

(23) 複合構造の有限要素接触解析のための 界面モデル生成に関する一考察

齋藤誠¹・斉木功²・中島章典³

¹学生会員 宇都宮大学大学院 工学研究科情報制御システム科学専攻 (〒 321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2)

Email:mt053714@cc.utsunomiya-u.ac.jp

²正会員 博(工) 東北大学大学院助手 工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

Email:saiki@civil.tohoku.ac.jp

³正会員 工博 宇都宮大学大学院教授 工学研究科情報制御システム科学専攻 (〒 321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2)

Email:akinorin@cc.utsunomiya-u.ac.jp

鋼とコンクリートによって構成される複合構造は、異種材料の一体化により個々の材料の性能よりも優れた性能を発揮する。したがって、鋼とコンクリートの付着性状は複合構造の挙動に大きく影響し、合理的な設計を行うためには界面の挙動を明確に評価する必要がある。界面の扱いは、不連続現象を直接表現できる剛体ばねモデルなどの離散モデルが適している。しかし、計算コストを考えると界面以外は連続体としてのモデル化としたい点や、汎用性といった観点から、有限要素法を用いる利点も捨てがたい。接触解析用モデルを有限要素法で解析する場合、接触する要素の設定や、接触節点ペアと外向き法線ベクトルが必要であり、複雑な形状をしている異種材料間の界面のモデル化が問題となる。そこで本研究では、界面を含まない通常の有限要素モデルから、節点間接触を取り入れた解析に必要な界面のモデルを自動的に作成するアルゴリズムの構築を行う。

Key Words : *hybrid structure, contact analysis, finite element method, interface, modeling*

1. はじめに

鋼とコンクリートとを組み合わせた複合構造は、異種材料の一体化により単一材料では発揮されない優れた性能を発揮する。また複合構造は異種材料が複雑に入り組んだ構造となるが、実際の計算などにおいて複雑な構造をそのままモデル化することは困難である。そのため、要素試験を行うことで複合構造の材料特性を求め、その平均的な特性が解析・設計に用いられている。しかし、複合構造の形状や寸法により特性が異なるため、要素試験を行う負担が大きいことや、様々な境界条件が考えられる実構造物に対応する要素試験の境界条件は不明確である。

そこで本研究では、異種材料間(鋼とコンクリート)の界面をモデル化して付着を考え、接触問題として考える。鋼とコンクリートの付着性状が把握できれば、複合構造の材料特性は要素試験を行うことなく求められると考えられ、先に述べた問題点は解消されと考えられる。鋼とコンクリートの付着性状は複合構造の挙動に大きく影響すると考えられており、これまで様々な研究や実験が行われている¹⁾。著者ら²⁾³⁾⁴⁾も鋼とコンクリートの接触面を簡易に再現した要素試験体を用いて、接触面

の付着性状を検討している。

実際に鋼・コンクリート複合構造物を対象として有限要素接触解析を行う場合、複雑な形状を有している異種材料間の界面のモデル化に大きな負担が生じる。界面の扱いは、亀裂などの不連続現象を直接表現できる剛体ばねモデルなどの離散モデルが適している。しかし、連続体の部分については精度が期待できない欠点があり、界面以外は連続体としてモデル化したほうが望ましい。この欠点についてはペナルティを用いたハイブリッド型モデルなどで改良されている⁵⁾⁶⁾。しかしながら汎用性といった観点から有限要素法を用いる利点も捨てがたい。

接触解析用モデルを有限要素法で解析する場合、接触節点ペアや外向き法線ベクトルが必要である⁷⁾。現状では汎用ソフトを用いてモデルを作成し、接触解析を行うことは可能である。しかし、汎用ソフトは機械系などで考えられる衝突問題、つまり相対変位が大きく、接触面探索を行う問題などに適したモデル化の手法と言える。

本研究の解析対象は、接触解析の中でも複合構造の異種材料間の界面である。したがって、異種材料間のはく離は一般的な接触解析で考える変位よりも小さい範囲と考えられる点や、そのはく離は異種材料間でのみ生じるという仮定から、大きな相対変位や接触節点探索は対

象外とする．さらに異種材料の界面は初めは接触していることを前提とする．よって汎用ソフトの手法とは違った，複合構造における異種材料間のみ接触面を形成するようなモデル化の手法が必要である．

そこで小川ら⁸⁾は，有限要素法をベースにした解析方法を用いて，2次元モデルにより複合構造の接触解析を簡便に行う手法を提案した．本研究では，この手法を3次元に拡張し界面を含まない通常の有限要素モデルから，節点間接触解析に必要な界面のモデルを自動的に作成するアルゴリズムの構築を行う．

2. モデル作成方法

以下に本研究で構築したモデル化自動処理アルゴリズムについて説明する．

(1) 有限要素モデルの前処理

まず材料の種類に関係することなく，2要素間で1つの節点を共有しているのならば2重節点にし，それぞれの要素に違った数字の節点を属させることで全ての要素を一旦個別に分離する．次に界面を考える必要のない同質要素間について，2要素間で面を共有している，つまり，同位置にある節点を3組以上共有するのであれば，その2要素に属する節点を結合させる．結合方法としては，ナンバーの小さい節点を2要素に属させる．節点結合後には，どの要素にも属していない節点は消去し，節点のリナンバーを行う．**図-1**は共有面探索の流れ図であり，同質要素間における共有節点結合の流れを示す．節点をリナンバーすることにより，元のモデルと接触解析用モデルの節点番号が異なることとなる．解析を行う上で，接触解析用モデルの境界条件が元のモデルに対応しなくてはならない．そこで，境界条件が考慮されている元のモデルの節点と接触解析用モデルの節点との距離が十分小さいとき，接触解析用モデルの節点に境界条件を取り入れる．

(2) 接触解析のための界面モデル生成

節点間接触解析を行うために，接触する節点の組である接触節点ペアと接触面の方向を示す外向き法線ベクトル，接触面に平行な2つの接線ベクトル(これら3つのベクトルは互いに直交)，および1接触節点あたりの接触面積を算出する必要がある．本手法では，通常の有限要素モデルから，接触解析のために必要なモデルを界面を考慮する異種材料要素間において，master要素

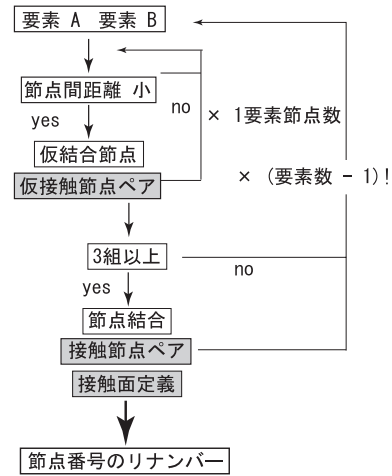


図-1 共有面・接触面探索

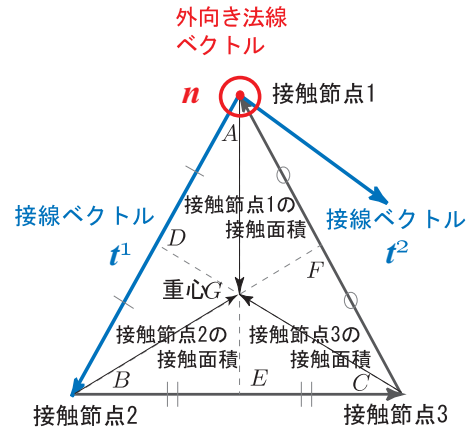


図-2 三角形の接触面

を基準に自動的に作成する．ここで要素番号の小さい要素を master 要素，要素番号の大きい要素を slave 要素とする．よって，接触面の方向を示す外向き法線ベクトルは，master 要素から slave 要素へ向かうベクトルと定義する．以下，接触面が三角形と四角形の場合について，モデル生成の方法を述べる．

a) 接触面が三角形の場合

接触節点ペアを求めるために，有限要素モデルの前処理の後，界面を考慮する異種材料要素間において，先に述べた節点を結合する手法と同様に行う．つまり，2要素間での節点同士の距離が十分小さい(要素間で節点を共有している)節点ペアを接触節点ペアと仮定する．この仮定した接触節点ペアが3組以上存在するのであれば，2要素間に面が1つ決定されるので，その面を接触面とする．またその接触面を形成している節点ペアを接触節点ペアと定義する．**図-1**において，接触節点

ペアが定義されるまでの流れが示してある．ここで，master 要素でこの接触面を構成しない節点情報も得ておく．この節点情報は，後の外向き法線ベクトルの向きを決定する際に用いる．接触面は master 要素の節点ペアを探索された順に結ぶ閉合した3つのベクトルで表わされる．

次に，接触節点ペアから接触面の重心座標を求める．重心座標の求め方としては，

$$G(i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n A^n(i), \quad (i = 1, 3) \quad (1)$$

ただし， i は自由度を表わし，重心座標の各成分を $G(i)$ ，1 接触面あたりの接触節点数を n (この場合 $n = 3$)，接触節点の座標を $A^n(i)$ とする．また，各接触節点ペアに属する接触面積を求めるために，各接触節点とこの重心座標からなるベクトルを定義しておく．

外向き法線ベクトルについては図-2に示すように，まず，接触面を形成している master 要素側の接触節点ペアを結ぶベクトル $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CA}$ を考える．この中でベクトル $\vec{AB}$, $\vec{CA}$ の外積により，外向き法線ベクトル $\mathbf{n}$ を

$$\mathbf{n} = \vec{AB} \times \vec{CA} \quad (2)$$

と定義する．求めた法線ベクトルが先に述べた定義に沿うように，つまり master 要素から slave 要素に向かうベクトルとするために条件

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} < 0 \quad (3)$$

を考え，これを満足するように $\mathbf{n}$ の各成分の符号を逆にして定義し直す．ここで $\mathbf{n}$ は外向き法線ベクトルであり， $\mathbf{v}$ は接触面の重心から接触面を形成していない節点へのベクトルを表わす．

接線ベクトルについては，1つは接触節点ペアを結ぶベクトル

$$\mathbf{t}^1 = \vec{AB} \quad (4)$$

であり，もう1つはその接線ベクトル $\mathbf{t}^1$ と，求められた外向き法線ベクトル $\mathbf{n}$ の外積

$$\mathbf{t}^2 = \mathbf{t}^1 \times \mathbf{n} \quad (5)$$

と定義する．

これまで外向き法線ベクトルと接線ベクトルは，接触節点の節点情報を元に算出してきた．本手法では単位ベクトルを用いて座標変換を行うので，

$$\hat{\mathbf{n}}(i) = \frac{\mathbf{n}(i)}{|\mathbf{n}|}, \quad \hat{\mathbf{t}}^1(i) = \frac{\mathbf{t}^1(i)}{|\mathbf{t}^1|}, \quad \hat{\mathbf{t}}^2(i) = \frac{\mathbf{t}^2(i)}{|\mathbf{t}^2|} \quad (6)$$

により全てのベクトルを単位ベクトルに定義し直す．ここで i は自由度とし， $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{t}}^1$, $\hat{\mathbf{t}}^2$ は単位ベクトルの成分とする．

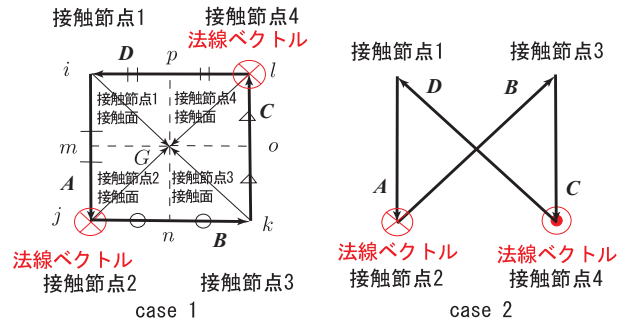


図-3 四角形の接触面

接触節点が始点・終点になっている2つのベクトルと，先に算出した接触節点と接触面の重心からなるベクトルの外積から各接触節点ペアに属する接触面積を求める．つまり，図-2において

- 接触節点1の接触面積は $\triangle ADG$ と $\triangle AFG$ の和
- 接触節点2の接触面積は $\triangle BDG$ と $\triangle BEG$ の和
- 接触節点3の接触面積は $\triangle CEG$ と $\triangle CFG$ の和とする．

b) 接触面が四角形の場合

まず，接触節点ペアの定義方法は接触面が三角形である場合と同様に行う．

本手法において，接触面を形成するベクトルは，接触節点が探索された順に依存する．よって，接触節点を結ぶベクトルが，図-3の case 2 のように接触面を形成するベクトル (四角形の4辺) にならない場合がある．そのとき，接触解析のための適切なモデルが生成されない．そこで，条件

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) > 0 \quad (7)$$

を考える．この条件を満足したとき，法線ベクトルは接触面に対し，直角方向に一意のベクトルである．一方，式(7)を満たさないときは，case 2 のように2つの法線ベクトルが逆向きであることを示す．つまり，接触節点を結ぶベクトルが接触面を正しく形成していないことになる．よって，探索された接触節点3, 4の節点情報を入れ換えることで，接触節点を結ぶベクトルを修正し，case 1 のような接触面に定義し直すものとした．

接触面を構成する接触節点ペアとそれらを結ぶベクトルをもとに，接触解析のための情報を算出する．

重心座標の求め方としては，

$$G(i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n A^n(i), \quad (i = 1, 3) \quad (8)$$

である．ここで，重心の x , y , z 座標をそれぞれ $G(1)$, $G(2)$, $G(3)$ とし1接触面あたりの接触節点数を n (こ

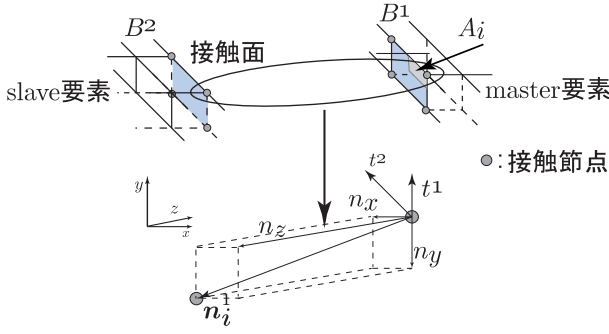


図-4 節点間接触の概念図

の場合 $n = 4$), 接触節点の座標を $A^n(i)$ とする.

外向き法線ベクトルと2つの接線ベクトルの算出方法は、接触面が三角形の場合と同様である.

接触面積についても同様の手法による. つまり、図-3において

- 接触節点1の接触面積は $\triangle imG$ と $\triangle piG$ の和
- 接触節点2の接触面積は $\triangle jnG$ と $\triangle mjG$ の和
- 接触節点3の接触面積は $\triangle koG$ と $\triangle nkG$ の和
- 接触節点4の接触面積は $\triangle lpG$ と $\triangle olG$ の和

とする.

3. 接触解析

前述の通り、本研究の解析対象は、接触解析の中でも複合構造の異種材料間の界面であるため、大きな相対変位や接触節点探索は対象外とする. さらに異種材料の界面は初めは接触していることを前提とする. したがって接触する節点は自明となり、簡便な節点間接触⁷⁾の概念を利用できる. 節点間接触において、Lagrange 乗数法やpenalty 法などを取り入れた手法があるが、本研究ではpenalty 法を対象とする. また本手法においては有限要素法をベースにしているため、接触面以外の要素は結合しており、連続体として扱える. これより、有限要素法をベースとしpenalty 法を用いた節点間接触により、界面挙動を評価することができる.

(1) 節点間接触

ここでは、本研究で用いている節点間接触について説明する. またpenalty 法に基づく接触解析の定式化と支配方程式の線形化について示す.

a) 接触の幾何学的条件

接触に対する幾何学的拘束方程式を、図-4に示すようなある1つの節点ペア i に対して定式化する. ある時刻での節点間の距離を g_{N_i} とし、幾何学的接触拘束条件を考えると、物体が接触しているか離れていれよい. よって幾何学的接触拘束条件は、

$$g_{N_i} = (\mathbf{u}_i^2 - \mathbf{u}_i^1) \cdot \mathbf{n}_i^1 + g_i \geq 0 \quad (9)$$

となる. ここで、 $\mathbf{u}_i^1$ は物体 B^1 側の接触節点の変位ベクトル、 $\mathbf{u}_i^2$ は物体 B^2 側の接触節点の変位ベクトルである. また、 $\mathbf{n}_i^1$ は物体 B^1 における接触面の単位外向き法線ベクトルであり、外向き法線ベクトルはmaster要素からslave要素に向かうものとし、 g_i は節点間の初期距離である. 式(9)の変分は、初期距離が変位に対して独立であることを考慮すると、

$$\delta g_{N_i} = (\boldsymbol{\eta}_i^2 - \boldsymbol{\eta}_i^1) \cdot \mathbf{n}_i^1 \quad (10)$$

となる. ただし、 $\boldsymbol{\eta}_i^1$ 、 $\boldsymbol{\eta}_i^2$ はそれぞれ、

$$\boldsymbol{\eta}_i^1 = \delta \mathbf{u}_i^1, \quad \boldsymbol{\eta}_i^2 = \delta \mathbf{u}_i^2 \quad (11)$$

である.

b) penalty 法における節点間接触

まずLagrange 未定乗数法に対して、節点間接触の考え方を導入する. 仮想仕事式より拘束方程式は、

$$\delta(\lambda g) = \delta \lambda g + \lambda \delta g \quad (12)$$

となる. また、拘束方程式(12)の弱形式は

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} \lambda_N \delta g_{N_i} d\Gamma &\rightarrow \\ \sum_{i=1}^{n_c} \lambda_{N_i} \delta g_{N_i} A_i &= \sum_{i=1}^{n_c} \lambda_{N_i} (\boldsymbol{\eta}_i^2 - \boldsymbol{\eta}_i^1) \cdot \mathbf{n}_i^1 A_i \quad (13) \\ \int_{\Gamma_c} \delta \lambda_N g_{N_i} d\Gamma &\rightarrow \\ \sum_{i=1}^{n_c} \delta \lambda_{N_i} g_{N_i} A_i &= \sum_{i=1}^{n_c} \delta \lambda_{N_i} [(\mathbf{u}_i^2 - \mathbf{u}_i^1) \cdot \mathbf{n}_i^1 + g_i] A_i \\ &= 0 \quad (14) \end{aligned}$$

である. ここで、 Γ_c は接触境界を表わし、 n_c は Γ_c における接触節点ペア数である. 試行関数 $\boldsymbol{\eta}_i^\alpha$ と法線ベクトル $\mathbf{n}_i^1$ は節点ペア i に対して定義される. Lagrange 未定乗数 λ_{N_i} と節点ペア i あたりの接触面積 A_i の積は接触節点力であり、 λ_{N_i} は節点ペア i に関する接触応力である. 2つのベクトル $\hat{\boldsymbol{\eta}}_i$ 、 $\Delta \hat{\mathbf{u}}_i$ を導入することで拘束方程式のマトリクス表示が得られる. $\hat{\boldsymbol{\eta}}_i$ は変分 $\{\boldsymbol{\eta}_i^\alpha, \delta \lambda_i\}$ 、 $\Delta \hat{\mathbf{u}}_i$ は節点ペア i の増分であり、

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_i = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_i \\ \delta \lambda_i \end{Bmatrix}, \quad \Delta \hat{\mathbf{u}}_i = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_i \\ \Delta \lambda_i \end{Bmatrix}$$

$$\text{with } \boldsymbol{\eta}_i = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_i^2 \\ \boldsymbol{\eta}_i^1 \end{Bmatrix} \text{ and } \Delta \mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_i^2 \\ \Delta \mathbf{u}_i^1 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

で定義される．式 (15) を式 (12), (13), (14) に代入すると,

$$\int_{\Gamma_c} (\delta \lambda_N g_N + \lambda_N \delta g_N) d\Gamma \rightarrow \sum_{i=1}^{n_c} \left\{ \begin{Bmatrix} \lambda_{N_i} \boldsymbol{\eta}_i^T & \delta \lambda_{N_i} \mathbf{u}_i^T \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_i \\ \mathbf{C}_i \end{Bmatrix} + \delta \lambda_{N_i} g_i \right\} A_i \quad (16)$$

となる．ここに,

$$\mathbf{C}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_i^1 \\ -\mathbf{n}_i^1 \end{Bmatrix} \text{ and } \mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^2 \\ \mathbf{u}_i^1 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

である．さらに, 式 (16) を線形化すると,

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_i^T \mathbf{K}_i^{cL} \Delta \hat{\mathbf{u}}_i \quad (18)$$

を得る．ここで, 節点ペア i の接触力に対する接線剛性マトリクスとして,

$$\mathbf{K}_i^{cL} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_i \\ \mathbf{C}_i^T & \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

を用いた．

以上から, 本研究で用いる penalty 法に対する節点間接触を導く． penalty 係数 ϵ_N を用いて接触応力を

$$\lambda_N = \epsilon_N g_N \quad (20)$$

として式 (12) を書き換えると,

$$\int_{\Gamma_c} \epsilon_N g_N \delta g_N d\Gamma \rightarrow \sum_{i=1}^{n_c} \epsilon_N g_{N_i} \delta g_{N_i} A_i = \sum_{i=1}^{n_c} \boldsymbol{\eta}_i^T \epsilon_N g_{N_i} \mathbf{C}_i A_i \quad (21)$$

となる．接触により生じる内力は,

$$\mathbf{G}_i^c = \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{G}_i^{cP} \quad (22)$$

である．ここで,

$$\Delta \mathbf{G} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} \quad (23)$$

と定義すると接線剛性マトリクス $\mathbf{K}_i^{cP}$ は

$$\mathbf{G}_i^{cP} = \epsilon_N g_{N_i} A_i \mathbf{C}_i, \quad \mathbf{K}_i^{cP} = \epsilon_N A_i \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i^T \quad (24)$$

と表わすことができる．以下に三次元問題における接線剛性マトリクスの具体形を示す．三次元問題において, $\mathbf{C}_i$ は 6 つの成分を持っている．式 (24) から $\mathbf{G}_i^{cP}$ と $\mathbf{K}_i^{cP}$ は,

$$\mathbf{G}_i^{cP} = \epsilon_N g_{N_i} A_i \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ -n_x \\ -n_y \\ -n_z \end{Bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{K}_i^{cP} = \epsilon_N A_i \begin{Bmatrix} \mathbf{N} & -\mathbf{N} \\ -\mathbf{N} & \mathbf{N} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

となる．ただし,

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_z n_x \\ n_x n_y & n_y^2 & n_y n_z \\ n_z n_x & n_y n_z & n_z^2 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

であり, n_x, n_y, n_z はそれぞれ法線ベクトルの x, y, z 成分である．

(2) 接触力積分法

接触面における摩擦力, 付着力を考慮した接触力積分の定式化を return mapping 法⁹⁾により行う．

a) 速度形を用いた完全弾塑性ばねによる接触問題の定式化

静止摩擦係数を μ , 接触面に働く垂直抗力を f_3 とすると, クーロン則より最大静止摩擦力 $f_{\max}$ は,

$$f_{\max} = \mu f_3 \quad (28)$$

となる．ただし, f_3 は引張方向を正とする．接触している 2 節点の接線方向の相対変位を u_1, u_2 , 法線方向の相対変位を u_3 とする．これらは弾性部分 u^e , および塑性部分 u^p に分解できるとすると,

$$u_1 = u_1^e + u_1^p, \quad u_2 = u_2^e + u_2^p, \quad u_3 = u_3^e \quad (29)$$

と表わせる．ただし, 法線方向成分には塑性部分はないと考える．

接線方向の接触の剛性 (penalty 係数) を α_1, α_2 , 法線方向の接触の剛性 (penalty 係数) を α_3 とすると, 摩擦力 f_1, f_2 , および垂直抗力 f_3 はそれぞれ

$$f_1 = \alpha_1 u_1^e, \quad f_2 = \alpha_2 u_2^e, \quad f_3 = \alpha_3 u_3 \quad (30)$$

と表せる．

接線方向相対変位と摩擦力の関係を完全弾塑性と考えると, クーロン摩擦により降伏関数 ϕ は

$$\phi = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} - \mu |f_3| \leq 0 \quad (31)$$

となる．ただし, $f_3 \leq 0$ つまり圧縮方向に f_3 が作用している．

関連流れ則を仮定し, 塑性ポテンシャル ψ を

$$\psi = \phi = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} - \mu |f_3| \quad (32)$$

と定義する．すると, 整合パラメータ (γ) を用いて $\dot{u}^p$ は,

$$\dot{u}_1^p = \gamma \frac{\partial \psi}{\partial f_1} = \frac{f_1 \gamma}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} \quad (33)$$

$$\dot{u}_2^p = \gamma \frac{\partial \psi}{\partial f_2} = \frac{f_2 \gamma}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}$$

となる．ただし, $\dot{u}$ は変位を時間で微分したことを意味する．

弾性状態では相対変位が 0 である。つまり、塑性部分の相対変位は考える必要がなく $\dot{u}_1^p = \dot{u}_2^p = 0$ となり、式 (33) より $\gamma = 0$ 、塑性状態では降伏関数がゼロの状態であるため、降伏関数の速度は 0、つまり $\dot{\phi} = 0$ なので、整合条件 (consistency condition) は、

$$\gamma \dot{\phi} = 0 \quad (34)$$

である。塑性状態であるとき、

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{f_1^2 + f_2^2} - |\mu f_3|) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial f_1} \dot{f}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial f_2} \dot{f}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial f_3} \dot{f}_3 \\ &= \frac{f_1 \gamma}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} \alpha_1 \dot{u}_1^e + \frac{f_2 \gamma}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} \alpha_2 \dot{u}_2^e - \mu \alpha_3 \dot{u}_3^e \\ &= \frac{f_1 \alpha_1 (\dot{u}_1 - \dot{u}_1^p) \gamma}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} + \frac{f_2 \alpha_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_2^p) \gamma}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} \\ &\quad - \mu \gamma \alpha_3 \dot{u}_3 \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

となる。これを γ について解き、式 (33) に代入することで塑性部の変位が求まる。式 (29) の関係から弾性部の変位も求まり、摩擦力が計算される。

b) 増分形を用いた 3 次元接触問題における return mapping

まず、弾性試行状態を

$$(u_1^p)_{n+1}^{\text{tr}} = (u_1^p)_n \quad (36)$$

$$(u_2^p)_{n+1}^{\text{tr}} = (u_2^p)_n \quad (37)$$

$$(f_1)_{n+1}^{\text{tr}} = \alpha_1 \{(u_1)_{n+1} - (u_1^p)_n\} \quad (38)$$

$$(f_2)_{n+1}^{\text{tr}} = \alpha_2 \{(u_2)_{n+1} - (u_2^p)_n\} \quad (39)$$

$$(f_3)_{n+1}^{\text{tr}} = \alpha_3 u_3 \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}^{\text{tr}} &= \sqrt{\{(f_1)_{n+1}^{\text{tr}}\}^2 + \{(f_2)_{n+1}^{\text{tr}}\}^2} \\ &\quad - \mu |(f_3)_{n+1}| \end{aligned} \quad (41)$$

と定義する。ただし、 n と $n+1$ は弾性試行状態を考慮するステップ数を意味する。 $\phi_{n+1}^{\text{tr}} \leq 0$ のとき、すなわち弾性状態であるならば試行状態は正解となるから、

$$\begin{aligned} (f_1)_{n+1} &= (f_1)_{n+1}^{\text{tr}}, \quad (f_2)_{n+1} = (f_2)_{n+1}^{\text{tr}} \\ (u_1^p)_{n+1} &= (u_1^p)_{n+1}^{\text{tr}}, \quad (u_2^p)_{n+1} = (u_2^p)_{n+1}^{\text{tr}} \end{aligned} \quad (42)$$

を得る。

$\phi_{n+1}^{\text{tr}} > 0$ のとき、つまり塑性状態であるならば

$$\Delta\gamma > 0, \quad \phi_{n+1} = 0 \quad (43)$$

が成立しなければならない。よって $(f_1)_{n+1}$, $(f_2)_{n+1}$ を $(f_1)_{n+1}^{\text{tr}}$, $(f_2)_{n+1}^{\text{tr}}$, $\Delta\gamma$ を用いて

$$\begin{aligned} (f_1)_{n+1} &= \alpha_1 \{(u_1)_{n+1} - (u_1^p)_{n+1}\} \\ &= \alpha_1 \{(u_1)_{n+1} - (u_1^p)_n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\alpha_1 \{(u_1^p)_{n+1} - (u_1^p)_n\} \\ &= (f_1)_{n+1}^{\text{tr}} - \alpha_1 \Delta\gamma \frac{\partial \psi}{\partial f_1} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} (f_2)_{n+1} &= \alpha_2 \{(u_2)_{n+1} - (u_2^p)_{n+1}\} \\ &= \alpha_2 \{(u_2)_{n+1} - (u_2^p)_n\} \\ & \quad - \alpha_2 \{(u_2^p)_{n+1} - (u_2^p)_n\} \\ &= (f_2)_{n+1}^{\text{tr}} - \alpha_2 \Delta\gamma \frac{\partial \psi}{\partial f_2} \end{aligned} \quad (45)$$

と表す。塑性ポテンシャル ψ は、

$$\psi = \sqrt{(f_1^2 + f_2^2)} - \mu |f_3| \quad (46)$$

であり、

$$\frac{\partial \psi}{\partial f_1} = \frac{f_1}{\sqrt{(f_1^2 + f_2^2)}} \quad (47)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial f_2} = \frac{f_2}{\sqrt{(f_1^2 + f_2^2)}} \quad (48)$$

である。よって、降伏関数は

$$\begin{aligned} \phi_{n+1} &= (f_1)_{n+1}^2 + (f_2)_{n+1}^2 - |\mu (f_3)_{n+1}| \\ &= \left\{ \left\{ (f_1)_{n+1}^{\text{tr}} - \alpha_1 \Delta\gamma \frac{(f_1)^{\text{tr}}}{\sqrt{\{(f_1)^{\text{tr}}\}^2 + \{(f_2)^{\text{tr}}\}^2}} \right\}^2 \right. \\ & \quad \left. + \left\{ (f_2)_{n+1}^{\text{tr}} - \alpha_2 \Delta\gamma \frac{(f_2)^{\text{tr}}}{\sqrt{\{(f_1)^{\text{tr}}\}^2 + \{(f_2)^{\text{tr}}\}^2}} \right\}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & \quad - |\mu f_3| = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

と表わされる。これを $\Delta\gamma$ について解くと塑性部分の相対変位が求まり、式 (29) より全相対変位と塑性部分の相対変位の差が弾性部分の相対変位となる。求まった弾性部分の相対変位から接触力を計算する。

4. 計算例

異種材料間の接触解析を行う上で、接触界面での付着性状を把握することは重要である。本研究では、図 5-a のような頭付きスタッドを有する鋼・コンクリート複合構造の一部を取り出し、有限要素モデルによって解析を試みた。

解析モデルの要素数は 1396 (六面体要素)、節点数は 1918 とした。なお対称性を考慮して構造の一部をモデル化している。小川ら⁸⁾のせん断試験より得た値を用いてせん断方向 (接触面と平行) の付着力は 0.1 N/mm^2 、法線方向 (接触面と垂直) の付着力は 0.05 N/mm^2 と仮定する。また、鋼板の弾性係数を 206 kN/mm^2 、コンクリートの弾性係数を 29.0 kN/mm^2 とし、ポアソン比については、鋼板が 0.3、コンクリートが 0.2 とした。

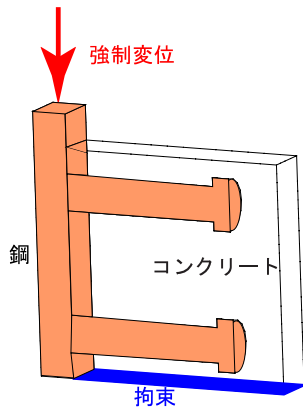


図-5-a 境界条件

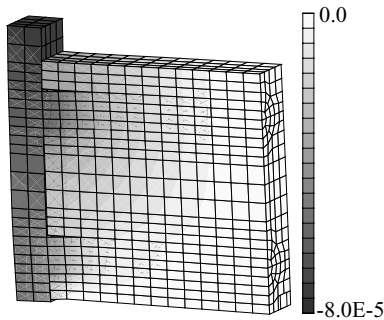


図-5-c 75step

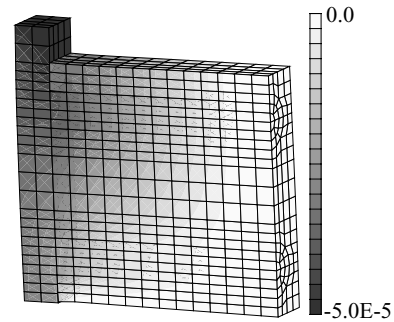


図-5-b 50step

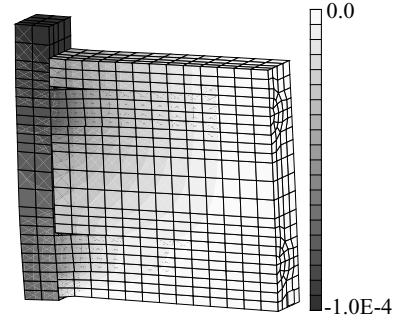


図-5-d 100step

図-5 解析モデルと解析結果

penalty 係数は接線，法線方向共に鋼の材料定数の約 5 倍のオーダーで定義する．なお，鋼とコンクリート間の摩擦はここでは考慮せずに，ゼロとする．

図-5-aに示すようにコンクリート下部を3方向とも拘束し，鋼板の上端の節点に強制変位を鉛直下方向に与えた．図-5-bは50stepで強制変位が約 5.0×10^{-5} ，図-5-cは75stepで強制変位が約 8.0×10^{-5} ，図-5-dは100stepで強制変位が約 1.0×10^{-4} でのコンター図である．なお，これらの図におけるコンターは鉛直方向の変位を示しており，変形図は変位を 10^4 倍して表わしている．強制変位が増えていくごとに，鋼とコンクリートの界面においてコンターが不連続になっていくことから，鋼とコンクリートが剥離していったことがわかる．

これらの結果を見ることで，本研究のアルゴリズムにより生成された接触解析用モデルは，異種材料間の節点が重複節点と定義され，接触面情報が算出されている，つまり接触解析を行うためのモデル化が正確であることがわかる．

5. おわりに

本研究では，簡便に接触解析を行うことができるように，接触解析の欠点であるモデル化の負荷を軽減するための複合構造に特化した3次元モデル化処理方法の構築を行った．また，ユーザーにとって扱いやすく，最も汎用性のある有限要素モデルをベースとした解析手法と生成されたモデルを用いて，接触問題の基礎的な挙動を確認することができた．

今後の課題として，まず，界面において摩擦力を考慮した場合の解析に対応したプログラム作成が挙げられる．また，本解析方法では，節点間接触の考え方を取り入れているため，接触節点は，最初から接触している必要があること，また，有限要素モデルを作成する際には，異種材料間の界面において，メッシュのサイズを同一のものにしないなど条件を満たさなくてはならない．このような欠点を解消する1つの方法として，節点，要素間接触の考え方が考案されている⁷⁾．節点，要素間接触の考え方を導入すれば，接触界面が複雑な形状をしている場合においても，より簡便にモデルを作成することができると考えられる．

参考文献

- 1) Chen, G., Baker, G.: Influence of Bond Slip on Crack Spacing in Numerical Modeling of Reinforced Concrete, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, pp. 1514–1521, 2003.
- 2) 中島章典, 西村美也子, 斉木功, 大江浩一: 鋼・コンクリート接触面の支圧摩擦性状に及ぼす支圧負荷方法の影響, 鋼構造論文集, Vol.12, No.45, pp.185-192, 2005.3.
- 3) 中島章典, 藤澤知樹, 斉木功, 大江浩一: 鋼・コンクリート接触面の付着に及ぼす支圧およびスタッドの影響, 土木学会第 58 回年次学術講演会講演概要集, I-488, 2003.9.
- 4) 中島章典, 木下幸治, 斉木功, Miah, M.K, 大江浩一, 酒井吉永: 両振り載荷によるスタッドの静的および疲労強度, 鋼構造論文集, Vol.10, pp.31-41, 2003.3.
- 5) 竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄, 川井忠彦: ペナルティを用いたハイブリット型モデルによる離散化極限解析, 構造工学論文集, Vol.46A, pp.261–270, 2000.
- 6) 竹内則雄, 大木裕介, 上林厚志, 草深守人: ハイブリット型変位モデルにペナルティ法を適用した離散化モデルによる 材料非線形解析, 日本計算工学論文集, Vol. 3, No.2001002, pp.53–62, 2001.
- 7) Wrigers, P : *Computational Contact Mechanics*, Wiley, 2002.
- 8) 小川大介, 斉木功, 中島章典: 複合構造の解析に適した簡便な接触解析手法の基礎的検討, 第 31 回関東支部技術発表会講演概要集, 2004.3.
- 9) J.C Simo T.J.R Hughes: *Computational Inelasticity*, Springer, 1998.

A CONSIDERATION ON MODELING OF INTERFACE FOR FINITE ELEMENT CONTACT ANALYSIS OF HYBRID STRUCTURE

Makoto SAITO, Isao SAIKI, Akinori NAKAJIMA

The hybrid structures composed by steel and concrete have advantage in their performance comparing to the structures made of individual material. Since the advantage of the hybrid structures is guaranteed by mechanical integration of steel and concrete members, it is important to clarify the behavior of the interface of steel and concrete for its rational design. However, the finite element contact analysis that can take into account the influence of the interface requires complicated modeling for engineer and high computational cost. In this context, we propose an algorithm to construct contact elements for finite element node-to-node contact analysis.