

(32) 不完全合成板の固有振動周期の
簡易算定式について

SIMPLIFIED EVALUATIONS OF NATURAL PERIODS OF PARTIAL COMPOSITE PLATES

佐藤浩一・ 林川俊郎・ 小幡卓司・ 平澤秀之……
By Koichi SATO, Toshiro HAYASHIKAWA,
Takashi OBATA and Hideyuki HIRASAWA

This paper offers a set of partial differential equations designed to enable flexural vibration analysis of partial(incomplete) composite plates consisting of two layers of isotropic materials. The paper also analyzes the relationship of period among complete composite plates, partial composite plates, and individual plates that do not interact with regard to simply supported rectangular composite plates. $\alpha=1$ signifies complete composite plates. $0<\alpha<1$ signifies partial composite plates. $\alpha=0$ signifies individual plates that do not interact. The paper also submits a diagram that represents the essential features of the period characteristics of simply supported rectangular partial composite plates suitable for design purposes. Period can be derived by the use of the diagram without difficulty.

1. まえがき

現在用いられている鋼とコンクリートとの合成構造物の設計ガイドラインとして、最近、文献¹⁾が出版され、異種材料を合成し合成構造物として設計することが今後益々重要になるものと思われる。

例えば、橋梁における合成構造物の一つに鋼とコンクリート床版とを頭つきスタッドジベルで完全に剛に一体として結合した合成桁あるいは合成床版などがあるが、実際は完全合成と重ねの中間の挙動を示す不完全合成桁あるいは不完全合成板である。不完全合成桁の静的解析については多くの研究があり^{2)~12)}、また、不完全合成板についての研究報告もある^{13)~18)}。

本論文では、鋼板とコンクリート床版からなる合成板に限定せず、等方性材料であるが、弾性係数、ポアソン比、板厚等の異なる二枚の板を接着剤で合成した合成板(二層板)を考える。合成桁において離散的に配置された頭つきスタッドジベルの変形を考慮する場合はこの離散的配置をならして同じ強さの連続的配置に置換して解析するので⁶⁾、頭つきスタッドジベルの代わりに連続的配置の接着剤を用い

* 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科 ** 工博 北海道大学助教授 工学部土木工学科
*** 北海道大学助手 工学部土木工学科 **** 工修 北海道大学助手 工学部土木工学科

ることができるものと考え、接着剤が完全に剛であるならば、完全合成板と考える。ここでは接着剤は完全に剛でなくその変形を考慮した場合の合成板について考察する（以下、不完全合成板という）。このような不完全合成板の静的解析と全体座屈解析^{19), 20)}とが合成板の合成度を用いて系統的に解析できることを示している²⁴⁾。一方、このような不完全合成板の振動問題についての研究報告はあまりないようである。そこで、本論文は振動問題について考察し、理論式を誘導し、固有周期を求め、更に、四辺単純支持板の場合に、定量的に固有周期を求めることができるように、無次元量として α, β, γ なるパラメータを用いたのでそれを説明し、数値解析により不完全合成板の固有周期特性を示す。無次元量の $\alpha=1$ の場合が完全合成板であり、 $0<\alpha<1$ の場合が不完全合成板であり、 $\alpha=0$ の場合が重ね二層板であることを示すものである。これらの無次元量 α, β, γ なるパラメータが前述の静的解析と全体座屈解析の場合と同一のパラメータであることを示す。さらに、不完全合成板の静的解析、全体座屈解析、振動解析が系統的にできることを示すものである。

2. 本論文で用いる主な記号

図-1、2 は本解析で用いる第1板と第2板とが接着剤で合成された長方形板（合成板）を示している。また、本論文で用いる主な記号は次の通りである。

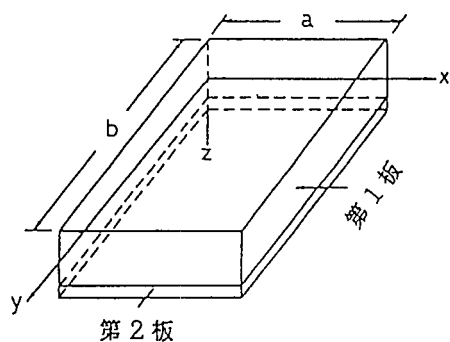


図-1 合成板の座標

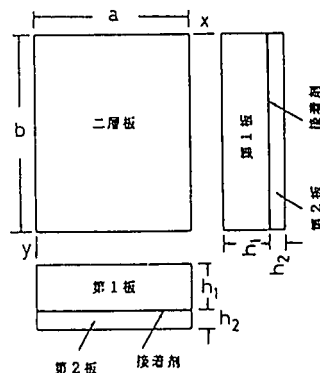


図-2 合成板

A_1 = 第1板の単位幅あたりの断面積、 A_2 = 第2板の単位幅あたりの断面積、 $A_v = A_2 + A_1/\bar{n}$ = 第2板に換算した単位幅あたりの合成断面積、 $D_v = \bar{E}_2 I_v$ = 完全合成板の単位幅あたりの換算板剛性、 E_1 = 第1板のヤング率、 E_2 = 第2板のヤング率、 $\bar{E}_1 = E_1/(1-\nu_1^2)$ 、 $\bar{E}_2 = E_2/(1-\nu_2^2)$ 、 h_1 = 第1板の板厚、 h_2 = 第2板の板厚、 I_1 = 第1板のその重心Cに関する単位幅あたりの断面二次モーメント、 I_2 = 第2板のその重心Sに関する単位幅あたりの断面二次モーメント、 $I_v = I_2 + I_1/\bar{n} + A_v s_1 s_2$ = 第2板に換算した合成断面の単位幅あたりの断面二次モーメント、 K = 単位長さあたりの接着剤のばね定数 ($K=0$ の場合は重ね二層板、 $0<K<\infty$ の場合は不完全合成板、 $K=\infty$ の場合は完全合成板)、 $\bar{n} = \bar{E}_2/\bar{E}_1$ ¹³⁾、 $M_{vx}(x,y)$ = 完全合成板の単位幅あたりの x 方向の曲げモーメント、 $M_{vy}(x,y)$ = 完全合成板の単位幅あたりの y 方向の曲げモーメント、 $p_z(x,y)$ = 荷重強度、 s = 第1板の重心Cと第2板の重心Sとの距離、 $s_1 = A_2/A_v \times s$ = 合成断面の中立軸Vと第1板の重心Cとの距離、 $s_2 = A_1/(\bar{n} A_v) \times s$ = 合成断面の中立軸Vと第2板の重心Sとの距離、 $w_v(x,y)$ = 完全合成板のたわみ、 $w_{ve}(x,y)$ = 不完全合成板のたわみ、 α, β, γ = 無次元量パラメータ、 ν = 合成板のポアソン比、 ν_1 = 第1板の単板としてのポアソン比、 ν_2 = 第2板の単板としてのポアソン比。

3. 不完全合成板の曲げ振動の偏微分方程式

不完全合成板の面外荷重が作用する場合の基礎偏微分方程式は与えられている^{16), 17)}。これを基に不完全合成板の曲げ振動に関する運動方程式をD'Alembertの原理を用いて導く。 w を単位長さあたりの不完全合成板の重量、 g を重力加速度とすれば、曲げ振動に関する基礎偏微分方程式は次式によって与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^4 w_v(x, y, t) = - \frac{w}{D_v \cdot g} \frac{\partial^2 w_v(x, y, t)}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^4 w_e(x, y, t) - \kappa^2 \nabla^2 w_e(x, y, t) = - \frac{w}{D_e \cdot g} \frac{\partial^2 w_e(x, y, t)}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (2)$$

接着剤のばね定数 K は Newmark²⁾ による押し抜きせん断試験により求めるものとし

$$\kappa^2 = K \frac{\bar{n} I_v}{\bar{n} I_2 + I_1} \frac{\bar{n}}{\bar{E}_2 A_1} \frac{s}{s_1} \quad (3)$$

とおく^{16), 17)}。この κ は本論文での重要なパラメータの一つである。

式(1), 式(2)を与えられた境界条件、初期条件のもとで解けば、不完全合成板の自由振動の解析が出来る。解の形を次のようにおく²¹⁾。

$$\left\{ \begin{array}{l} w_v(x, y, t) = W_v(x, y) \cdot \sin \omega_v t = X_v(x) \cdot Y_v(y) \cdot \sin \omega_v t \\ w_e(x, y, t) = W_e(x, y) \cdot \sin \omega_e t = X_e(x) \cdot Y_e(y) \cdot \sin \omega_e t \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_v(x, y, t) = W_v(x, y) \cdot \sin \omega_v t = X_v(x) \cdot Y_v(y) \cdot \sin \omega_v t \\ w_e(x, y, t) = W_e(x, y) \cdot \sin \omega_e t = X_e(x) \cdot Y_e(y) \cdot \sin \omega_e t \end{array} \right. \quad (5)$$

長方形板の境界条件が四辺単純支持の場合、板のたわみ曲面を二重フーリエ級数で表示する。これを式(1)に代入すれば、有意解として次式を得る。

$$\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \frac{w}{D_v \cdot g} \omega_v^2 = 0 \quad (6)$$

同様に、式(2)に代入すれば、有意解として、次式を得る。

$$\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} + \kappa^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) - \frac{w}{D_e \cdot g} \omega_e^2 = 0 \quad (7)$$

式(6)より次式を得る。

$$\omega_v^2 = \pi^4 \mu_{mn}^4 \cdot \frac{D_v \cdot g}{w} \quad (8)$$

同様に、式(7)より次式を得る。

$$\omega_e^2 = \pi^4 \mu_{mn}^4 \cdot \frac{D_e \cdot g}{w} + \pi^2 \mu_{mn}^2 \cdot \kappa^2 \cdot \frac{D_e \cdot g}{w} \quad (9)$$

ここで、

$$\mu_{mn}^2 = \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \quad (10)$$

($m=1, 2, 3, \dots$ and $n=1, 2, 3, \dots$)

次に、 $T = 2\pi/\omega$ であるから、式(8), 式(9)より 固有周期の2乗は次式のように求まる。

$$T_v^2 = \frac{4\pi^2}{\pi^4 \mu_{mn}^4} \frac{w}{D_v \cdot g} \quad (11)$$

$$T_e^2 = \frac{4\pi^2}{\pi^4 \mu_{mn}^4} \frac{w}{D_e \cdot g} \frac{1}{1 + \kappa^2 / (\pi^2 \mu_{mn}^2)} \quad (12)$$

固有周期は μ_{nn}^2 に反比例、 w の平方根に比例、 $\bar{E}_2$ 、 I_v 、と g の平方根に反比例する。
 第一項のみをとり²²⁾、次のような比、 $(T_e/T_v)^2$ 、をとる。

$$\gamma_{11} = \left(\frac{T_e}{T_v} \right)^2 = \frac{D_v}{D_e} \cdot \beta_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot \beta_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot (1 - \alpha_{11}) \quad (13)$$

ここで、

$$\beta_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2}{\pi^2 \mu_{11}^2}} = 1 - \alpha_{11} \quad (14)$$

式(13)、式(14)のパラメータは文献²³⁾で示した静的解析および全体座屈解析のパラメータと同一であることが判る。従つて、無次元量 α_{11} 、 β_{11} 、 γ_{11} さえ求めれば、静的解析、全体座屈解析、振動解析を系統的にできることを示している。次に、不完全合成板の固有周期 T_v は次式で得られる。

$$T_{ve} = \sqrt{T_v^2 + T_e^2} = T_v \sqrt{1 + (T_e/T_v)^2} \quad (15)$$

式(15)における T_v および T_{ve} の "v" および "ve" はそれぞれ完全合成板および不完全合成板を意味している。

4. 四辺単純支持の不完全合成板の固有周期特性

図-3は α_{11} と κa との関係を示したものである。縦軸は α_{11} であり、横軸は κa である。
 α_{11} は式(14)で得られ、合成板の合成度を示している。一方、式(3)で定義される κ は重要な定数であり、この κ に辺長 "a" を乗ずれば、 κa は無次元量となる。固有振動特性を調べるために重要な値である。

CCP= Complete Composite Plate
 ICP= Incomplete Composite Plate
 NCP= Individual Plates

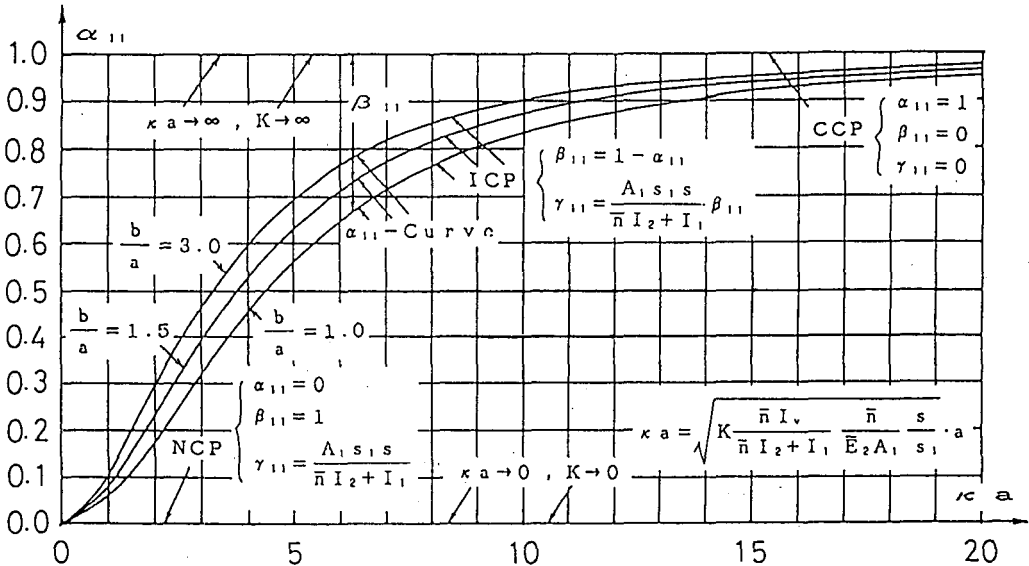


図-3 不完全合成板の α_{11} 曲線

次に、図-3の使い方を説明しよう。最初に、断面諸元を与え、式(3)を用いて κ の値を求め、この κ に辺長 "a" を乗ずる。二番目に κa の値をプロットして図上で α_{11} を求める。従って、 $\beta_{11} = 1 - \alpha_{11}$ も求めることができる。三番目に γ_{11} を $A_1 s_1 s / (\bar{n} I_2 + I_1) \cdot \beta_{11}$ で求める。最後に、この γ_{11} を式(15)の T_{ve} に代入すれば、不完全合成板の場合の固有周期が求まる。

更に、数値計算例によって説明しよう。材料は特に指定しない。不完全合成板の一般的な諸元は次のようであるとする(図-1、2参照)。長方形板の寸法は $a \times b = 150\text{cm} \times 450\text{cm}$,

$w = 0.03526\text{kgf/cm}^2$, $E_2 = 2100000\text{kgf/cm}^2$, $g = 980\text{cm/sec}^2$, $I_{12} = 24.81\text{cm}^4/\text{cm}$, $I_{12v} = 20.69\text{cm}^4/\text{cm}$,

$K = 866\text{kgf/cm/cm}$ (仮定する), $h_1 = 13\text{cm}$, $h_2 = 0.6\text{cm}$, $\bar{n} = 7.385$, $\nu = 0.3$ (仮定), $\nu_1 = 0.2$,

$\nu_2 = 0.3$, $s = 6.8\text{cm}$, $s_1 = 1.73\text{cm}$, $s_2 = 5.07\text{cm}$, $A_1 = 13.0\text{cm}^2/\text{cm}$, $A_2 = 0.6\text{cm}^2/\text{cm}$,

$A_v = 2.360\text{cm}^2/\text{cm}$, $I_1 = 183.1\text{cm}^4/\text{cm}$, $I_2 = 0.018\text{cm}^4/\text{cm}$, $I_v = 45.50\text{cm}^4/\text{cm}$,

$D_v = 1.050 \times 10^8\text{kgf} \cdot \text{cm}^2/\text{cm}$.

これらの諸元を用いれば、式(3)を用いて、 $\kappa = 0.0392/\text{cm}$, $\kappa a = 5.8826$ と求まり、 $\beta_{11} = 0.2406$, $\alpha_{11} = 0.7594$, $\gamma_{11} = 0.2007$ と求まる。完全合成板の場合の固有周期は $T_v = 0.007546\text{ sec}$ と求まる。不完全合成板の場合の固有周期は $T_{ve} = 0.008269\text{ sec}$ と求まる。この値は $T_v = 0.007546\text{ sec}$ を $\sqrt{(1 + \gamma_{11})}$; 即ち、1.0958 を乗ずれば、 $T_{ve} = 0.008269\text{ sec}$ と求まる。

以上の数値計算例からもわかるように、パソコンと公式集²⁴⁾ などがあれば簡単に計算できる本提案の方法は実用上の固有周期を求める場合に便利である。

5. あとがき

(1) 本論文は不完全合成板の振動解析の偏微分方程式を示し、四辺単純支持の場合に、定量的に固有周期を求めることができるように、無次元量 α_{11} , β_{11} , γ_{11} を導入した。この無次元量は静的解析、全体座屈解析、振動解析に利用できることが判明した。

(2) 本論文は四辺単純支持の完全合成板、不完全合成板、重ね二層板の固有周期の相互関係を明らかにした。

$\beta_{11} = 0$, 即ち, $\alpha_{11} = 1$, $\gamma_{11} = 0$, の場合は完全合成板である。

$0 < \beta_{11} < 1$, 即ち, $\alpha_{11} = 1 - \beta_{11}$, $\gamma_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \beta_{11}$, の場合は不完全合成板である。

$\beta_{11} = 1$, 即ち, $\alpha_{11} = 0$, $\gamma_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1}$, の場合は重ね二層板である。

ここで、 α_{11} は合成板の合成度を意味し、 $\beta_{11} = 1 - \alpha_{11}$ を意味し、 γ_{11} は完全合成板を基準にした場合の増加分を意味している。

(3) 本論文は四辺単純支持の完全合成板、不完全合成板、重ね二層板の固有周期を求める図を提案している。この図を用いれば、固有周期 T_{ve} を簡単に求めることができる。

参考文献

- 1) 土木学会編：鋼・コンクリート合成構造の設計ガイドライン、1989。
- 2) Newmark, N.M., Siess, C.P., and Viest, I.M.: Tests and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction, Proc. of the Society for Experimental Analysis, Vol.9, No.1, pp.75-93, 1951.
- 3) 山本 稔：不完全合成桁の曲げ理論、土木学会論文集、No.67, pp.1-10、1960年3月。
- 4) 橋 善雄・足立義雄：不完全合成桁について、土木学会論文集、No.112, pp.11-19、1964年12月。

- 5) 構造力学公式集、土木学会編、1986.
- 6) A.ハウラネック / O.シュタインハルト：鋼橋の理論と計算（橋 善雄、小松定夫共訳）、山海堂、1965.
- 7) 島田静雄・熊沢周明：合成桁の理論と設計、山海堂、1973.
- 8) 浜田純夫・有住康則：不完全連続合成桁の有限要素解析、土木学会論文報告集、第265号、pp.1-9、1977年 9月.
- 9) 小松定夫・佐々木孝：不完全合成桁の理論と近似計算法について、土木学会論文報告集、第329号、pp.27-37、1983年 1月.
- 10) 中井 博編：プレキャスト床版合成桁橋の設計・施工、森北出版、1988.
- 11) 佐藤浩一・渡辺 昇：差分方程式の剛性マトリックス解析法について、土木学会北海道支部論文報告集、第44号、pp.87-92、1988.
- 12) 井上稔康・佐藤浩一・渡辺 昇：不完全合成桁の差分剛性マトリックス解析法について、構造工学論文集 Vol.36A、pp.1223-1236、1990.
- 13) J.L.Clarke and C.T.Morley：Steel-Concrete Composite Plates with Flexible Shear Connectors, Proc. Inst. Civ.Engrs, Vol.53, Part2, pp.557-568, Dec.,1972.
- 14) 佐藤浩一・渡辺 昇・井上稔康：不完全合成桁と合成板の解析理論の相似性について、土木学会北海道支部論文報告集、第45号、pp.55-60、1989.
- 15) 佐藤浩一・渡辺 昇・井上稔康：不完全合成板の解析理論の比較について、土木学会第44回年次学術講演会、pp.288-289、1989.
- 16) 井上稔康・佐藤浩一・渡辺 昇：不完全合成板の解析について、構造工学論文集 Vol.36A、pp.1245-1258、1990.
- 17) Koichi SATO：Composite Plates of Concrete Slabs and Steel Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 117(12), pp.2788-2803, 1991.
- 18) 山口惣也・浜田純夫・高海克彦：不完全合成板の有限要素解析、構造工学論文集 Vol.39A、pp.1259-1268、1993.
- 19) 佐藤浩一：接着剤の弾性変形を考慮した等方性二層板の弾性座屈荷重について、構造工学論文集 Vol.38A、pp.1309-1320、1992.
- 20) Koichi SATO：Elastic Buckling of Incomplete Composite Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 118(1), pp.1-19, 1992.
- 21) Rudolph Szilard：Theory and Analysis of Plates, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- 22) 佐藤浩一：不完全合成板の簡易計算法について、土木学会第47回年次学術講演会、pp.332-333、1992.
- 23) 佐藤浩一：合成二層板の合成度に関する実用的評価式について、構造工学論文集 Vol.39A、pp.1289-1301、1993.
- 24) 関谷 壮・浜田 実・角 誠之助編：平板構造強度設計便覧、朝倉書店、1982.