

ロッキング振動の解析精度改善のための 不連続変形法の接触定式化の改良

村岡 龍¹・橋本 涼太^{2*}

¹九州大学大学院 工学府建設システム工学専攻 (〒819-0385 福岡県福岡市西区元岡744)

²広島大学大学院 工学研究科社会基盤環境工学専攻 (〒739-8527 広島県東広島市鏡山1丁目4-1)

*E-mail: ryotahashimoto@hiroshima-u.ac.jp

ブロックトップリング崩壊は主に地震動等を誘因として節理性岩盤の亀裂に沿った浮き上がり（ロッキング）を伴いながら、転倒・崩壊する現象である。トップリング安定性の評価には不連続変形法（Discontinuous Deformation Analysis: DDA）をはじめ不連続性岩盤解析手法の利用が有用であるが、DDAはロッキング現象の解析時に精度低下することが知られている。本研究ではDDAにおけるロッキング現象の解析精度の低下要因の特定ならびに手法の改良を目指す。まずは理論解を有する基本的なロッキング問題の解析を通じて従来のDDAの精度低下の原因を考察する。そして、得られた知見を基にDDAの接触定式化を法線ギャップの変化速度に関する制約条件を用いて修正し、再度理論値と比較して性能を検証する。

Key Words : DDA, gap, rate of gap, persistency condition

1. 背景および課題

トップリング崩壊は岩盤崩壊の一種であり、岩塊の回転運動を含む複雑な崩壊現象である¹⁾。トップリング崩壊には大きく分けてたわみ性トップリングとブロックトップリングの二つがあり、本研究では後者を扱う。ブロックトップリングは斜面上の岩塊が岩盤の亀裂に沿った浮き上がりを生じて転倒・崩壊する現象であり、その主な誘引としては地震動が考えられる。従来、ブロックトップリングに関する実験的・解析的検討においては岩盤模型を傾斜させる、あるいは水平震度を与えるなど静的な慣性力として地震動が考慮されてきた²⁾。一方で、実際の地震時には斜面は両方向に加振され、斜面上の岩塊は浮き上がりと接触を繰り返しながらロッキング振動する可能性がある。そしてこの場合、岩塊が完全な転倒に移行するのに必要な水平加速度は静的な慣性力として考えた限界水平震度と乖離する可能性があるが、検討された事例はない。

物体間の接触や分離を繰り返すロッキング現象を検討する上では、不連続体の数値解析手法を用いることが望ましい。不連続体解析の代表的手法としては、Cundallの個別要素法（DEM: Distinct Element Method）³⁾やShiが提案した不連続変形法（DDA: Discontinuous Deformation Analysis）⁴⁾が挙げられ、本研究ではDDAに着目する。

DDAは岩盤工学分野で発達した弾性多角形ブロック間の動的接触解析手法であり、ポテンシャルエネルギー最小化原理に基づく定式化およびペナルティ法による接触処理が特徴である。これまでに落石⁵⁾や亀裂が内在する岩盤の崩落⁶⁾を中心に適用が進められてきた他、地震動を静的荷重として考えたトップリング崩壊のシミュレーションにも適用されており⁸⁾、岩盤の動的現象の検討に適した手法である。

しかしながら、DDAにはロッキング現象を表現する上で課題があることが知られている。小山ほか⁹⁾はDDAを用いて水平基盤上の長方形ブロックに加振するロッキング挙動の解析を接触処理に用いるペナルティ係数や計算時間増分を変化させて実施し、理論解と比較した。その結果、高精度で計算可能な条件が少なく、パラメータの合理的な決定が難しいことが示された。また、その精度低下の原因は現状明確になっていない。

これに対し本研究では、岩盤斜面の地震応答解析手法の確立を目的として、DDAにおけるロッキング現象の解析精度の低下要因の特定、ならびに手法の改良を目指す。まず、理論解を有する基本的なロッキング問題の解析を通じて従来のDDAにおける精度低下の原因について考察する。そして、得られた知見に基づきDDAの理論を修正し、再度理論的な値と比較して性能改善を確認する。

2. 従来手法によるロッキング解析結果と問題点の整理

まずは従来手法のロッキング解析における問題点を整理するため、小山ほか⁹⁾による検証例を参考にした解析を実施する。ただし、ここで言う従来手法とはオリジナルの DDA に摩擦構成則のリターン・マッピング法を導入した改良法¹⁰⁾である。理論の詳細は文献を参照されたい。

図-1 に示す剛体を模擬した二つの弾性体ブロック（ヤング率 10TN/m², ポアソン比 0.2）に図-2 に示す加速度を、下段ブロックは固定した状態で物体力として上段ブロックに与え、ロッキングさせる問題を解析する。不連続面の摩擦角は 89.9° とし、接触ペナルティ係数を法線方向とせん断方向ともに 100GN/m とし、時間刻みを 0.001, 0.0001s の 2 パターン設定した。

数値解析結果と比較する参照解として、Makris & Roussos¹¹⁾を参考にして剛体ブロックのロッキング振動（図-3）の運動方程式、

$$\begin{aligned} I_0 \ddot{\theta}(t) + mgR \sin(\mp \alpha - \theta(t)) \\ = -ma(t)R \cos(\mp \alpha - \theta(t)) \end{aligned} \quad (1)$$

を用いて、近似解を差分法によって求めた。ここに、 I_0 はブロックの点 O および O' まわりの回転に関する断面 2 次モーメント、 θ はブロックの長さ $2h$ の辺が鉛直方向となす角と定義される回転角（時計回りが正）、 m はブロックの質量、 g は重力加速度、 R と α は図-3 中のブロックの寸法に関するパラメータ、 $a(t)$ は基盤の加速度（水平右向きが正）である。

本研究ではこの問題の近似解を差分法によって求める。具体的にはまず、ある時刻での $\theta(t)$ と回転角速度 $\dot{\theta}(t)$ が既知であるとして、回転角加速度 $\ddot{\theta}(t)$ は式(2)、(3)を解いて求める。次に、時間増分 Δt 後の回転角速度と回転角を次式で更新する。

$$\dot{\theta}(t+\Delta t) = \dot{\theta}(t) + \ddot{\theta}(t)\Delta t \quad (2)$$

$$\theta(t+\Delta t) = \theta(t) + \dot{\theta}(t)\Delta t \quad (3)$$

そして、この $\theta(t+\Delta t)$ を用いて次の回転角加速度を求める。以上の手順を初期条件（ $\theta(t=0)$, $\dot{\theta}(t=0)$ ）のもとで、時間増分ごとに所定の時刻まで繰り返して近似解を得る。ただし、本手法は時間刻みの大きさに解の精度が変化するため、十分に小さな Δt を採用する。なお、 θ の符号の反転時は回転中心は滑らかに移行するものとし、新しい回転中心周りの角運動量の保存を仮定して $\dot{\theta}$ を次式で減衰させる。

$$\dot{\theta}_{after} = \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \alpha\right) \dot{\theta}_{before} \quad (4)$$

解析の結果得られた上部ブロックの回転角 θ （垂直上

向きに対して時計回りが正）の時刻歴を図-4(a)に示す。また上部ブロックの回転角速度の時刻歴を図-4(b)に示す。解析結果より、従来手法による解析結果の特徴として以下の点が挙げられる。

- ・ 回転角の振動波形はブロックが衝突するにつれて参照解に対して徐々に位相の進みが生じ、早く収束する。
- ・ 回転角速度に関しては、速度がピークを示す、つまりブロックが基盤に衝突し回転角の符号が反転した直後に段階的に変化するような乱れが見られ、時間刻みが細かいときにより顕著である。

以上の二点をもとにロッキングの際の精度低下要因を考察する。

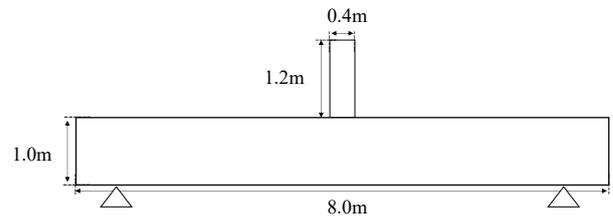


図-1 解析モデル

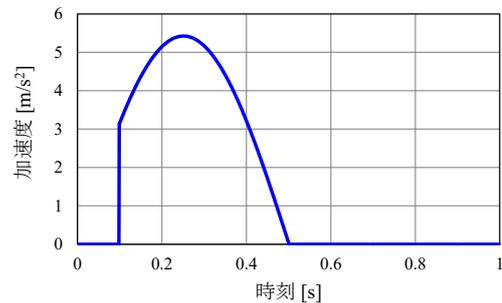


図-2 入力する加速度波形

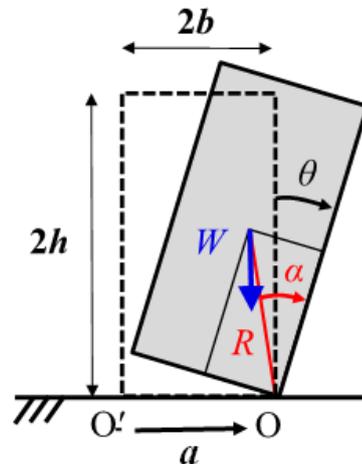
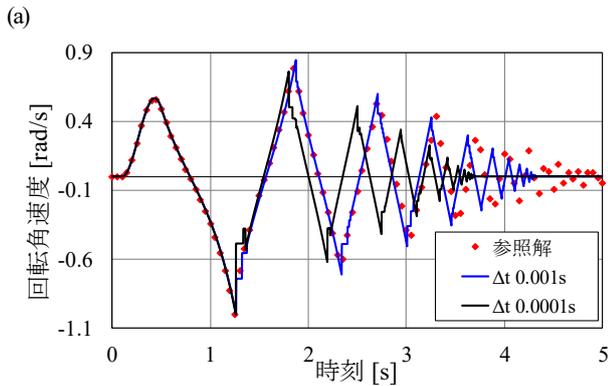
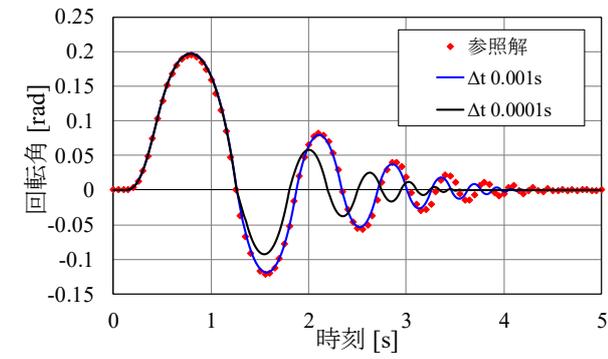


図-3 剛体長方形ブロックの幾何条件



(a) 回転角の時刻歴
(b) 回転角速度の時刻歴

図-4 接触ペナルティ係数 100GN/m の時の、(a)回転角の時刻歴、(b)回転角速度の時刻歴

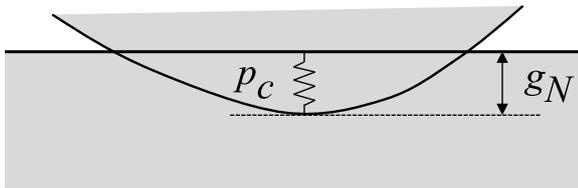


図-5 接触力のパラメータ：従来手法

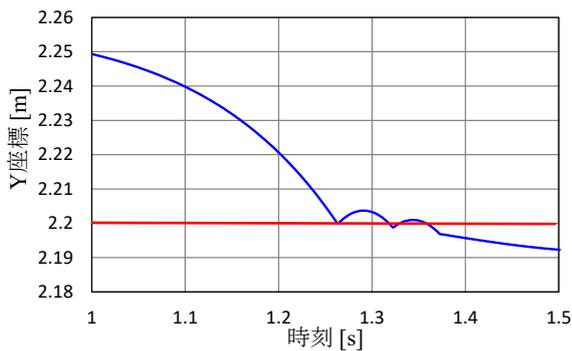


図-6 上部ブロックの右下頂点の推移

まず、振動の早期の収束について述べる。DDA では図-5に示すように物体が接触する際の接触面に法線方向の接触力を接触ペナルティ係数 p_c と貫入量 g_N の積、

$$t_N = p_c g_N \quad (5)$$

で定義しているため、接触ペナルティ係数が小さいと、過大な貫入が生じる。つまり、回転軸となっている頂点

が基盤に沈んでおり、反対側の頂点がその分早く接触するため、回転角の位相が早くなると考えられる。

次に、回転角速度が回転角の符号が変わる前後で乱れる現象について考察する。図-6は $\Delta t = 0.001s$ のケースの時刻 1.0~1.5s の上部ブロックの右下頂点 O の鉛直高さの推移である。図中に赤線で示した 2.2m の位置が下部ブロックとの接触面である。参照解ではロッキングの回転中心は滑らかに移行し、基盤上に厳密に固定されるのに対し、DDA では新たな回転中心が基盤と衝突後に振動し貫入している。これは DDA では貫入量がゼロという制約条件に基づき定式化されており、上段ブロックが基盤ブロックに貫入した際にはペナルティバネによって基盤ブロックの表面にまで押し戻されるためである。その結果、回転中心となる上段ブロックの頂点が固定されず、回転角速度の乱れとして現れる。また、このペナルティによる頂点の押し戻しは貫入直後の 1 ステップの間にかかる。DDA では既知の時間ステップ n から $n+1$ の速度場を求める際に以下の速度更新式を用いている。

$${}^{n+1}\dot{\mathbf{u}}_i = \frac{2}{\Delta t} ({}^{n+1}\mathbf{u}_i - {}^n\mathbf{u}_i) - {}^n\dot{\mathbf{u}}_i \quad (6)$$

ここに、 \mathbf{u} は変位ベクトル、変数の上のドットは物質時間微分を表す。式(6)に見られるように時間刻みが細かい方が 1 ステップあたりの速度変化が激しく、回転角速度の乱れが大きくなり精度が悪化したものと推察される。

以上のことから、DDA のロッキング解析における精度低下要因は接触の定式化にあり、具体的には過大な貫入および貫入後の振動の回避が必要と考えられる。

3. 手法の改良

本節では前節にて述べたように物体間の接触時に与える制約条件に着目した DDA の改良方法を提案し、改良後の理論について示す。具体的には、非貫入条件 ($g_N=0$) に替えて接触中にギャップの変化速度 (以降、ギャップ速度) がゼロという制約条件を使用し接触を定式化する。

(1) 支配方程式と弱形式

まずは二次元問題を対象として n 個の独立した連続体からなる系を扱うものとし、各連続体が空間内で占める領域を Ω ($i=1, 2, \dots, m$)、 Ω_i の境界を Γ_i ($=\Gamma_{iu} \cup \Gamma_{io}$, Γ_{iu} : 変位境界, Γ_{io} : 応力境界) とする。

a) 連続体の運動・変形問題の基礎式

個々の物体 Ω_i の運動や変形は、連続体の運動方程式、

$$\rho_i \dot{\mathbf{u}}_i - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i - \rho_i \mathbf{b}_i = 0 \quad (7)$$

およびひずみの適合条件,

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{u}_i + (\nabla \mathbf{u}_i)^T \right\} \quad (8)$$

さらに増分形の構成関係式,

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{D}_i : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (9)$$

といった基礎式に加え, 変位境界条件,

$$\mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}}_i \text{ on } \Gamma_{iu} \quad (10)$$

および応力境界条件,

$$\mathbf{t}_i = \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{n}_i = \bar{\mathbf{t}}_i \text{ on } \Gamma_{i\sigma} \quad (11)$$

で記述される.

また, これらの弱形式は重み付き残差法より,

$$\begin{aligned} G_i^{\text{ext,int}} = & \int_{\Omega_i} \rho_i \mathbf{u}_i \cdot \delta \mathbf{u}_i d\Omega + \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\sigma}_i : \delta \boldsymbol{\varepsilon}_i d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_{i\sigma}} \bar{\mathbf{t}}_i \cdot \delta \mathbf{u}_i d\Gamma - \int_{\Omega_i} \rho_i \bar{\mathbf{b}}_i \cdot \delta \mathbf{u}_i d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

となる. ここに, $\delta \mathbf{u}$ は変位境界上で $\delta \mathbf{u} = 0$ を満たす任意のベクトル関数, つまり仮想変位である. $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ は仮想変位に対する仮想ひずみテンソルであり, 式(12)は外力と内力に関する仮想仕事の原理式である.

b) 物体間の接触条件

ここで, Ω ($i=1,2,\dots,m$) の Ω_j と Ω_k ($j \neq k$) がその境界 Γ_{jk} で接触している場合を考える (図-7). このとき, Γ_{jk} では法線方向の互いの距離とその変化速度がゼロで, かつ接触面での表面力が釣り合うという条件,

$$\mathbf{g}_N = 0 \text{ on } \Gamma_{jk} \quad (13)$$

$$\dot{\mathbf{g}}_N = 0 \text{ on } \Gamma_{jk} \quad (14)$$

$$\mathbf{t}_j + \mathbf{t}_k = 0 \text{ on } \Gamma_{jk} \quad (15)$$

を満たす必要がある. ここに, \mathbf{g}_N は物体間の接触面法線方向の距離 (法線ギャップ) である. 式(15)の Γ_{jk} 上での表面力, すなわち接触力を接触面の法線成分 t_N とせん断成分 t_S に分解し, それぞれに法線ギャップ \mathbf{g}_N とせん断変位 (Γ_{jk} の接線方向のギャップ) \mathbf{g}_S に対応した仮想変位を乗じ, Γ_{jk} に関し積分すると, 次の式で示す接触力による仮想仕事の原理式が得られる.

$$G_{jk}^c = \int_{\Gamma_{jk}} \mathbf{t}_N \delta \mathbf{g}_N d\Gamma + \int_{\Gamma_{jk}} \mathbf{t}_S \delta \mathbf{g}_S d\Gamma \quad (16)$$

接触が生じている場合, 物体は外力および内力による仮想仕事である式(12)に加え, 接触力による仮想仕事の和がゼロであるという条件を満たさなければならない. つまり, 系全体で解くべき弱形式は次式となる.

$$G = \sum_{i=1}^m G_i^{\text{ext,int}} + G_{jk}^c = 0 \quad (17)$$

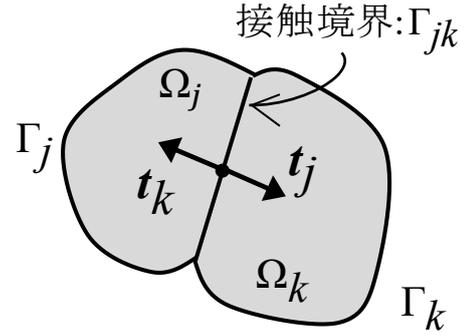


図-7 連続体間の接触³⁾

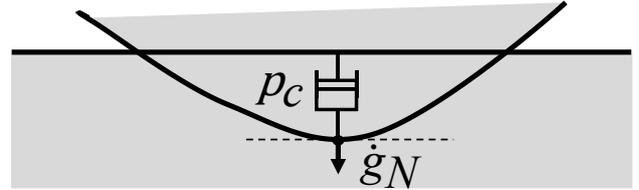


図-8 接触力のパラメータ: 新たな定式化

これらの弱形式を線形化し, 空間離散化, 時間離散化し時間刻みごとに逐次解くことで複数のブロックの動的相互作用問題を解析する.

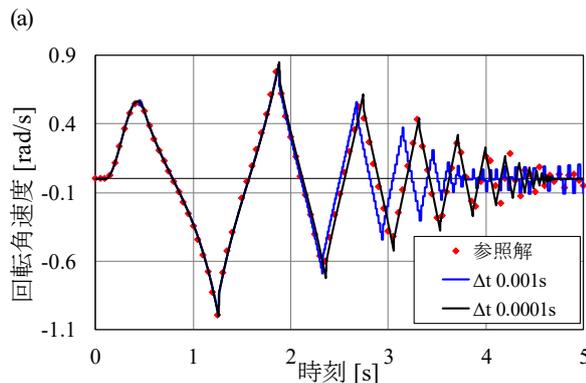
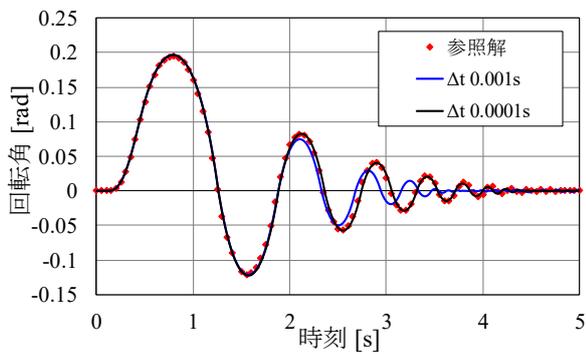
(1) 接触力の新たな定式化

式(16)のように接触力による仮想仕事の原理式は垂直成分とせん断成分に分けられる. これらの接触力は未知数であるが DDA ではこれをペナルティ法で変位の関数として表す. 従来手法では物体間の貫入量がゼロという条件 (式(13)) を満たすように垂直力をペナルティ係数と貫入量の積で表している (式(5), 図-5) が, 前述の通りこれが接触直後の回転中心の振動を招きロッキング解析の精度低下原因となっていた. よって, 新たな定式化では接触後の貫入量の変化速度がゼロ, すなわち式(14) (persistency 条件と呼ばれる) を制約条件としたペナルティ法を用いる.

つまり開発手法では式(18)のように接触力をペナルティ係数と接触後の貫入速度の積で表す.

$$\mathbf{t}_N = p_c \dot{\mathbf{g}}_N \quad (18)$$

本定式化は図-8のように接触部にバネでなくダッシュポットが挿入されることに相当し, ペナルティ係数はその粘性係数となる. ただし, この p_c は式(14)を満たすための数学的パラメータである点が個別要素法のダッシュポットモデルと異なる. 本定式化は貫入量そのものに対する制約を与えないため, 時間刻みが大きいと過大な貫入が生じる恐れがあるが, 接触後の頂点の振動を抑えることができる.



(a)
(b)
図-9 接触ペナルティ係数が鉛直 100GN/m², せん断 100GN/m のときの, (a)回転角の時刻歴, (b)回転角速度の時刻歴

4. 開発手法の検証

開発手法の性能を検証するため, 2.にて行ったロッキング解析を行った. 使用した解析モデル, 物性値, 不連続面のパラメータ, 時間刻みは 2.と同様である. 解析の結果得られた上部ブロックの回転角 θ および回転角速度の時刻歴を図-9(a)と(b)にそれぞれ示す. 図-4と比較すると開発手法では回転角, 回転角速度ともに従来手法に比べ参照解と一致度が改善された. 図-9(b)より, ギャップ速度がゼロという制約条件を使用したことで, ロッキングの際に回転中心となる上部ブロックの頂点が固定され, ロッキング中の回転角速度の減衰時の波形の乱れが抑えられており, 結果として回転角の位相の進みも改善されたものと考えられる.

開発手法の結果の特徴として, 従来手法と異なり時間刻みが小さいケースの方が精度が高くなったことが挙げられる. この理由も制約条件から説明できる. 開発手法では貫入量の変化速度に関し制約条件を与えるため, 接触した瞬間に大きな貫入が生じてそのまま維持され, 時間刻みが大きい場合には貫入量が大きくなりやすい. その場合, ギャップ定式化にてペナルティ係数が小さい場合と同様に衝突から衝突までの周期が短くなり位相が参照解に比べて進んでしまう. また, ロッキングが継続するにつれて参照解とのズレが大きくなるのも, 大きな

貫入量が生じたときの誤差が蓄積するためであると考えられ, 今後の課題ではある. しかしながら, 構造物に数回程程度のロッキング振動が起こる問題であれば, 十分に小さな時間刻みを用いれば開発した DDA は有効であると考えられる.

5. まとめ

本研究では岩盤斜面の地震応答解析手法の確立を目的として DDA のロッキング問題における解析精度に着目した. まず, 従来手法で基本的なロッキング解析を行い, その精度低下の原因が非貫入条件に基づく接触定式化にあることを示した.

そして, 物体間の接触中の貫入量の変化速度に対する制約条件を使用して定式化した新たな DDA を提案し, ロッキング振動解析での精度改善を試みた. 開発手法を長方形ブロックのロッキング振動解析に適用した結果, その解析精度は従来手法に比べ改善された. 以上より開発手法はロッキングが継続して起こる現象において有用な手法であることが示された.

参考文献

- 1) 江崎哲郎, 蔣宇静, 永富雅幸, 後藤直人: 不連続性岩盤斜面に生じる転倒崩壊機構に関する基礎的研究, 資源と素材, Vol.113, pp.233-240, 1997.
- 2) 石田毅, 日比野敏, 北原義浩, 浅井義之: 斜面の転倒・滑落破壊に対する個別剛体要素法の適用性について, 土木学会論文集, 第358号, pp.147-155, 1985.
- 3) Cundall, P. A. and Strack, O. D. L.: A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique*, Vol. 29, No. 1, pp. 47-65, 1979.
- 4) Shi, G. H. and Goodman, R. E.: Generalization of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modelling, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 13, pp. 359-380, 1989.
- 5) Ma, G. H., Matsuyama, H., Nishiyama, S. and Ohnishi, Y.: Practical studies on rockfall simulation by DDA, *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, Vol. 3, No. 1, pp.57-63, 2011.
- 6) Irie, K., Koyama, T., Nishiyama, S., Yasuda, Y. and Ohnishi, Y.: A numerical study on the effect of shear resistance on the landslide by discontinuous deformation analysis (DDA), *Geomechanics and Geoengineering*, Vol.7, No.1, pp.57-68, 2012.
- 7) Wu, J. H. and Chen, C. H.: Application of DDA to simulate characteristics of the Tsaoiling landslide, *Computers and Geotechnics*, Vol. 38, pp.741-750, 2011.
- 8) Liu, G., Li, J. and Kang, F.: Failure mechanisms of toppling rock slopes using a three-dimensional discontinuous deformation analysis method, *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2019. (in press)
- 9) 小山倫史, 赤尾悟史, 西山哲, 大西有三: 岩盤斜面の地震応答解析における不連続変形法(DDA)の適用に関する研究, 土木学会論文集 C, Vol. 65, No. 3, pp. 644-

- 662, 2009.
- 10) 橋本涼太, 小山倫史, 菊本統: 摩擦構成則の陰的積分アルゴリズムを導入した不連続変形法 (DDA) の開発, 土木学会論文集 C (地圏工学), Vol.75, No.3, pp.336-248, 2019.
- 11) Makris, N. and Roussos, Y. S.: Rocking response of rigid blocks under near-source ground motions, *Geotechnique*, Vol. 50, No. 3, pp. 243-262, 2000.

IMPROVEMENT OF CONTACT FORMULATION OF THE DISCONTINUOUS DEFORMATION ANALYSIS FOR ROCKING MOTION

Ryu MURAOKA, Ryota HASHIMOTO

Block toppling is a phenomenon that a rock mass collapses with rocking, which is floating along the crack of jointed rock mass, mainly due to earthquake. For evaluation of toppling stability, discontinuum-based numerical methods such as Discontinuous Deformation Analysis (DDA) would be useful. However, it is known that the DDA shows low accuracy in rocking motion analysis. This study attempted to reveal the cause of accuracy loss in the previous DDA through a basic rocking problem analysis. Then, based on the obtained results, the contact formulation in the DDA was revised using persistency condition on rate of gap, and the performance of the proposed method was examined by comparing with the theoretical value again.