

(30) 集中荷重を受ける不完全合成桁の不完全度の簡易推定法

SIMPLIFIED ESTIMATION PROCEDURE OF DEGREE OF IMPERFECTION FOR COMPOSITE GIRDER WITH PARTIAL INTERACTION UNDER CONCENTRATED LOAD

中島章典* 溝江慶久**

By Akinori NAKAJIMA and Yoshihisa MIZOE

The objective of this paper is to propose a simplified procedure of estimating a degree of imperfection for a composite girder with partial interaction under a concentrated load, using a solution obtained by solving a differential equation of the girder. A logarithms plots between a rigidity of shear connectors and a parameter composed of the sectional properties and the girder span are used, in estimating a degree of imperfection for the composite girder having a uniform cross section.

As a result, it is clear that the fiber stresses of the composite girder with partial interaction can be predicted by employing the estimated degree of imperfection and that an efficiency of this method is confirmed.

1. はじめに

合成桁においては、ずれ止めの弾性変形のために、理想的な完全合成を期待することはできない。一方、非合成桁においても、実際にはコンクリート床版と鋼桁とはある程度一体となって働いている。このように、完全合成桁と非合成桁の間の挙動を呈するのがいわゆる不完全合成桁である。

不完全合成桁については、従来から様々な研究が行われてきた^{1)~6)}。その中で、小松・佐々木⁶⁾は、不完全合成格子桁橋を設計するに際して、フレキシビリティ定数 s なるずれ止め剛度の無次元量を定義して、不完全度を考慮した検討を行っている。しかし、この研究で用いられた不完全度は典型的な鋼合成桁橋に用いられるずれ止め剛度を用いて基準化したものであり、任意のプロポーシヨンの不完全合成桁に適用するには限界があると考えられる。

したがって、種々の単位長さあたりのずれ止め剛度や断面諸量およびスパンを有する不完全合成桁の不完全度を簡易に知るためには、少なくとも不完全合成理論に基づいて得られた解析解を用いて、コンクリート床版と鋼桁に相互に作用する軸力やずれ止めの受け持つ水平せん断力を求めなければならない。しかし、任意のプロポーシヨンをもち不完全合成桁の不完全度が、不完全合成理論の解析解を用いることなく簡易に推定できれば、合成桁あるいは非合成桁の設計において、応力等を推定する上で有効であると考えられる。

このような背景のもとに、本研究では、断面諸量とスパンおよびずれ止め剛度が与えられたときの不完全合成桁の不完全度、つまり完全合成と非合成との間のどの程度の合成効果を有しているかを、わずかな計算とグラフを用いることで、簡易に推定する方法を提案した。ここでは、例として、集中荷重を受ける等断面の不完全合成

* 正会員 工博 宇都宮大学助教授 工学部建設学科建設工学コース

** 学生会員 宇都宮大学大学院 工学研究科建設学専攻

単純桁を対象とし、軸力、水平せん断力を推定する方法を示した。

2. 不完全合成桁の基礎方程式

まず、不完全合成桁の基礎方程式を導くにあたり、図1に示す長さ dx の微小桁要素を考えた。ここで、 N_C 、 M_C はそれぞれ、コンクリート床版に作用する軸力および曲げモーメントであり、 N_S 、 M_S はそれぞれ、鋼桁に作用する軸力および曲げモーメントである。さらに、 T はコンクリート床版と鋼桁間に作用する水平せん断力であり、 δ はコンクリート床版と鋼桁間のずれを表している。この図から変形の適合条件、水平方向の力のつり合い、曲げモーメントのつり合い、コンクリート床版と鋼桁の曲率が全長にわたって一致するという4つの条件式を組み合わせることによって、不完全合成桁に関する基礎方程式

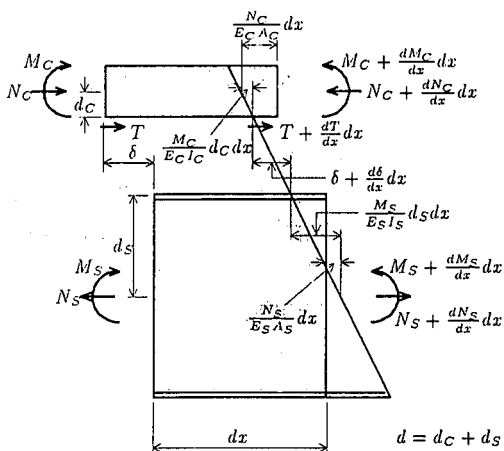


図1 不完全合成桁の微小区間での変形とつり合い

$$\frac{d^2 N}{dx^2} - \omega^2 N = -\gamma M_0 \quad (1)$$

を導くことができる^{1), 3)}。ここに、 N は不完全合成時にコンクリート床版および鋼桁に相互に作用する軸力であり、 M_0 は外力曲げモーメントである。また、 ω 、 γ は、

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{1}{E_C A_C} + \frac{1}{E_S A_S} + \frac{d^2}{E_C I_C + E_S I_S} \right) C} \quad (2)$$

$$\gamma = \frac{d}{E_C I_C + E_S I_S} C \quad (3)$$

であり、断面諸量 (E_C 、 A_C 、 I_C はそれぞれ、コンクリート床版の弾性係数、断面積、断面2次モーメントであり、 E_S 、 A_S 、 I_S はそれぞれ、鋼桁の弾性係数、断面積、断面2次モーメントであり、 d は床版の中立軸と桁の中立軸との間の距離である) および単位長さあたりのずれ止め剛度 C によって決まる形となっている。そして、この微分方程式を解くことにより、不完全合成桁に生ずる軸力の式を得ることができる。

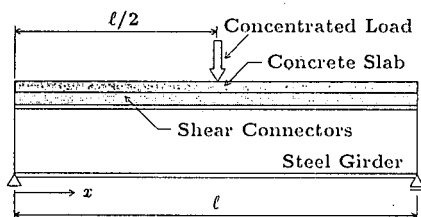


図2 径間中央部に集中荷重を受ける単純桁の形状

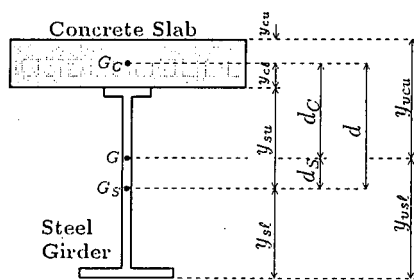


図3 等断面桁の断面形状

3. 軸力による不完全度の推定

(1) 径間中央部に集中荷重を受ける等断面単純桁

一例として、図2に示す径間中央部に集中荷重を受ける等断面単純桁について、軸力による不完全度の推定に関する検討を行った。解析に用いた断面形状は、図3に示すとおりである。図中の G は、鋼換算断面の重心を示しており、 G_C 、 G_S はそれぞれコンクリート床版および鋼桁の重心を示している。式(1)を境界条件を用い

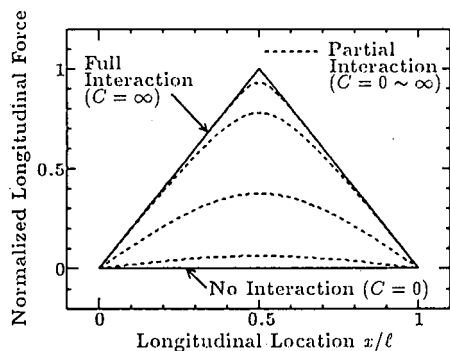


図4 径間中央部に集中荷重を受ける単純桁の軸力分布

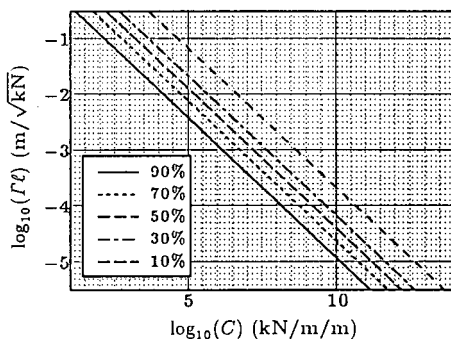


図5 径間中央部に集中荷重を受ける単純桁の軸力による桁特性とずれ止め剛度の関係(着目点: 径間中央部)

て解き、軸力の式を求め、これを用いて橋軸方向に軸力分布を描いたのが図4である。ここでは、単位長さあたりのずれ止め剛度 C は全スパンにわたって一定としている。この図から、ずれ止め剛度の増加にともなって、非合成時の軸力分布から完全合成時の軸力分布へ移行することがわかる。

ここで、図4に示す軸力分布を描くために、式(1)を解いて求めた軸力の式を変形をすると、

$$N_i = N_{0i}(1 - R_{Ni}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

と表せる。ここに、 N_i 、 N_{0i} はそれぞれ不完全合成時および完全合成時にコンクリート床版および鋼桁に作用する軸力であり、 R_{Ni} は不完全な合成効果による軸力の低減率である。さらに、下付き添字 $i (= 1, 2)$ は図2に示す荷重載荷位置の左右の領域(左 = 1, 右 = 2)に対応する。すなわち、 R_{Ni} が不完全合成桁の不完全度を示しており、 R_{Ni} が0から1に変化するにつれ、完全合成時の軸力($N_i = N_{0i}$)から非合成時の軸力($N_i = 0$)に移行するのである。この場合の R_{Ni} の式を具体的に示せば、

$$0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} \quad R_{N1} = \frac{1}{\omega x} \frac{\sinh \omega x}{\cosh \omega \frac{\ell}{2}} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell \quad R_{N2} = \frac{1}{\omega(x - \ell)} \frac{\sinh \omega(x - \ell)}{\cosh \omega \frac{\ell}{2}} \quad \dots\dots\dots (6)$$

と表される。ここに、 x は左端からの橋軸方向位置、 ℓ はスパン長であり、 ω は式(2)で与えられる。ここで、不完全度を推定する着目点 $x (= \xi \ell)$ を決め、式(2)の ω のうち、ずれ止め剛度 C を除いた部分を次式のように Γ とおく。

$$\Gamma = \sqrt{\frac{1}{E_C A_C} + \frac{1}{E_S A_S} + \frac{d^2}{E_C I_C + E_S I_S}} \quad \dots\dots\dots (7)$$

これより、 R_{Ni} は Γ とスパン ℓ の積 $\Gamma \ell$ (以下、桁特性と呼ぶ) および単位長さあたりのずれ止め剛度 C によって与えられる関数として整理される。

例えば、着目点 x を図4で最大軸力が得られた径間中央部とし、式(5)から R_{N1} を求めると、

$$R_{N1} = \frac{2}{\Gamma \ell \sqrt{C}} \tanh \left(\frac{1}{2} \Gamma \ell \sqrt{C} \right) \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。これを用いて R_{N1} が0.9, 0.7, 0.5, 0.3, 0.1になる時、すなわち軸力 N_1 が完全合成時の10 ~ 90%に低減する場合の桁特性 $\Gamma \ell$ と単位長さあたりのずれ止め剛度 C の関係を両者の常用対数をとって示したのが図5である。いずれの低減率においても、この関係は線形となっており、また、左側に位置している直線の方が不完全度が大きいことがわかる。これより、不完全合成桁の断面諸量とスパンおよび単位長さあたりのずれ止め剛度が与えられれば、図5において、縦軸と横軸の値の交わる点を見るだけで、容易に軸力をパラメータとした不完全度を推定することができる。

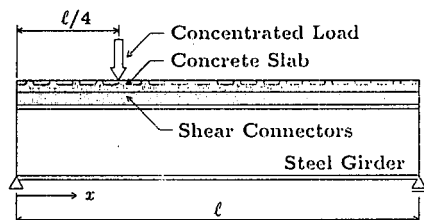


図6 スパン1/4点に集中荷重を受ける単純桁の形状

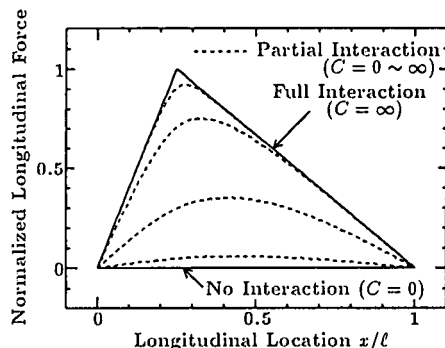


図7 スパン1/4点に集中荷重を受ける単純桁の軸力分布

また、逆に、不完全合成時の軸力は、推定した不完全度 R_{Ni} と完全合成時の軸力 N_{0i} を用いて式(4)より容易に求められる。

(2) スパン1/4点に集中荷重を受ける等断面単純桁

次に、荷重載荷位置を径間中央部ではなく、図6に示すスパン1/4点とした場合を考える。

式(1)を境界条件を用いて解き、軸力の式を求め、これを用いて橋軸方向に軸力分布を描いたのが図7である。ここでも、単位長さあたりのずれ止め剛度 C は全スパンにわたって一定としている。荷重載荷位置が径間中央部である場合と同様、ずれ止め剛度の増加にともなって、非合成時の軸力分布から完全合成時の軸力分布へ移行することがわかる。

ここで、図7に示す軸力分布を描くために、式(1)を解いて

求めた軸力の式を変形すると、式(4)と同様な形に整理され、この場合の軸力の低減率 R_{Ni} を示せば、

$$0 \leq x \leq \frac{\ell}{4} \quad R_{N1} = \frac{4}{3\omega x} \frac{\sinh \frac{3}{4}\omega\ell}{\sinh \omega\ell} \sinh \omega x \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{\ell}{4} \leq x \leq \ell \quad R_{N2} = \frac{4}{\omega(x-\ell)} \frac{\sinh \frac{1}{4}\omega\ell}{\sinh \omega\ell} \sinh \omega(x-\ell) \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。これより、上式の R_{Ni} は式(7)で表される Γ とスパン ℓ の積、すなわち桁特性と、単位長さあたりのずれ止め剛度 C を用いて整理できる。したがって、軸力が低減する場合の桁特性とずれ止め剛度の間には直線関係が成り立つ。図6に示す等断面桁のスパン1/4点において、軸力から不完全度を推定した結果が図8である。図5の場合と同様、左側に位置している直線の方が不完全度は大きいことがわかる。さらに、図5と比較すると、1/4点に集中荷重を受ける場合の方がわずかに不完全度は大きい。これは、図7からわかるように、1/4点に集中荷重を受ける場合には、径間中央部に集中荷重を受ける場合と異なって、ずれ止め剛度が低下するにつれて、最大軸力の得られる位置がスパン1/4点から中央側にずれてしまうためである。

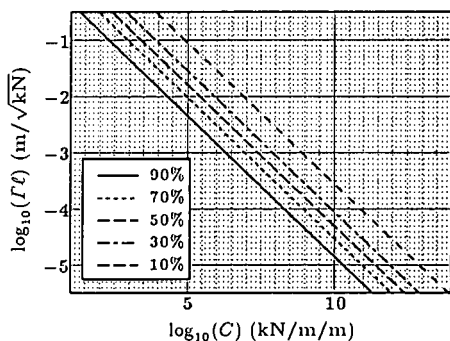


図8 スパン1/4点に集中荷重を受ける単純桁の軸力による桁特性とずれ止め剛度の関係(注目点: スパン1/4点)

4. 水平せん断力による不完全度の推定

式(1)を解いて得られる軸力の式を x で微分すると、ずれ止めの受け持つ水平せん断力の式を得ることができる。そこで、図2に示す径間中央部に集中荷重を受ける等断面単純桁について、水平せん断力の式を求め、変形を行うと、式(4)と同様に以下のような形に整理できる。

$$T_i = T_{0i}(1 - R_{Ti}) \quad \dots\dots\dots (11)$$

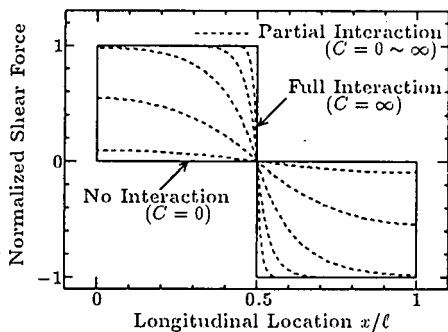


図9 径間中央部に集中荷重を受ける単純桁の水平せん断力分布

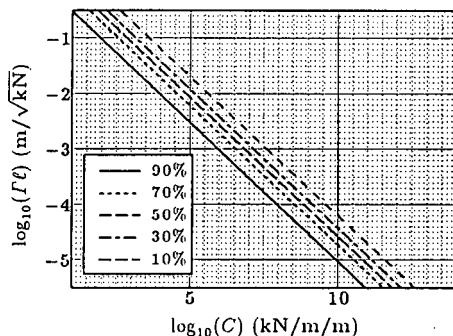


図10 径間中央部に集中荷重を受ける単純桁の水平せん断力による桁特性とずれ止め剛度の関係

ここに、 T_{0i} は完全合成時にずれ止めが受け持つ水平せん断力であり、 R_{Ti} は次式で表される不完全な合成効果による水平せん断力の低減率である。

$$0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} \quad R_{T1} = \frac{\cosh \omega x}{\cosh \omega \frac{\ell}{2}} \quad \dots \dots \dots (12)$$

$$\frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell \quad R_{T2} = \frac{\cosh \omega(x - \ell)}{\cosh \omega \frac{\ell}{2}} \quad \dots \dots \dots (13)$$

これより、上式の R_{Ti} も式(7)で表される Γ とスパン ℓ の積すなわち桁特性と、単位長さあたりのずれ止め剛度 C で整理できる。したがって、水平せん断力に着目した場合の不完全度も、桁特性とずれ止め剛度の間の直線関係を用いることによって容易に推定できる。図2に示す等断面桁について、橋軸方向に水平せん断力分布を描いたのが図9であり、ここで不完全合成時に最大水平せん断力を得ることができる径間端部($x=0$)で水平せん断力から不完全度を推定した結果が図10である。この結果を図5と比較すると、水平せん断力から推定した不完全度は軸力から推定した不完全度よりも小さいことがわかる。これは図9からわかるように、ずれ止め剛度が小さい場合でも、径間端部ではかなり完全合成時に近い水平せん断力を得ることができるからであると考えられる。

5. 縁応力度の計算

一般に、不完全合成桁のコンクリート床版および鋼桁に生じる縁応力度 σ_{cui} (床版上縁)、 σ_{cli} (床版下縁)、 σ_{sui} (鋼桁上縁)、 σ_{sli} (鋼桁下縁) は次式で計算される。

$$\sigma_{cui} = -\frac{N_i}{A_C} - \frac{M_{Ci}}{I_C} y_{cu} \quad \dots \dots \dots (14-a)$$

$$\sigma_{cli} = -\frac{N_i}{A_C} + \frac{M_{Ci}}{I_C} y_{cl} \quad \dots \dots \dots (14-b)$$

$$\sigma_{sui} = \frac{N_i}{A_S} - \frac{M_{Si}}{I_S} y_{su} \quad \dots \dots \dots (14-c)$$

$$\sigma_{sli} = \frac{N_i}{A_S} + \frac{M_{Si}}{I_S} y_{sl} \quad \dots \dots \dots (14-d)$$

ここに、 M_{Ci} 、 M_{Si} はそれぞれコンクリート床版部および鋼桁部の曲げモーメントであり、曲げモーメントのつり合い、コンクリート床版と鋼桁で曲率一定の仮定、および式(4)を用いて次式に示すように導ける。

$$M_{Ci} = \frac{I_C}{nI_V} M_{0i} \left\{ 1 + \frac{A_C d_C^2 + n A_S d_S^2}{I_C + n I_S} R_{Ni} \right\} \quad \dots \dots \dots (15)$$

$$M_{Si} = \frac{I_S}{I_V} M_{0i} \left\{ 1 + \frac{A_C d_C^2 + n A_S d_S^2}{I_C + n I_S} R_{Ni} \right\} \quad \dots \dots \dots (16)$$

上式に示したように、曲げモーメント M_{Ci} 、 M_{Si} は、軸力の場合と同様、不完全な合成効果による軸力の低減率 R_{Ni} を用いて整理できた。したがって、各縁応力度は軸力と曲げモーメントの関数になっていることから、

軸力の低減率 R_N を用いて表すことができ、軸力から推定される不完全度をを用いて容易に求められる。

ここでは、一例として図 2 に示す径間中央部に集中荷重を受ける等断面単純桁の径間中央部について検討を行った。縦軸に不完全合成時の応力を、コンクリート床版の場合は完全合成時の応力で、鋼桁の場合は非合成時の応力で除した応力比をとり、この応力比と軸力による不完全度の関係を示したのが図 11 である。ここで、縦軸の正の領域は引張側を示し、負の領域は圧縮側を示している。横軸は不完全度を示し、0 は完全合成時、1 は非合成時を表している。この図からわかるように、応力比と不完全度の間には直線関係が成り立っている。したがって、図 5 のように軸力から不完全度が推定できれば、容易に応力比を得ることができ、結果的に各縁応力度を推定することが可能である。

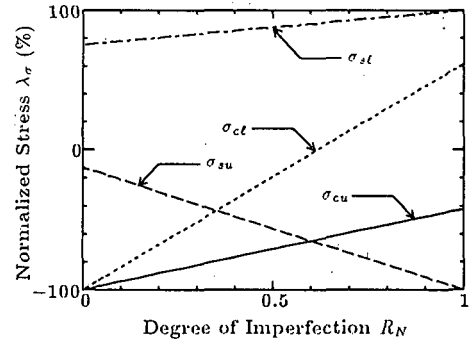


図 11 径間中央部に集中荷重を受ける単純桁の各縁応力度と不完全度の関係

6. 不完全度の推定結果

実橋の桁寸法およびずれ止め剛度を用いて、径間中央部あるいはスパン 1/4 点に集中荷重を受ける合成桁および非合成桁の荷重載荷点での軸力による不完全度を具体的に推定した結果が表 1 である。実橋サイズの合成桁の不完全度はかなり小さいという結果になった。また、合成効果をあまり期待しない非合成桁においても、スラブ止めのずれ止め剛度 ($C = 490 \text{ MN/m/m}$) を考慮すると実際にはかなり大きな合成効果が生じていることがわかった。さらに、集中荷重の荷重載荷位置によっても得られる不完全度はわずかに異なることがわかった。

表 1 不完全度の推定結果 (着目点: 荷重載荷点)

	径間中央部	スパン 1/4 点
合成桁	1 ~ 2%	5 ~ 10%
非合成桁	15 ~ 20%	20 ~ 25%

7. おわりに

合成桁および非合成桁は実際には不完全合成桁である。本研究では、不完全合成桁の基礎方程式から得られる軸力、水平せん断力などの解において、断面諸量とスパンからなるパラメーター (桁特性と呼ぶ) と単位長さあたりのずれ止め剛度の関係を用いて、集中荷重を受ける等断面不完全合成単純桁の不完全度を簡易に推定する方法を提案した。また、その不完全度を用いて不完全合成桁の縁応力度が概算できることを示した。

本研究によって得られた結果をまとめると以下になる。

1. 集中荷重を受ける不完全合成単純桁において、コンクリート床版と鋼桁に相互に作用する軸力および水平せん断力の不完全度は、桁特性とずれ止め剛度を用いて容易に推定できる。
2. 軸力と水平せん断力のそれぞれから推定される不完全度は異なる。また、集中荷重の位置によっても推定される不完全度は異なる。
3. 軸力から推定される不完全度を用いることで、桁に生じる縁応力度が容易に推定できる。

参考文献

- 1) 山本 稔：不完全合成桁の曲げ理論，土木学会論文集，No.67，pp.1~10，1960.3.
- 2) Newmark, N.M., C.P.Siess, and I.M.Viest：Tests and analysis of composite beams with incomplete interaction, Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis, Vol.9, No.1, 1951.
- 3) 橋 善雄・足立義雄：不完全合成桁について，土木学会論文集，No.112，pp.11~19，1964.12.
- 4) 浜田純夫・有住康則：不完全連続合成桁の有限要素解析，土木学会論文集，No.265，pp.1~9，1977.9.
- 5) 井上稔康・佐藤浩一・渡辺 昇：不完全合成桁の差分剛性マトリックス解析法について，構造工学論文集，Vol.36A，pp.1223~1236，1990.3.
- 6) 小松定夫・佐々木孝：不完全合成格子桁橋の理論と近似計算法について，土木学会論文集，No.329，pp.27~37，1983.1.