ずる応力は梁1, 梁2の単位材軸長さ当りの法線、接線方向の力と釣合う。

図6を参照し梁1, 梁2の釣合い式を使い tR_t , vR_t を梁1, 梁2の軸力 N_b , N_2 と剪断力 Q_b , Q_2 で表すと (20) 式 (21) 式となる。

$$tR_t = -\bar{K}_a \left(\frac{p_{t1}}{\bar{K}_{a1}} - \frac{p_{t2}}{\bar{K}_{a2}} \right) \quad (20)$$

ここで、

$$p_{t1} = \frac{dN_1}{d\phi} - Q_1 + q_{z1} R_1$$

$$p_{t3} = \frac{dN_2}{d\phi} - Q_2 + q_{z2} R_2$$

$$vR_t = -\bar{K}_b \left(\frac{p_{v1}}{\bar{K}_{b1}} - \frac{p_{v2}}{\bar{K}_{b2}} \right) \quad (21)$$

ここで、

$$p_{v1} = N_1 + \frac{dQ_1}{d\phi} + q_{x1} R_1$$

$$p_{v2} = N_2 + \frac{dQ_2}{d\phi} + q_{x2} R_2$$

9. 不静定力 T , M_v と曲げモーメント, 軸力

不静定力を合成作用による対軸力 T と押し剥離応力により梁1, 梁2に生ずる逆向きの対曲げモーメント M_v とすると、ズレ応力、押し・剥離応力、曲げモーメント、軸力は (22) 式から (26) 式で T , M_v で表される。

$$tR_t = F_T \cdot T^{(1)} + \frac{1}{R_t} M_v^{(1)} + F_M \cdot M_{ex}^{(1)} + F_{qz} \tilde{q}_z \quad (22)$$

$$vR_t = -T + G_T \cdot T^{(2)} - \frac{1}{R_t} M_v^{(2)} + G_M \cdot M_{ex}^{(2)} + G_N \cdot N_{ex} + F_{qx} \tilde{q}_x + G_{qz} \tilde{q}_z^{(1)} \quad (23)$$

$$M_1 = M_v + \frac{\bar{K}_{b1}}{\Sigma \bar{K}_{b1}} (M_{ex} + T \ell_G) \quad (24)$$

$$M_2 = -M_v + \frac{\bar{K}_{b2}}{\Sigma \bar{K}_{b2}} (M_{ex} + T \ell_G) \quad (25)$$

$$N_1 = \frac{\bar{K}_{a1}}{\Sigma \bar{K}_a} N_{ex} + T \quad (26)$$

$$N_2 = \frac{\bar{K}_{a2}}{\Sigma \bar{K}_a} N_{ex} + T \quad (27)$$

9. 係数

基本式を作成するに際し梁1, 梁2, 結合部分の剛性, 曲率半径等, 合成円弧アーチ梁の形状, 断面性能値から構成される以下の係数を導入する。

$$F_0 = \frac{R_t \bar{K}_a}{\bar{K}}, \quad F_A = \frac{1}{R_t}, \quad F_{qz} = -\frac{\bar{K}_a}{R_t}$$

$$F_T = -\frac{\bar{K}_a}{R_t \bar{K}_a} \left\{ 1 - \frac{\bar{K}_a \ell_G}{\Sigma \bar{K}_b} \left(\frac{\bar{K}_{b1}}{R_1 \bar{K}_{a1}} - \frac{\bar{K}_{b2}}{R_2 \bar{K}_{a2}} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
F_M &= \frac{\tilde{K}_a}{R_t \bar{K}_a \Sigma \bar{K}_b} \left(\frac{\bar{K}_{b1}}{R_1 \bar{K}_{a1}} - \frac{\bar{K}_{b2}}{R_2 \bar{K}_{a2}} \right) \\
G_{\Delta} &= -\frac{1}{R_t}, \quad G_T = \frac{\bar{K}_b \ell_G^2}{R_1 R_2 \Sigma \bar{K}_b} + F_T \left(\frac{1}{\bar{K}_b} - R_t \cdot \frac{1}{\bar{K}_b R} \right) \\
G_M &= \frac{\bar{K}_b \ell_G}{R_1 R_2 \Sigma \bar{K}_b} + F_T \left(\frac{1}{\bar{K}_b} - R_t \cdot \frac{1}{\bar{K}_b R} \right) \\
G_N &= -\bar{K}_b \left(\frac{\bar{K}_{a1}}{\bar{K}_{b1}} - \frac{\bar{K}_{a2}}{\bar{K}_{b2}} \right) \\
G_{qx} &= -\bar{K}_b, \quad G_{qz} = \frac{R_t}{\bar{K}_a} \left(\frac{1}{\bar{K}_b} - R_t \cdot \frac{1}{\bar{K}_b R} \right)
\end{aligned}$$

10. 基本式

図2 に示されている合成円弧アーチ梁の系の補足仕事を T, M_v で変分して不静定力 T, M_v に関する微分方程式 (基本式) を導く。補足仕事は (28) 式で計算される。

$$U_c = U_{ct} + U_{cv} + U_{cM} + U_{cN} \quad (28)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
U_{ct} &= \frac{1}{2} \int \frac{(t R_t)^2}{\bar{K}_t} d\phi, \quad U_{cv} = \frac{1}{2} \int \frac{(v R_t)^2}{\bar{K}_v} d\phi \\
U_{cN} &= \frac{1}{2} \int \frac{N_1^2}{\bar{K}_{a1}} d\phi + \frac{1}{2} \int \frac{N_2^2}{\bar{K}_{a2}} d\phi \\
U_{cM} &= \frac{1}{2} \int \frac{M_1^2}{R_1 \bar{K}_{b1}} d\phi + \frac{1}{2} \int \frac{M_2^2}{R_2 \bar{K}_{b2}} d\phi \\
U_{ct} &= \frac{1}{2 \bar{K}_t} \int \left(F_T \cdot T^{(1)} + \frac{1}{R_t} M_v^{(1)} + F_M \cdot M_{ex}^{(1)} + F_{qz} \cdot \tilde{q}_z \right)^2 d\phi \\
U_{cv} &= \frac{1}{2 \bar{K}_v} \int \left(-T + G_T \cdot T^{(2)} - \frac{1}{R_t} M_v^{(2)} + G_M \cdot M_{ex}^{(2)} \right. \\
&\quad \left. + G_N \cdot N_{ex} + F_{qx} \cdot \tilde{q}_x + G_{qx} \cdot \tilde{q}_z \right)^2 d\phi \\
U_{cM} &= \frac{1}{2 R_1 \bar{K}_{b1}} \int \left\{ M_v + \frac{\bar{K}_{b1}}{\Sigma \bar{K}_b} (M_{ex} + T \ell_G) \right\}^2 d\phi \\
&\quad + \frac{1}{2 R_2 \bar{K}_{b2}} \int \left\{ M_v + \frac{\bar{K}_{b2}}{\Sigma \bar{K}_b} (M_{ex} + T \ell_G) \right\}^2 d\phi \\
U_{cN} &= \frac{1}{2 \bar{K}_{a1}} \int \left(\frac{\bar{K}_{a1}}{\Sigma \bar{K}_a} N_{ex} + T \right)^2 d\phi \\
&\quad + \frac{1}{2 \bar{K}_{a2}} \int \left(\frac{\bar{K}_{a2}}{\Sigma \bar{K}_a} N_{ex} - T \right)^2 d\phi
\end{aligned}$$

U_c を T, M_v で変分して基本式 (29) 式, (30) 式を得る。

$\delta U_c / \delta T$ から

$$\begin{aligned}
&-G_T \cdot M_v^{(4)} + \left(-\frac{1}{\bar{K}_v R_t} + \frac{F_T}{\bar{K}_t R_t} \right) M_v^{(2)} - \frac{\ell_G^2}{R_1 R_2} M_v + \frac{G_T^{(2)}}{\bar{K}_v} T^{(4)} \\
&- \left(\frac{2 G_T}{\bar{K}_v} + \frac{F_T^2}{\bar{K}_t} \right) T^{(2)} + \left\{ \frac{1}{\bar{K}_a} + \frac{1}{\bar{K}_v} + \left(\frac{\bar{K}_{b1}}{R_1} + \frac{\bar{K}_{b2}}{R_2} \right) \frac{\ell_G^2}{(\Sigma \bar{K}_b)^2} \right\} T \\
&+ \frac{G_T G_M}{\bar{K}_v} M_{ex}^{(4)} - \left(\frac{G_M}{\bar{K}_v} + \frac{F_T F_M}{\bar{K}_t} \right) M_{ex}^{(2)} + \frac{\ell_G}{(\Sigma \bar{K}_b)^2} \left(\frac{\bar{K}_{b1}}{R_1} + \frac{\bar{K}_{b2}}{R_2} \right) M_{ex} \\
&+ \frac{G_T G_N}{\bar{K}_v} N_{ex}^{(2)} - \frac{G_N}{\bar{K}_v} N_{ex} + \frac{G_T G_{qx}}{\bar{K}_v} \tilde{q}^{(2)} - \frac{G_{qx}}{\bar{K}_v} \tilde{q}_x + \frac{G_T G_{qz}}{\bar{K}_v} \tilde{q}_z^{(3)} \\
&- \left(\frac{F_T F_{qz}}{\bar{K}_t} + \frac{G_{qz}}{\bar{K}_v} \right) \tilde{q}_z^{(1)} = 0 \quad (29)
\end{aligned}$$

$\delta U_c / \delta M_v$ から

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\bar{K}_v R_t^2} M_v^{(4)} - \frac{1}{\bar{K}_t R_t^2} M_v^{(2)} + \left(\frac{1}{R_1 \bar{K}_{b1}} + \frac{1}{R_2 \bar{K}_{b2}} \right) M_v - \frac{G_T}{\bar{K}_v R_t} T^{(4)} \\
&- \left(-\frac{1}{\bar{K}_v R_t} + \frac{1}{\bar{K}_t R_t} \right) T^{(2)} - \frac{\ell_G^2}{R_1 R_2 \Sigma \bar{K}_b} T - \frac{G_M}{\bar{K}_v R_t} M_{ex}^{(4)} - \frac{F_M}{\bar{K}_t R_t} M_{ex}^{(2)} \\
&- \frac{\ell_G}{R_1 R_2 \Sigma \bar{K}_b} M_{ex} - \frac{G_N}{\bar{K}_v R_t} N_{ex}^{(2)} - \frac{G_{qx}}{\bar{K}_v R_t} \tilde{q}_x^{(2)} - \frac{G_{qz}}{\bar{K}_v R_t} \tilde{q}_z^{(3)} \\
&- \frac{F_{qz}}{\bar{K}_t R_t} \tilde{q}_z = 0 \quad (30)
\end{aligned}$$

$\delta U_{cM} / \delta T$ から得られる (29) 式に M_v が含まれるので、直線合成梁の様に $\delta U_{cM} / \delta T$ のみから直接 v を T の関数として求めることは出来ない。

(29) 式と (30) 式から M_v を消去して T に関する6階の微分方程式が得られる。(22) 式と (23) 式から $v R_t$ が T の関数として得られる。

$$\begin{aligned}
&c_6 T^{(6)} + c_4 T^{(4)} + c_2 T^{(2)} + c_0 T \\
&= d_6 M_{ex}^{(6)} + d_4 M_{ex}^{(4)} + d_2 M_{ex}^{(2)} + d_0 M_{ex} \\
&+ e_4 N_{ex}^{(4)} + e_2 N_{ex}^{(2)} + e_0 N_{ex} + f_4 \tilde{q}_x^{(4)} + f_2 \tilde{q}_x^{(2)} + f_0 \tilde{q}_x \\
&+ g_5 \tilde{q}_z^{(5)} + g_3 \tilde{q}_z^{(3)} + g_1 \tilde{q}_z^{(1)} \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&v R_t^{(4)} + v R_t^{(2)} + \bar{K} \cdot v R_t \\
&= \frac{\bar{K}_v R_t}{\bar{K}_b} \left(G_T \cdot T^{(2)} - T + G_M \cdot M_{ex}^{(2)} + G_N \cdot N_{ex} \right. \\
&\quad \left. + G_{qx} \cdot \tilde{q}_x + G_{qz} \cdot \tilde{q}_z^{(1)} \right) \quad (32)
\end{aligned}$$

$\bar{K}_v \rightarrow \infty$ の場合 $v R_t$ は

$$v R_t = G_T \cdot T^{(2)} - T + G_M \cdot M_{ex}^{(2)} + G_N \cdot N_{ex} + G_{qx} \cdot \tilde{q}_x + G_{qz} \cdot \tilde{q}_z^{(1)} \quad (32a)$$

ここで,

$$c_6 = -\frac{1+F_T^2+G_T^2}{R_t^2 \bar{K}_v \bar{K}_t}$$

$$c_4 = \frac{G_T^2}{\bar{K}_v} \left(\frac{1}{R_1 \bar{K}_{b1}} + \frac{1}{R_2 \bar{K}_{b2}} \right) + \frac{1}{R_t^2 \bar{K}_v} \left\{ \frac{1}{\bar{K}_a} + \frac{1}{\bar{K}_v} + \frac{\ell_G^2}{(\Sigma \bar{K}_b)^2} \left(\frac{\bar{K}_{b1}}{R_1} + \frac{\bar{K}_{b2}}{R_2} \right) \right\} - \frac{2(G_T+F_T)}{R_t^2 \bar{K}_v \bar{K}_t} - \frac{1}{R_t^2 \bar{K}_v} - \frac{2G_T \ell_G^2}{R_1 R_2 R_t \bar{K}_v \Sigma \bar{K}_b}$$

$$c_2 = -\left(\frac{2G_T}{\bar{K}_v} + \frac{F_T^2}{\bar{K}_t} \right) \left(\frac{1}{R_1 \bar{K}_{b1}} + \frac{1}{R_2 \bar{K}_{b2}} \right) - \frac{1}{\bar{K}_t R_t^2} \left\{ \frac{1}{\bar{K}_a} + \frac{1}{\bar{K}_v} + \frac{\ell_G^2}{(\Sigma \bar{K}_b)^2} \left(\frac{\bar{K}_{b1}}{R_1} + \frac{\bar{K}_{b2}}{R_2} \right) \right\} - \frac{2\ell_G^2}{R_1 R_2 R_t \Sigma \bar{K}_b} \left(\frac{F_T}{\bar{K}_t} - \frac{1}{\bar{K}_v R_t} \right)$$

$$c_0 = \left(\frac{1}{R_1 \bar{K}_{b1}} + \frac{1}{R_2 \bar{K}_{b2}} \right) \left\{ \frac{1}{\bar{K}_a} + \frac{1}{\bar{K}_v} + \frac{\ell_G^2}{(\Sigma \bar{K}_b)^2} \left(\frac{\bar{K}_{b1}}{R_1} + \frac{\bar{K}_{b2}}{R_2} \right) \right\} - \frac{\ell_G^4}{R_1^2 R_2^2 (\Sigma \bar{K}_b)^2}$$

$$d_6 = \frac{G_T(F_M+G_M)+F_T \cdot F_M}{R_t^2 \bar{K}_v \bar{K}_t}$$

$$d_4 = -\frac{F_M+G_M}{R_t^2 \bar{K}_v \bar{K}_t} + \frac{\ell_G(G_T+G_M \ell_G)}{R_1 R_2 R_t \Sigma \bar{K}_b} - \frac{G_T G_M}{\bar{K}_v} \left(\frac{1}{R_1 \bar{K}_{b1}} + \frac{1}{R_2 \bar{K}_{b2}} \right) - \frac{\ell_G}{R_t^2 \bar{K}_v (\Sigma \bar{K}_b)^2} \left(\frac{\bar{K}_{b1}}{R_1} + \frac{\bar{K}_{b2}}{R_2} \right)$$

$$d_2 = \frac{\ell_G}{R_1 R_2 R_t \Sigma \bar{K}_b} \left(-\frac{1}{\bar{K}_v} + \frac{F_T+F_M \ell_G}{\bar{K}_t} \right) + \left(\frac{G_M}{\bar{K}_v} + \frac{F_T F_M}{\bar{K}_t} \right) \left(\frac{1}{R_1 \bar{K}_{b1}} + \frac{1}{R_2 \bar{K}_{b2}} \right) + \frac{\ell_G}{R_t^2 \bar{K}_v (\Sigma \bar{K}_b)^2} \left(\frac{\bar{K}_{b1}}{R_1} + \frac{\bar{K}_{b2}}{R_2} \right)$$

$$d_0 = \frac{\ell_G}{(\Sigma \bar{K}_b)^2} \left\{ \frac{\ell_G^2}{R_1^2 R_2^2} - \left(\frac{1}{R_1 \bar{K}_{b1}} + \frac{1}{R_2 \bar{K}_{b2}} \right) \left(\frac{\bar{K}_{b1}}{R_1} + \frac{\bar{K}_{b2}}{R_2} \right) \right\}$$

$$e_4 = \frac{G_N(1+G_T)}{R_t^2 \bar{K}_v \bar{K}_t}$$

$$e_2 = \frac{G_N}{\bar{K}_v R_t} \left(\frac{\ell_G^2}{R_1 R_2 \Sigma \bar{K}_b} - \frac{1}{\bar{K}_t R_t} \right) - \frac{G_N G_T}{\bar{K}_v} \left(\frac{1}{R_1 \bar{K}_{b1}} + \frac{1}{R_2 \bar{K}_{b2}} \right)$$

$$e_0 = \frac{G_N}{\bar{K}_v} \left(\frac{1}{R_1 \bar{K}_{b1}} + \frac{1}{R_2 \bar{K}_{b2}} \right)$$

$$f_4 = \frac{G_{qx}(1+G_T)}{\bar{K}_v \bar{K}_t R_t^2}$$

$$f_2 = \frac{G_{qx}}{\bar{K}_v} \left\{ -\left(\frac{1}{R_1 \bar{K}_{b1}} + \frac{1}{R_2 \bar{K}_{b2}} \right) - \frac{1}{\bar{K}_t R_t^2} + \frac{\ell_G^2}{R_1 R_2 R_t \Sigma \bar{K}_b} \right\}$$

$$f_0 = \frac{G_{qx}}{\bar{K}_v} \left(\frac{1}{R_1 \bar{K}_{b1}} + \frac{1}{R_2 \bar{K}_{b2}} \right)$$

$$g_5 = \frac{1+G_T G_{qz}+F_T F_{qz}}{\bar{K}_v \bar{K}_t R_t^2} + \frac{G_T F_{qz}}{\bar{K}_v^2 R_t^2}$$

$$g_3 = -\frac{G_T G_{qz}}{\bar{K}_v} \left(\frac{1}{R_1 \bar{K}_{b1}} + \frac{1}{R_2 \bar{K}_{b2}} \right) + \frac{F_{qz}-G_{qz}}{\bar{K}_v \bar{K}_t R_t^2} - \frac{F_{qz}}{\bar{K}_v^2 R_t^2} - \frac{F_T F_{qz}}{\bar{K}_t^2 R_t^2} + \frac{G_{qz} \ell_G^2}{R_1 R_2 R_t \bar{K}_v \Sigma \bar{K}_b}$$

$$g_1 = \left(\frac{F_T F_{qz}}{\bar{K}_t} + \frac{G_{qz}}{\bar{K}_v} \right) + \frac{F_{qz} \ell_G^2}{R_1 R_2 R_t \bar{K}_v \Sigma \bar{K}_b}$$

$$\tilde{q}_x = \frac{q_{x1} R_1 + m_1^{(1)}}{\bar{K}_{b1}} + \frac{q_{x2} R_2 + m_2^{(1)}}{\bar{K}_{b2}}$$

$$\tilde{q}_z = \frac{q_{z1} R_1 - m_1}{\bar{K}_{a1}} + \frac{q_{z2} R_2 - m_2}{\bar{K}_{a2}}$$

$$() = \frac{d}{d\phi}$$

11. 諸量

合成作用による対軸力 T , 押し・剥離応力 vR_t が求まれば諸量は (33) 式から (42) 式で計算される。

・梁1, 梁2の等しい撓み成分

$$\psi^{(2)} + \psi = -\frac{M_{ex} + T \cdot \ell_G}{\Sigma \bar{K}_b} \quad (33)$$

・曲げモーメント

$$M_1 = \frac{\bar{K}_b}{\bar{K}_v} \left(\frac{d^2}{d\phi^2} + 1 \right) vR_t + \frac{\bar{K}_{b1}}{\Sigma \bar{K}_b} (M_{ex} + T \cdot \ell_G) \quad (34a)$$

$$M_2 = -\frac{\bar{K}_b}{\bar{K}_v} \left(\frac{d^2}{d\phi^2} + 1 \right) vR_t + \frac{\bar{K}_{b1}}{\Sigma \bar{K}_b} (M_{ex} + T \cdot \ell_G) \quad (34b)$$

・軸力

$$N_1 = \frac{\bar{K}_{a1}}{\Sigma \bar{K}_a} N_{ex} + T \quad (35a)$$

$$N_2 = \frac{\bar{K}_{a1}}{\Sigma \bar{K}_a} N_{ex} - T \quad (35b)$$

・剪断力

$$Q_1 = \frac{1}{R_1} (M_1^{(1)} + tR_t + m_1) \quad (36a)$$

$$Q_2 = \frac{1}{R_2} (M_2^{(1)} + tR_t + m_2) \quad (36b)$$

・法線方向の変位（たわみ）

$$W_1 = \Psi - \frac{\bar{K}_{b2}}{\Sigma \bar{K}_b} \frac{vR_t}{\bar{K}_v} \quad (37a)$$

$$W_2 = \Psi + \frac{\bar{K}_{b1}}{\Sigma \bar{K}_b} \frac{vR_t}{\bar{K}_v} \quad (37b)$$

・傾斜

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{R_t} \left(\frac{dW_1}{d\phi} + \int_0^\phi W_1 d\phi \right) \\ &= \frac{1}{R_t} \left\{ \Psi^{(1)} + \int_0^\phi \Psi d\phi - \frac{\bar{K}_{b2}}{\bar{K}_v \Sigma \bar{K}_b} \left(vR_t^{(1)} + \int_0^\phi vR_t d\phi \right) \right\} \quad (38a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{1}{R_t} \left(\frac{dW_2}{d\phi} + \int_0^\phi W_2 d\phi \right) \\ &= \frac{1}{R_t} \left\{ \Psi^{(1)} + \int_0^\phi \Psi d\phi + \frac{\bar{K}_{b2}}{\bar{K}_v \Sigma \bar{K}_b} \left(vR_t^{(1)} + \int_0^\phi vR_t d\phi \right) \right\} \quad (38b) \end{aligned}$$

・材軸方向の変位

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{1}{\Sigma \bar{K}_a} \int_0^\phi N_{ex} d\phi + \frac{1}{\bar{K}_a} \int_0^\phi T d\phi + \int_0^\phi \Psi d\phi \\ &\quad + \frac{\bar{K}_{b2}}{\bar{K}_v \Sigma \bar{K}_b} \int_0^\phi vR_t d\phi + U_0 \quad (39a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{\Sigma \bar{K}_a} \int_0^\phi N_{ex} d\phi - \frac{1}{\bar{K}_a} \int_0^\phi T d\phi + \int_0^\phi \Psi d\phi \\ &\quad - \frac{\bar{K}_{b2}}{\bar{K}_v \Sigma \bar{K}_b} \int_0^\phi vR_t d\phi + U_0 \quad (39b) \end{aligned}$$

・押し・剥離応力による対曲げモーメント

$$M_v = \frac{\bar{K}_b}{\bar{K}_v} \left(\frac{d^2}{d\phi^2} + 1 \right) vR_t \quad (40)$$

・ズレ応力

$$tR_t = F_T \cdot T^{(1)} + \frac{1}{R_t} M_v^{(1)} + F_M \cdot M_{ex}^{(1)} + F_{qz} \cdot \tilde{q}_z \quad (41)$$

・ズレによる傾斜

$$\gamma = \frac{tR_t}{\bar{K}_t} \quad (42)$$

12. 未定係数

未定係数 β_1 から β_{12} は

$$\beta_1 \sim \beta_6; c_6 \cdot T^{(6)} + c_4 \cdot T^{(4)} + c_2 \cdot T^{(2)} + c_0 \cdot T = 0$$

$$\beta_7 = N_{ex0}, \beta_8 = Q_{ex0}, \beta_9 = M_{ex0}$$

$$\beta_{10}, \beta_{11}; \Psi^{(2)} + \Psi = 0$$

$$\beta_{12} = U_0$$

である。

13. 計算例

図7に示す曲率半径 400cm で、厚さ 16 cm、有効幅 240 cm の鉄筋コンクリート床スラブ(梁1) と鉄骨梁 H-400×200

×8×13(梁2)との合成円弧アーチ梁がスパン400 cm の中央に P=1000 N を受ける場合について計算する。支持状態は 梁1: 両端自由, 梁2: 一端支持, 他端固定。

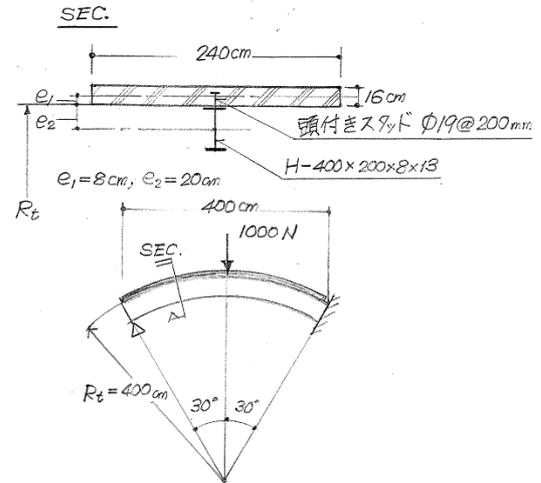


図8 計算例

諸元を以下に示す。

$$E_s = 2.05 \times 10^7 \text{ N/cm}^2, \quad E_c = 2.05 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$$

$$\text{梁1: } K_{a1} = 7.872 \times 10^9 \text{ N}, \quad K_{b1} = 1.679 \times 10^{11} \text{ Ncm}^2$$

$$\text{梁2: } K_{a1} = 1.709 \times 10^9 \text{ N}, \quad K_{b1} = 4.811 \times 10^{11} \text{ Ncm}^2$$

結合部: $\phi 19$ 頭付きスタッド @ 200 mm

$$K_t = 2.439 \times 10^4 \text{ N/cm}^2, \quad K_v = 8.511 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$$

$$e_1 = 8 \text{ cm}, \quad e_2 = 20 \text{ cm}$$

$$R_t = 400 \text{ cm}$$

図9に計算結果を示す。直線合成梁の場合²⁾と違い、曲率の影響が出ている。曲率半径を大きくして行くと直線合成梁の撓み、応力に近づくことは確認している。

14. 結論

結合部のズレ剛性に加え、押し・剥離剛性を考慮した合成円弧アーチ梁の基本式は直線合成梁の場合と同様、対軸力 T の6階の微分方程式となる。押し・剥離剛性を考慮したことで結合されている各々の梁の支持条件に応じた計算が出来る。

参考文献

- 1) 原田晶利: 合成曲線梁の実用基本式について, 構造工学論文集 Vol 42B (1996年3月)
- 2) 原田晶利: 17-押し・剥離剛性を考慮した合成梁の実用基本式について, 第10回複合・合成構造の活用に関するシンポジウム, 2013年11月21日から22日

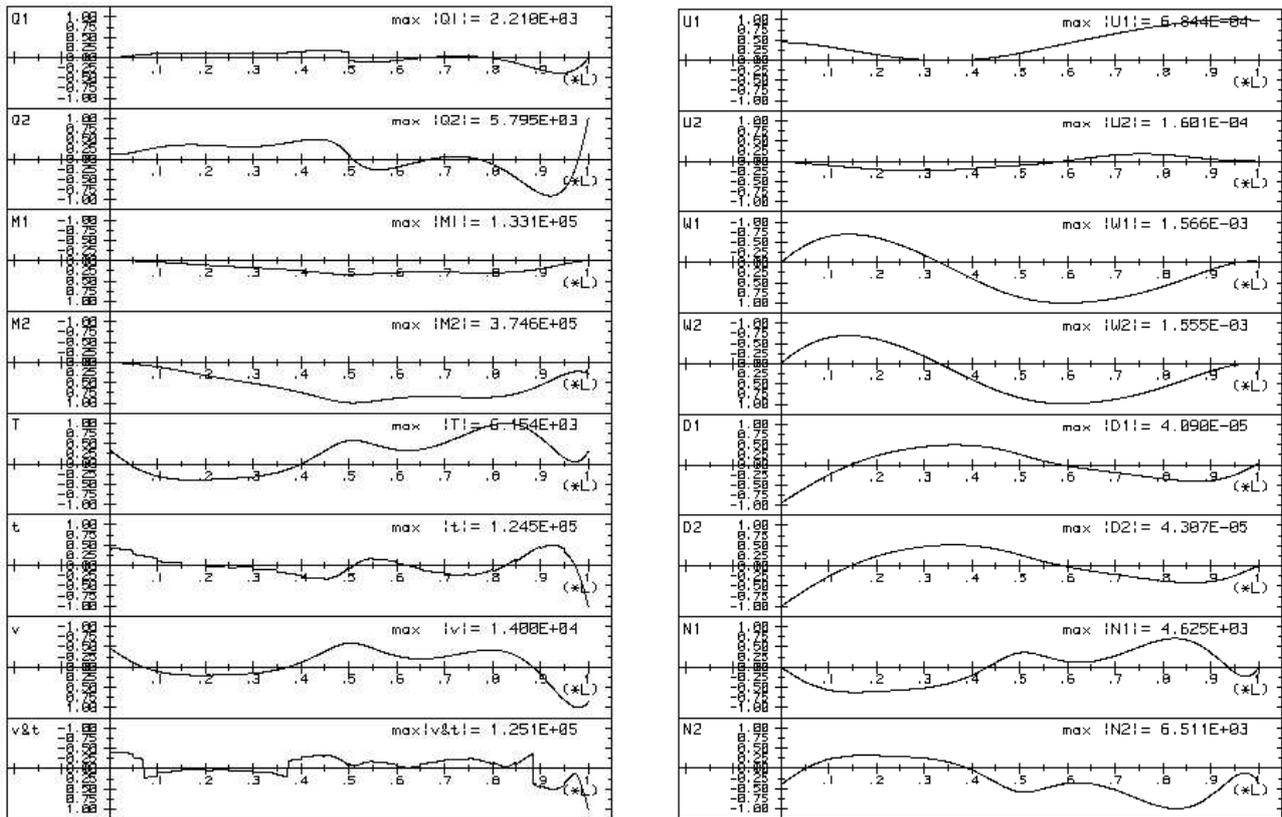


図9 計算結果

PRACTICAL FORMULA OF COMPOSITE CIRCULAR ARCH BEAM INCLUDED SPLIT_OFF ACTION

Masatoshi HARADA

The present paper is on the practical formula for the composite circular arch beam. Usual availed basic formula of the line composite beam is the 2 order differential equation for the coupled axial force by composite action, if the beam has curvature then the basic equation for the coupled axial force becomes 4 order. We can treat the real supporting conditions by introducing the split_off rigidity at the connected portion of the curved beam, this is realized in this paper. It is shown in this paper that the basic equation of the circular composite arch beam for the coupled axial force becomes 6 order differential equation.