

# (47) 軸圧縮を受ける繊維補強鋼製円筒殻の座屈に関する研究

山田聖志<sup>1</sup>・柳田将之<sup>2</sup>・Krishna Kumar Bhetwal<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 豊橋技術科学大学 建設工学系・教授 (〒441-8580 愛知県豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)  
E-mail: yamada@tutrp.tut.ac.jp

<sup>2</sup>学生会員 豊橋技術科学大学 大学院生 (〒441-8580 愛知県豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)  
E-mail: m063642@edu.imc.tut.ac.jp

本研究では、既設の鋼製貯蔵容器壁体の内外を、複合材料であるGFRP薄肉材で補修・補強したときの座屈耐力を定性・定量的に検討している。線形座屈解析、RS解析及び非線形座屈解析を実施し、まず、既往の等方性・積層円筒殻と同様に、殻厚レベルの形状初期不整振幅を仮定して得られる非線形座屈値の下限は、本RS解析値に良く一致することも明らかにしている。次に、殻厚レベルの比較的大きな初期不整に対しては、軸方向に長い波長の増分変位モードが卓越する傾向にあり、初期不整が小さい場合の座屈モードが軸方向により高次モードであることと大きく異なること、本研究で対象とした積層構成の中には、線形座屈値は35°、RS値は90°で最適となる場合が少なくないこと等を明らかにしている。

**Key Words :** *reduced stiffness method, cylinders, buckling, fiber orientation angle, axial compression*

## 1. 緒 論

既設の鋼製貯蔵容器のような薄肉円筒状構造物の長寿命化と耐震性能の向上が課題となっている。その際、座屈耐力が初期不整に敏感であることから、座屈設計上、合理的で論理的な設計耐力の評価が重要となる。本論文では、設計用の弾性座屈耐力評価を簡便に得る方法として、*reduced stiffness method* (以下、RS法)を採用する。RS法<sup>1,2)</sup>は、「薄肉殻があるモードで座屈すると想定したときの弾性座屈下限は正值で安定化に寄与する面内剛性成分(増分面内歪エネルギー成分)を削除した解析で求められる」という概念を採用する座屈解析法のことである。この理論の基本となる「削除する面内剛性成分」の減少・損失の定量的検証は、既に1985年以降、主として円筒殻を対象として行なわれている<sup>1,3,6)</sup>。

近年では、異方性材料を対象とした積層円筒殻の研究も公表されるようになってきている。積層材料を用いた異方性円筒殻の座屈問題では、繊維の配向角を変化させると、座屈値が大きく変化することが報告されており、航空宇宙分野では特に注目を集めている<sup>7)</sup>。中でも、繊維配向角を変数とした最適解<sup>7)</sup>を、初期不整を考慮しない線形座屈解析で評価しようとする研究や、得られた最適解に対して、初期不整の影響の程度を分析しようとする研究も実施されてきている。また、文献8)では、積層

構成を中立面に対して非対称とした時の座屈性状も検討をされるようになり、積層の非対称化に伴って派生する(面内と曲げの)増分連成歪エネルギー成分を含めたエネルギー分析を行うと共に、非対称積層円筒殻へのRS法の適用性、並びに、繊維配向角がその座屈荷重に与える影響等についても論じられてきている。

本研究では、これまでの研究成果を踏まえ、鋼製円筒殻を厚さ方向の内面・外面の両方にGFRPを積層補強した場合について、まず、従来の線形座屈解析、RS解析、更には形状初期不整を考慮した幾何学的非線形座屈解析を実施し、実設計の観点から、RS法による耐力評価法が有用であることを明らかにする。次に、形状初期不整と補強材の繊維配向角が、座屈モードや座屈荷重に与える影響を明らかにする。尚、本研究では、古典積層理論を用いて単純化した解析法を採用しているため、鋼板とGFRPは剛に接着されているとして扱い、両者の界面でのシアラグや剥離損傷についての影響は考慮していない。

## 2. 解析方法

図-1に示すような長さ $L$ 、曲率半径 $R$ 、殻厚 $t$ の円筒殻が、軸圧縮荷重 $P$ を受ける場合を考える。円筒座標系 $x, y, z$ に対し、殻厚中央面での変位を $u, v, w$ とし、境界条

件は、次式の両端単純支持とした。

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0, v = 0 \text{ at } x = 0, L \quad (1)$$

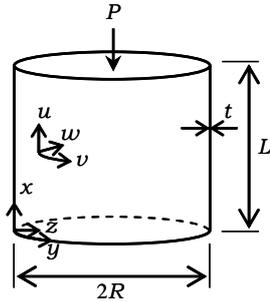


図-1 軸圧縮を受ける円筒殻

### (1) 材料複合則

図-2 に示すような直交異方性平板で、 $x$ - $y$  座標系は積層板の座標系（殻座標系と対応）、1-2 座標系は繊維方向に対応する座標系であり、繊維方向は  $x$  軸から  $\theta$ （繊維配向角）傾いていると想定する。本論文では、材料複合則<sup>9)</sup>として、半経験的パラメータを導入することで材料定数を求める次式の Halpin-Tsai-Equation<sup>10)</sup>を採用した。

$$\begin{aligned} E_1 &= E_F V_F + E_P V_P \\ \mu_{12} &= \mu_F V_F + \mu_P V_P, \quad \mu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \mu_{12} \\ E_2 &= \frac{1 + \xi \eta_2 V_F}{1 - \eta_2 V_F}, \quad \eta_2 = \frac{E_F / E_P - 1}{E_F / E_P + \xi} \\ G_{12} &= \frac{1 + \xi \eta_{12} V_F}{1 - \eta_{12} V_F}, \quad \eta_{12} = \frac{G_F / G_P - 1}{G_F / G_P + \xi} \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、下添字の  $F, P$  はそれぞれ繊維と樹脂であることを意味する。  $V_F, V_P$  は、それぞれ繊維、樹脂の体積含有率、  $E_1$  は繊維方向弾性定数、  $\mu_{12}, \mu_{21}$  はポアソン比である。また、繊維法線方向弾性定数  $E_2$  についてはパラメータ  $\xi = 1 + 40 V_F^{10}$ 、せん断弾性定数  $G_{12}$  は  $\xi = 2$  を用いた<sup>10)</sup>。

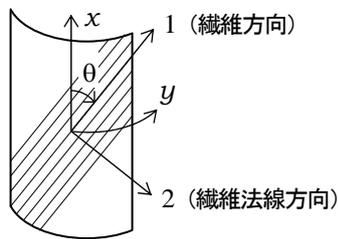


図-2 繊維方向と円筒殻座標系

### (2) 線形座屈解析

#### a) 変位関数

変位関数は、式(1)の境界条件を満たす式(3)の重調和関数とする。ただし、  $u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}$  は振幅、  $i$  は周方向波数、

$$\begin{aligned} u &= u_{i,j} \cos(iy/R) \cos(j\pi x/L) \\ v &= u_{i,j} \sin(iy/R) \sin(j\pi x/L) \\ w &= w_{i,j} \cos(iy/R) \sin(j\pi x/L) \end{aligned} \quad (3)$$

#### b) 歪変位関係式

薄肉円筒殻理論においては、Flügge型の歪一変位関係を用い解析を行うことで理論解析の厳密解が得られるが、本論文では、Flügge型の歪変位関係にLove理論とDonnell理論を適用した円筒殻の中で最も単純なDMV(Donnell-Mushtari-Vlasov)型を用いる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^d &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y^d &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_{xy}^d &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_x^{dd} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_y^{dd} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, & \varepsilon_{xy}^{dd} &= \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \kappa_x^d &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \kappa_y^d &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \kappa_{xy}^d &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_x &= \varepsilon_x + Z \kappa_x, & \bar{\varepsilon}_y &= \varepsilon_y + Z \kappa_y, & \bar{\varepsilon}_{xy} &= \varepsilon_{xy} + Z \kappa_{xy} \\ \bar{\varepsilon}_x &= \varepsilon_x^d + \varepsilon_x^{dd}, & \bar{\varepsilon}_y &= \varepsilon_y^d + \varepsilon_y^{dd}, & \bar{\varepsilon}_{xy} &= \varepsilon_{xy}^d + \varepsilon_{xy}^{dd} \\ \bar{\kappa}_x &= \kappa_x^d, & \bar{\kappa}_y &= \kappa_y^d, & \bar{\kappa}_{xy} &= \kappa_{xy}^d \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、  $(\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y, \bar{\varepsilon}_{xy})$  は任意の点の歪、  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy})$  は面内歪、  $(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy})$  は曲げ歪である。上添字の  $d, dd$  は、それぞれ、変位の1次、2次の歪成分であることを意味する。

#### c) 構成則

図-2の1-2座標系における構成則は、式(6)で求められた弾性定数を用い、式(7)として表記できる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここに、

$$Q_{11} \equiv \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, \quad Q_{22} \equiv \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, \quad Q_{66} \equiv G_{12} \quad (7)$$

積層板の座標系  $x$ - $y$  に対応させるために座標変換を行ったとき、構成則は式(8)で表される。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_y \\ 2\bar{\varepsilon}_{xy} \end{Bmatrix} \\ &= [\bar{Q}_{ij}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} + z [\bar{Q}_{ij}] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &\quad + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \end{aligned} \quad (9)$$

次に、鋼板と GFRP 材は完全剛に接着されている状態を仮定（古典的積層理論）すると、図-3 に示す積層に対して板厚方向に積分することで、等価な異方性板としての構成則が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{Bmatrix} &= [A_{ij}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} + [B_{ij}] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} &= [B_{ij}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} + [D_{ij}] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} [A_{ij}] &= \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k - z_{k-1}) \\ [B_{ij}] &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ [D_{ij}] &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (11)$$

ここに、 $(n_x, n_y, n_{xy})$  は面内合応力、 $(m_x, m_y, m_{xy})$  は合応力としての曲げモーメント及びねじりモーメントである。 $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 6$ ) は、積層板としての面内剛性、面内と曲げの連成剛性、曲げ剛性を意味する。

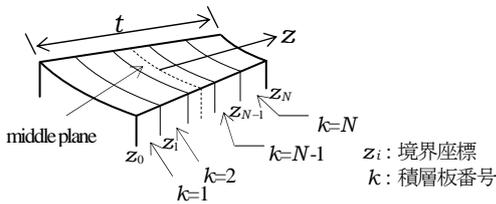


図-3 積層順序の定義

本論文では、伸縮によるせん断剛性を無視し、積層板の構成則は、座屈前平衡状態、攪乱変位の 1 次成分、2 次成分に分け、次式として表す。ただし、上添字の E は、座屈前平衡状態を表している。

$$\begin{Bmatrix} n_x^E \\ n_y^E \\ n_{xy}^E \\ m_x^E \\ m_y^E \\ m_{xy}^E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^E \\ \varepsilon_y^E \\ 2\varepsilon_{xy}^E \\ \kappa_x^E \\ \kappa_y^E \\ 2\kappa_{xy}^E \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} n_x^d \\ n_y^d \\ n_{xy}^d \\ m_x^d \\ m_y^d \\ m_{xy}^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^d \\ \varepsilon_y^d \\ 2\varepsilon_{xy}^d \\ \kappa_x^d \\ \kappa_y^d \\ 2\kappa_{xy}^d \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} n_x^{dd} \\ n_y^{dd} \\ n_{xy}^{dd} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{dd} \\ \varepsilon_y^{dd} \\ 2\varepsilon_{xy}^{dd} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

#### d) 座屈前平衡状態

殻軸方向(x方向)の圧縮荷重Pのもとで両端に剛な載荷板で圧縮した状態を考えると次式のように理想的な膜応力状態として近似できる。

$$(n_x^E, n_y^E, n_{xy}^E) = (-P/2\pi R, 0, 0) \quad (15)$$

座屈前を一樣な歪状態として近似的にとらえる座屈解析の方法は多くの研究でその力学的意義も確認されているので<sup>1,3,5,13-15</sup>、本研究でもそれを採用すると、座屈前平衡状態における歪成分は、次式として書ける。

$$(\varepsilon_x^E, \varepsilon_y^E, \varepsilon_{xy}^E) = \frac{n_x^E}{X} (X_1, -X_2, 0) \quad (16)$$

ただし、

$$X_1 = \det \begin{bmatrix} A_{22} & B_{12} & B_{22} \\ B_{12} & D_{11} & D_{12} \\ B_{22} & D_{12} & D_{22} \end{bmatrix}, X_2 = \det \begin{bmatrix} A_{12} & B_{12} & B_{22} \\ B_{11} & D_{11} & D_{12} \\ B_{12} & D_{12} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$X = \det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{12} & A_{22} & B_{12} & B_{22} \\ B_{11} & B_{12} & D_{11} & D_{12} \\ B_{12} & B_{22} & D_{12} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (18)$$

#### e) 増分歪エネルギー

線形座屈解析では、トータルポテンシャルエネルギー(以下 TPE)の変位に関する2次項 $\Pi_2$ が用いられる<sup>7)</sup>。 $\Pi_2$ のエネルギー成分は以下のように分解できる。

$$\Pi_2 = U_{2mm} + 2U_{2mb} + U_{2bb} + V_{2m}^x + V_{2m}^y \quad (19)$$

$$U_{2mm} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} \int_0^L (n_{xm}^d \varepsilon_x^d + n_{ym}^d \varepsilon_y^d + 2n_{xym}^d \varepsilon_{xy}^d) dx dy \quad (20)$$

$$U_{2mb} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} \int_0^L (n_{xb}^d \varepsilon_x^d + n_{yb}^d \varepsilon_y^d + 2n_{xyb}^d \varepsilon_{xy}^d) dx dy \quad (21)$$

$$U_{2bb} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} \int_0^L (m_{xb}^d \kappa_x^d + m_{yb}^d \kappa_y^d + 2m_{xyb}^d \kappa_{xy}^d) dx dy \quad (22)$$

$$V_{2m}^x = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} \int_0^L (n_x^E \varepsilon_x^{dd} + n_x^{dd} \varepsilon_x^E) dx dy \equiv P \bar{V}_{2m}^x \quad (23)$$

$$V_{2m}^y = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} \int_0^L (n_y^E \varepsilon_y^{dd} + n_y^{dd} \varepsilon_y^E) dx dy \equiv P \bar{V}_{2m}^y \quad (24)$$

ここに、 $U_{2bb}$  は曲げ歪エネルギー、 $U_{2mm}$  は面内歪エネルギー、 $U_{2mb}$  は非対称効果によって生じる曲げと面内の連成エネルギー、 $V_{2m}^x$  は軸方向非線形面内歪エネルギー、 $V_{2m}^y$  は周方向の非線形面内歪エネルギーである。

### f) 座屈方程式

本研究では TPE の停留原理を採用する。線形座屈条件式は、TPE の 2 次項(式(19))の変分をゼロとする式(25)として記述できる。

$$\delta \Pi_2 = \delta (U_{2mm} + 2U_{2mb} + U_{2bb} + V_{2m}^x + V_{2m}^y) = 0 \quad (25)$$

それぞれのエネルギー成分を式(25)に代入することで、座屈方程式は次式として変形できる。

$$\delta \Pi_2 = \delta \left[ U_{2mm} + 2U_{2mb} + U_{2bb} + P_c \frac{\partial (V_{2m}^x + V_{2m}^y)}{\partial P} \right] = 0 \quad (26)$$

式(26)について、固有値解析を実施すれば線形座屈値として  $P_c$ 、線形座屈モードとして、 $u_c, v_c, w_c$  が求められる。

### g) 座屈方程式

座屈解の基本的な解として、等方性や積層円筒殻では、式(3)での周方向波数を  $i = 0$  としたときのいわゆる「軸対称座屈解」が良く知られている。本研究でも、式(3)で  $i = 0$  とした解析を実施する。すなわち、変位関数は次式とする。

$$\begin{aligned} u &= u_{0,j} \cos(j\pi x/L) \\ v &= 0 \\ w &= w_{0,j} \sin(j\pi x/L) \end{aligned} \quad (27)$$

式(27)の変位関数を用いて計算を行うと、TPEの変位に関する2次項  $\Pi_2$  は振幅  $u_{0,j}$ 、 $w_{0,j}$  の関数として表される。式(28)の停留条件式を用いると2元連立1次方程式として座屈方程式を得る。

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial u_{0,j}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_2}{\partial w_{0,j}} = 0 \quad (28)$$

座屈方程式の固有値解として、座屈解  $P_{0,j}^c$  が式(29)のような  $j$  の2乗の関数として与えられる。式(29)において座屈解  $P_{0,j}^c$  が  $j$  に対して最小値をとるとき、式(30)として、軸対称座屈解  $P_s$ 、軸対称座屈解を与えるときの軸方向半波数  $j_s$  が式(31)で求められる。

$$P_{0,j}^c = \frac{4\pi}{1 + A_{11}X_1 - A_{12}X_2} \begin{bmatrix} R \left( D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \left( \frac{j\pi}{L} \right)^2 \\ + 2 \left( -B_{12} + B_{11} \frac{A_{12}}{A_{11}} \right) \\ + \frac{1}{R} \left( A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right) \left( \frac{L}{j\pi} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$P_s = \frac{8\pi}{1 + A_{11}X_1 - A_{12}X_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}} \sqrt{(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)(A_{11}D_{11} - B_{11}^2)} \\ + B_{11} \frac{A_{12}}{A_{11}} - B_{12} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$j_s = \frac{L}{\pi} \left( \frac{1}{R^2} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}D_{11} - B_{11}^2} \right)^{1/4} \quad (31)$$

### (3) Reduced Stiffness 座屈解析

RS 座屈解析法は初期不整による座屈耐荷力の低下は、初期不整によって生ずるモードのカップリングによって、正の面内歪エネルギー成分が減少（損失）するという理論に立脚する。既往の研究における RS 法では、式(20)～式(24)に示されるエネルギー成分のうち、曲げ歪エネルギー  $U_{2bb}$  と線形面内歪エネルギー  $U_{2mm}$  並びに線形化された周方向歪エネルギーと  $V_{2m}^y$  はともに正であるが、線形化された軸方向歪エネルギー  $V_{2m}^x$  と面内と曲げの連成エネルギー  $U_{2mb}$  は負となり、座屈を促進させる効果は  $V_{2m}^x$  と  $U_{2mb}$  が担っていることが明らかとなっているので、次式を採用し RS 座屈値  $P_s^*$  を求める<sup>13,58,13,14</sup>。本論文では、対称補強を対象としているので、 $U_{2mb}$  は派生しない。

$$\delta \left[ U_{2bb} + P_c^* \left( \frac{\partial V_{2m}^x}{\partial P} \right) \right] = 0 \quad (32)$$

### (4) 非線形座屈解析

非線形座屈解析における変位関数  $u, v, w$  は、式(1)の境界条件を満たす重調和関数の線形和で表される式(33)とする。

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=0,b,2b,3b}^{J_f^u} \sum_j^{J_f^u} u_{i,j} \cos(iy/R) \cos(j\pi x/L) \\ v &= \sum_{i=b,2b,3b}^{J_f^v} \sum_j^{J_f^v} v_{i,j} \sin(iy/R) \sin(j\pi x/L) \\ w &= \sum_{i=0,b,2b}^{J_f^w} \sum_j^{J_f^w} w_{i,j} \cos(iy/R) \sin(j\pi x/L) \end{aligned} \quad (33)$$

初期不整  $w^0$  については、周方向波数  $b$ 、軸方向半波数  $f$  をもつ単一モード ( $f=1$ ) を採用した式(34)とする。

$$w^0 = w_{b,f}^0 \cos(by/R) \sin(f\pi x/L) \quad (34)$$

変位関数の採用項については解の収斂性と計算効率を考慮し、下式のように  $u, v, w$  に関してそれぞれ 28 項、17 項、19 項の計 64 項のモードを採用している。

$$\begin{aligned}
J_0^u &= 21 \text{ for } i=0 \text{ and } j=1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21 \\
J_b^u &= 15 \text{ for } i=b \text{ and } j=1,3,5,7,9,11,13,15 \\
J_{2b}^u &= 11 \text{ for } i=2b \text{ and } j=1,3,5,7,9,11 \\
J_{3b}^u &= 5 \text{ for } i=3b \text{ and } j=1,3,5 \\
J_b^v &= 15 \text{ for } i=b \text{ and } j=1,3,5,7,9,11,13,15 \\
J_{2b}^v &= 11 \text{ for } i=2b \text{ and } j=1,3,5,7,9,11 \\
J_{3b}^v &= 5 \text{ for } i=3b \text{ and } j=1,3,5 \\
J_0^w &= 15 \text{ for } i=0 \text{ and } j=1,3,5,7,9,11,13,15 \\
J_b^w &= 11 \text{ for } i=b \text{ and } j=1,3,5,7,9,11 \\
J_{2b}^w &= 9 \text{ for } i=2b \text{ and } j=1,3,5,7,9
\end{aligned} \tag{35}$$

初期不整を考慮した場合の歪変位関係式は次式である。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w^0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{\partial w^0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w^0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w^0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
\kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{36}$$

TPE の停留条件を用いることで、非線形連立方程式が得られ、それに増分法と Newton-Raphson 法を適用することで、逐次的に釣合経路が求められる<sup>9)</sup>。

### 3. 解析モデル

本研究では既往の等方性円筒殻の座屈実験や非線形解析の研究でしばしば採用されている形状係数<sup>9)</sup>である次式の値を採用する。これにより、本研究のような異方性材料を積層したものと等方性の場合の座屈性状との対応の確認も可能としている。

$$L/R = 0.512, R/t_s = 405, t_s = 4\text{mm} \tag{37}$$

ここに、 $t_s$  は鋼板の厚さである。鋼板の厚さは、文献7を参考に決定した。尚、 $R/t$  が 60 以上の薄肉円筒殻の座屈問題では、FRP 積層材料の場合であっても横せん断変形の影響は小さいことが既往の研究で示されている<sup>7)</sup>ので、本研究ではその影響は無視する。材料定数、積層板を構成する GFRP の繊維と樹脂の材料定数、及び繊維含有率は既往の研究での採用値を参考に式(38)とした<sup>9,12)</sup>。

$$\begin{aligned}
E_S &= 205\text{GPa} \\
E_F &= 72\text{GPa}, \quad \mu_F = 0.22, \quad V_F = 0.5 \\
E_P &= 3.5\text{GPa}, \quad \mu_P = 0.34, \quad V_P = 0.5
\end{aligned} \tag{38}$$

図4 に本研究で採用した鋼製円筒殻補強モデルを示す。

第8回複合・合成構造の活用に関するシンポジウム補強は、殻内外面から等厚の GFRP 材で補強した対称積層を想定する。対象とする補強厚は、 $t_f = 0, 1, 2, 4\text{mm}$  の4タイプとした。 $t_f = 0\text{mm}$  は、無補強(等方性)であることを意味する。すなわち、殻厚  $t$  はそれぞれ、4, 5, 6, 8mm である。

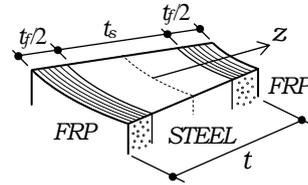


図4 鋼製円筒殻補強モデル

### 4. 解析結果と考察

#### (1) 繊維補強鋼製円筒殻へのRS法の適用

図-5に、鋼製円筒殻( $t_f=0\text{mm}$ )と補強厚  $t_f=4\text{mm}$ ,  $\theta=0^\circ$  の座屈荷重スペクトルを示す。横軸は周方向全波数  $i$ ，左縦軸は座屈荷重  $P$ ，右縦軸は補強断面を等価な鋼材断面に換算し算定した平均応力を鋼材のヤング率で正規化した円筒殻の等価歪 $\varepsilon_{eq}$  である。上側の各曲線は、各軸方向半波数  $j$  に対する線形座屈解析の結果で、本研究では、それぞれの最小値を  $P_{cm,j}$ ， $P_{cm,j}$  のうち最小値を線形座屈値  $P_{cm}$ ，それを与える  $i$  と  $j$  を  $i_{cm}, j_{cm}$  と定義する。図-5(a)の場合、 $P_{cm} = 12.47\text{MN}$ ， $i_{cm} = 17.2$ ， $j_{cm} = 4$  である。下側の各曲線は、RS 座屈解析の結果で、 $P_{cm,j}$  を与える  $i$  と  $j$  に対する RS 値を  $P_{cm,j}^*$ ， $P_{cm,j}^*$  のうち最小値を RS 座屈値(座屈下限予測値)  $P_{cm}^*$ ，それを与える  $i$  と  $j$  を  $i_{cm}^*, j_{cm}^*$  と定義する。図-5(a)では、 $P_{cm}^* = 3.36\text{MN}$ ， $i_{cm}^* = 13.7$ ， $j_{cm}^* = 1$  である。○△□などは、それぞれ、鋼板厚で正規化された初期不整振幅  $w_{0,1}^0/t_s$  に対する非線形座屈値  $P_m^N$  で、たとえば  $w_{0,1}^0/t_s = 0.40$  は、円筒殻が殻厚の 0.4 倍の形状初期不整振幅を持つことを意味する。周方向全波数  $i=10$  では、RS 座屈値  $P_{cm}^*$  より低い値を示す非線形座屈値  $P^N$  もあるが、これは等方性円筒殻や積層円筒殻にも見られた傾向である。 $P_{cm}^*$  は、 $w_{0,1}^0/t_s = 1.00$  の初期不整に対する  $P^N$  とよく一致することから、既往の研究と同様に、繊維補強鋼製円筒殻においても、殻厚程度の初期不整振幅に対して、概略の座屈下限予測値を与えると言える。

#### (2) 形状初期不整と繊維配向角が座屈性状に及ぼす影響

表-1に、各補強厚に対する  $\theta = 0^\circ$  と  $90^\circ$  の  $P_{cm}$  を与える  $i_{cm}, j_{cm}$  と  $P_{cm}^*$  を与える  $i_{cm}^*, j_{cm}^*$  を示す。補強厚が大きくなると軸方向及び周方向の波数が小さくなるのがわかる。ここでは、軸方向半波数の変化に注目する。図-6に鋼製円筒殻( $t_f = 0\text{mm}$ )と繊維補強鋼製円筒殻( $t_f = 4\text{mm}$ ,  $\theta =$

0°,45°,90°)の荷重変位曲線, 座屈点付近における増分変位モードと軸方向波形( $b=13$ )を示す. 荷重変位曲線の右に示されるのは, 初期不整振幅が比較的小さい $w_{13,1}^0/t_s = 0.05$ と殻厚程度の $w_{13,1}^0/t_s = 1.00$ の増分変位モードである.  $t_f = 4\text{mm}$ ,  $\theta = 45^\circ, 90^\circ$ の繊維補強鋼製円筒殻では, 鋼製円筒殻と同様に初期不整の増大に伴って, 卓越する軸方向

第8回複合・合成構造の活用に関するシンポジウムに卓越する波長が長くなることがわかる. しかし,  $t_f = 4\text{mm}$ ,  $\theta = 0^\circ$ では, 初期不整振幅が $w_{13,1}^0/t_s = 0.05$ と小さい場合においても軸方向に長い半波長が卓越していることが確認できる. 表-2にそれぞれ補強厚 $t_f = 4\text{mm}$ の各積層構成の積層板としての剛性を示す.  $A_{11}, D_{11}$ は軸方向,  $A_{12}, D_{12}$ は軸方向と周方向のポアソン効果,  $A_{22}, D_{22}$ は周

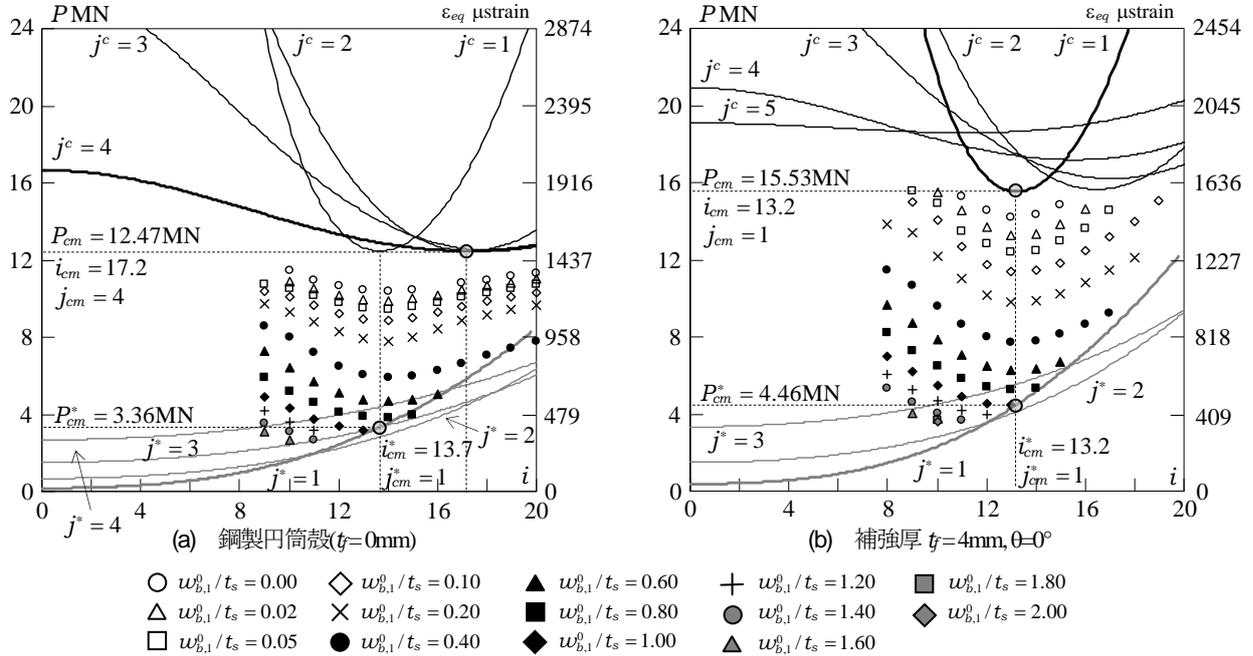


図-5 座屈荷重スペクトル

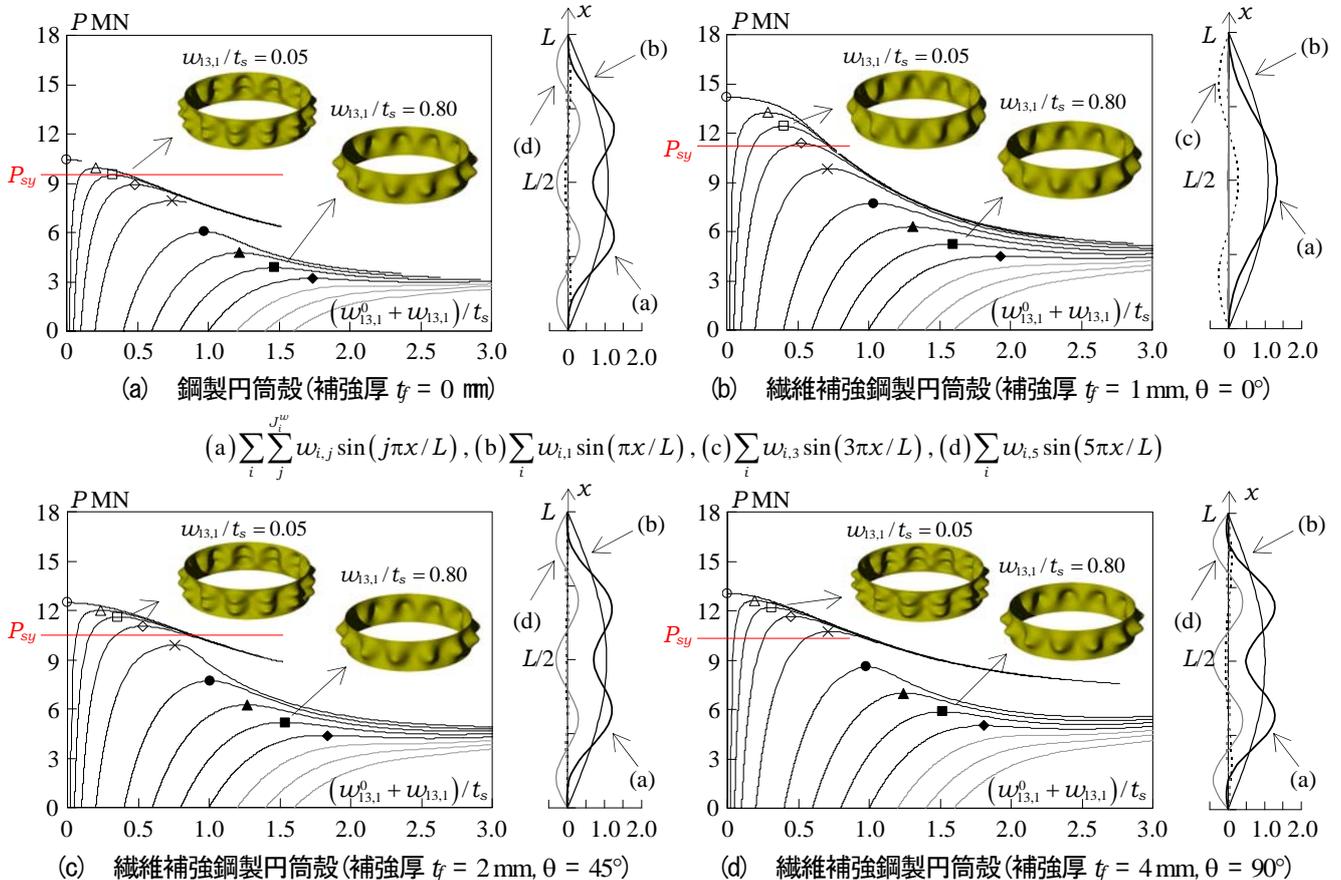


図-6 荷重変位曲線, 増分変位モードと  $w_{13,1}^0/t_s = 0.05$  の軸方向波形

方向のそれぞれ面内及び曲げ剛性である。θ = 0°と45°を比較して、θ = 0°では、 $A_{11}$ が45°の場合に比して大きいために軸方向に長い半波数が卓越するものと考えられる。鋼製円筒殻と繊維補強鋼製円筒殻 $t_f = 4\text{mm}$ 、θ = 45°の軸方向波形を比較すると、よく似た軸方向波形が得られていることがわかる。これは、表-2に示されるように、θ = 45°では軸方向及び周方向の面内剛性と曲げ剛性が同じ、擬似等方性の性質を有するためである。

### (3) 繊維補強が座屈荷重に及ぼす影響

図-7に繊維配向角と座屈荷重の関係を示す。横軸は繊維配向角θ、縦軸は座屈荷重Pを表している。太線は補強厚 $t_f = 4\text{mm}$ 、細線は無補強( $t_f = 0\text{mm}$ )の円筒殻を表し、黒線はそれらの線形座屈値 $P_{cm}$ 、灰色線はそれらのRS座屈値 $P_{cm}^*$ 、赤線は全断面降伏荷重 $P_{sy}$ を表す。線形座屈値 $P_{cm}$ は、繊維配向角35°で最適となる。非線形座屈解析は、20°、70°についても実施したが、いずれの繊維配向角においても、 $w_{b,1}/t_s = 1.00$ に対する非線形座屈値 $P_{cn}^N$ とRS座屈値 $P_{cm}^*$ がほぼ一致することがわかる。RS座屈値 $P_{cm}^*$ に注目すると、それが与える最適繊維配向角は90°で、GFRP積層円筒殻の場合と同様に線形座屈値が与えるそれとは異なることが示された。

### (4) 材料損傷の検討

図-8に補強厚 $t_f$ と座屈荷重Pの関係(θ = 90°)を示す。横軸は補強厚 $t_f$ 、縦軸は座屈荷重Pである。黒線は線形座屈値 $P_{cm}$ 、灰色線はRS値 $P_{cm}^*$ 、全断面軸降伏荷重 $P_{sy}$ を表している。初期不整が無い完全形状の円筒殻では $P_{cm} > P_{sy}$ であることから、補強厚に関係なく鋼材の降伏が先行すると予測できる。しかし、 $w_{b,1}/t_s = 0.10$ 程度の初期不整を有する場合には、 $P_{cn}^N < P_{sy}$ となることから、本解析モデルの場合、補強厚さを大きくとっても、初期不整による影響を考慮すると、弾性座屈が先行する可能性があることがわかる。鋼材降伏以前に弾性座屈が先行する可能性があることが示唆できる。なお、弾性座屈と塑性崩壊の相乗作用へのRS法の応用については文献

## 5. 結語

本論文は、GFRP薄肉材で両面繊維補強された鋼製円筒殻を対象に、線形座屈解析、RS座屈解析、非線形座屈解析を実施し、補強による座屈荷重の上昇の程度と座屈性状について論じ、以下の点を明らかにした。

- 既往の等方性円筒殻や積層円筒殻の研究で明らかにされてきたRS解析結果と同様、殻厚レベルの形状初期不整振幅を仮定して得られる非線形座屈値の下限は、RS法による座屈下限予測値に概略一致する。
- 補強厚を大きくすると、無補強の場合と比較して周方向、軸方向の両者に対して座屈波数は小さくなる。特に、軸方向に平行に繊維配向した補強の場合には、補強厚が4mm程度になると、初期不整が小さい場合でも、軸方向に長い波長が卓越する。

表-1 最小座屈値を与える周方向と軸方向の(半)波数

$t_f$ [mm]	θ=0°				θ=90°			
	Linear		RS		Linear		RS	
	$i_{cm}$	$j_{cm}$	$i_{cm}^*$	$j_{cm}^*$	$i_{cm}$	$j_{cm}$	$i_{cm}^*$	$j_{cm}^*$
0	17.2	4	13.7	1	17.2	4	13.7	1
1	17.2	2	13.6	1	16.9	4	13.4	1
2	13.5	1	13.5	1	16.5	4	13.1	1
4	13.2	1	13.2	1	15.3	4	12.4	1

表-2 面内剛性と曲げ剛性( $t_f = 4\text{mm}$ )

θ	面内剛性(MN/m)				曲げ剛性(Nm)			
	$A_{11}$	$A_{12}$	$A_{22}$	$A_{66}$	$D_{11}$	$D_{12}$	$D_{22}$	$D_{66}$
0°	1056	284	948	330	2645	484	1643	553
45°	972	313	972	359	1867	761	1867	830
90°	948	284	1056	330	1643	484	2645	553

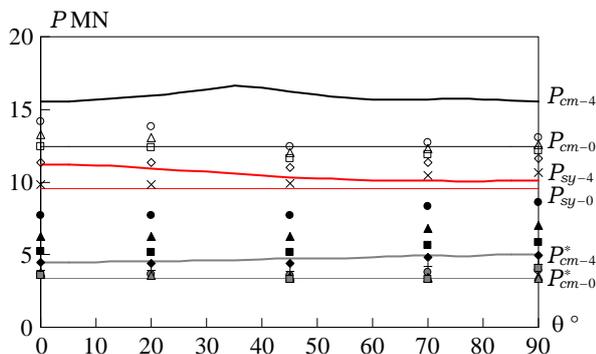


図-7 繊維配向角と座屈荷重の関係

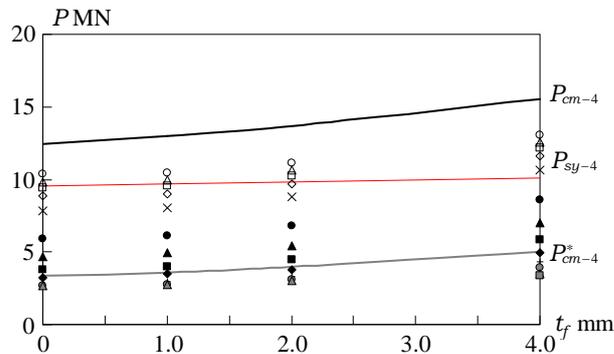


図-8 補強厚  $t_f$  と座屈荷重 P の関係 (θ = 90°)

- ・ 繊維配向角をパラメータとした解析結果から、線形座屈値を基とした最適配向角は35°であるが、初期不整による座屈耐力の低下を配慮したRS座屈値を基準として最適化を考えた時には最適配向角は90°となる。
- ・ 形状初期不整振幅の最大値が殻厚の10%以上は不可避に存在すると考えられるので、本研究で採用した補強円筒殻では、いずれの補強厚の場合でも、鋼材の降伏に先行して壁面の弾性座屈が生じて崩壊に至る可能性があることが明らかになった。

#### 参考文献

- 1) 山田聖志：軸圧円筒殻の座屈問題へのRS法適用に関する非線形解析的検討，日本機械学会論文集，A編，64巻，619号，pp221-228，1998
- 2) Croll, J. G. A. : Towards a rationally based elastic-plastic shell buckling design methodology, *Thin-walled Structures*, Vol.23, pp67-84, 1995
- 3) 山田聖志：座屈前に幾何学的非線形性を有するシェル構造物へのRS法の適用，日本建築学会構造系論文集，No.390，pp88-97，1988
- 4) Yamada, S. and Croll J.G. A. : Buckling behavior of pressure loaded cylindrical panels, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.115, pp327-344, 1989
- 5) Yamada, S. and Croll, J. G. A. : Buckling and post-buckling characteristics of pressure-loaded cylinders, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol.60, pp290-299, 1993
- 6) Yamada, S. and Croll J. G. A. : Contributions to understanding the behavior of axially compressed cylinders, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol.63, pp299-309, 1999
- 7) 日本機械学会：シェルの振動と座屈ハンドブック，技報堂出版，2002
- 8) 山田聖志，柳田将之：FRP積層円筒シェルのRS座屈耐荷力の特性，構造工学論文集，土木学会，Vol.55A, 2008
- 9) 三木光範，福田武人，元木信弥，北条正樹：機械システム入門シリーズ 複合材料，共立出版株式会社，1997
- 10) Jones, R. M. : *Mechanics of Composite Materials*, 2nd Ed., Taylor & Francis, 1999.
- 11) Wang, H. and Croll, J. G. A. : Buckling design optimization of fibre reinforced polymer shells using lower bound post-buckling capacities, *13th Int. Conf. on Exp. Mech.*, Alexandroupolis, Greece, 2007
- 12) Matsumoto, K., Yamada, S., Wang, H.T. and Croll, J.G.A: Buckling and reduced stiffness criteria for FRP cylindrical shells under compression, *Proceedings of Asia-Pacific Conference on FRP in Structures*, APFIS, IFC, Vol.1, pp.465-470, 2007.
- 13) Batista, R. C. and Croll, J. G. A. : A design approach for axially compressed unstiffened cylinders, *Stability Problems in Engineering Structures and Components*, Applied Science, London, 1979
- 14) Croll, J. G. A. : Towards a rationally based elastic-plastic shell buckling design methodology, *Thin-walled Structures*, Vol.23, pp.67-84, 1995
- 15) Croll, G.J.A. : Lower bound elasto-plastic buckling of cylinders, *Proc. Instn Civil Engrs*, Part 2, Vol.71, pp.235-261, 1981.
- 16) Kawamoto, Y. and Yuhara, T.: Buckling of fabricated ring-stiffened steel cylinders under axial compression, *Int. Conf. on Advances in Marine Structures*, pp.262-280, 1986.

## A STUDY ON THE BUCKLING OF FIBRE REINFORCED STEEL CYLINDERS UNDER AXIAL COMPRESSION

Seishi YAMADA, Masayuki YANAGIDA and Krishna Kumar BHETWAL

This paper deals with the steel cylinders reinforced by GFRP (glass fiber reinforced polymers) under axial compression. The classical linear, RS (reduced stiffness) and non-linear buckling analyses have been carried out. The present results have demonstrated that the lower bounds of non-linear buckling loads for GFRP reinforced steel shells are consistent with RS criteria in the same manor to that of the non-reinforced isotropic steel shells. It has been also shown that the buckling mode with one half-wave number in longitudinal direction is dominant for the relatively large imperfections. Through parametric studies for fiber angle orientation of GFRP reinforcements, the maximum upper loads by linear buckling analyses are given for 35 degree orientation in similar to the results by previous studies in aerospace engineering, however, the optimized design criteria by the present RS analyses are suggested to be for the 90 degree orientation.