周期荷重が加わる多孔質弾性体へのFixed-stress split法による分離反復型解法の適用性検討

赤木 俊文 [1*]・山本 肇[1]

[1]大成建設株式会社　技術センター（〒245-0051 横浜市戸塚区名瀬町344-1）

流体-地盤力学連成解析のアルゴリズムは大きく完全連成と分離型解法に分けられ，流体と地盤の方程式を別々に解く分離型解法は既存の解析コードを利用する場合に適している．この中でFixed-stress split法は安定性と収束性に優れた分離型解法として知られている．既往の研究では初期に一度載荷する問題への適用は見られるが，荷重が経時変化する場合への適用は見られない．Fixed-stress split法では力のつり合いを排水条件の仮定の下で解くので，経時変化する荷重に対して随時，瞬時の圧力応答が生じる条件下では精度が落ちる可能性がある．そこで本研究では，Fixed-stress split法を水で飽和した等方多孔質弾性体の1次元問題，および水-CO_2二相流が存在する等方多孔質弾性体の問題にそれぞれ適用した．表面力として正弦波を設定し，荷重に対して間隙水圧の上昇が十分確認できる条件で解析を行った．水飽和問題ではFixed-stress split法は完全連成解析と一致した．水-CO_2二相流存在下の問題では，完全連成解析の結果と若干の差異が見られた．

Key Words : *Hydro-geomechanical coupling, , Fixed stress split method, Surface force*

1. はじめに

流体-地盤力学連成問題の数値解法は，流体方程式と力のつり合いを逐次的に解く分離型解法と両者を同時に解く一体型の強連成(完全連成)に分類される．前者はさらに反復計算を行わない弱連成と反復計算を行うことで解の精度を向上させる分離反復型解法(漸近的強連成)に分けられる．分離型解法は別々の地下流体解析コードと地盤力学解析コードを連成させる場合に非常に便利であり，石油分野では分離型解法による流体-地盤力学連成解析手法の研究とその応用が行われてきた．

分離型解法は流体方程式と力のつり合いを解く順番と逐次的に解くために採用する仮定に応じてFixed-strain split法，Fixed-stress split法，Undrained split法，Drained split法の4種類が提案されている[1)]．このうちFixed-stress split法は平均全応力の増分に前ステップの値を用いて流体方程式を解き，次に力のつり合いを排水条件で解く手法であり，無条件安定で，かつ他の手法に比べて収束が速いことで知られている[2),3)]．

既往の研究では荷重が一定の条件下での適用例は見られるが，荷重が経時的に変化する場合への適用は見られない．Fixed-stress split法は排水条件で力学方程式を解くことから，経時変化する荷重に対して随時，瞬時の圧力応答が生じる条件下では精度が落ちる可能性がある．そこで本研究では，Fixed-stress split 法を用いて周期荷重を伴う流体-等方線形多孔質弾性体の連成問題を解き，Fixed-stress split法の適用性を確認した．

2. 計算手法

(1) 解くべき支配方程式

2相流存在下での等方線形多孔質弾性体の支配方程式を理論に従って定式化した[3)]．解くべき方程式は2相流-多孔質体の全体に対する力のつり合いおよび各流体相の質量保存則，ダルシー則，および各種構成式である．

a) 力のつり合い式

力のつり合い式は次式で与えられる．

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0 \tag{1a}$$

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} = \mathrm{d}\sigma'_{ij} - b\mathrm{d}\bar{p}\delta_{ij} \tag{1b}$$

$$\mathrm{d}\bar{p} = s_r\mathrm{d}p_w + (1-s_r)\mathrm{d}p_n \tag{1c}$$

ここでσ_{ij}は全応力，σ'_{ij}は有効応力，bはBiot定数，s_rは飽和度，p_wは濡れ相の圧力，p_nは非濡れ相の圧力であ

る．有効応力-ひずみ関係式は微小変形の仮定の下に等方線形弾性体で与える．

b) 流体方程式

濡れ相および非濡れ相の質量保存則はそれぞれ次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
s_r\rho_w\frac{\partial\phi}{\partial t}&+\phi_0 s_r\frac{\partial\rho_w}{\partial t}+\phi_0\rho_w\frac{\partial s_r}{\partial t}\\
&+\frac{\partial(\rho_w V_{wi})}{\partial x_i}=0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
(1-s_r)\rho_n\frac{\partial\phi}{\partial t}&+\phi_0(1-s_r)\frac{\partial\rho_n}{\partial t}-\phi_0\rho_n\frac{\partial s_r}{\partial t}\\
&+\frac{\partial(\rho_n V_{ni})}{\partial x_i}=0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

ここにρ_wおよびρ_nは各相の密度，V_{wi}およびV_{ni}は各相のフラックス，ϕは間隙率，s_rは濡れ相の飽和度である．間隙率の全変化$\phi-\phi_0$はϕ_0に比べて十分に小さいと仮定している．フラックスはダルシー則で与える．

$$
V_{wi}=-\rho_w\frac{k_{rw}\kappa}{\mu_w}\left(\frac{\partial p_w}{\partial x_i}-\rho_w g_i\right)
\tag{4}
$$

$$
V_{ni}=-\rho_n\frac{k_{rn}\kappa}{\mu_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_i}-\rho_n g_i\right)
\tag{5}
$$

$$
g_i=(0\quad 0\quad -g)^{\mathrm{T}}
\tag{6}
$$

ここでκは絶対浸透率，k_{rw}およびk_{rn}は各相の相対浸透率，μ_wおよびμ_nは各相の粘性，gは重力加速度である．各流体相は圧縮流体とし，密度は各相の圧力のみに依存して次式で与えられるとする．

$$
\frac{\rho_w}{\rho_{w,\mathrm{ref}}}=\exp\left(c_w(p_w-p_{w,\mathrm{ref}})\right)
\tag{7}
$$

$$
\frac{\rho_n}{\rho_{n,\mathrm{ref}}}=\exp\left(c_n(p_n-p_{n,\mathrm{ref}})\right)
\tag{8}
$$

$\rho_{w,\mathrm{ref}}$および$\rho_{n,\mathrm{ref}}$は各相の参照密度，$p_{w,\mathrm{ref}}$および$p_{n,\mathrm{ref}}$は各相の参照圧力，c_wおよびc_nは各流体の圧縮率である．また，各相の相対浸透率および毛管圧は濡れ相飽和度s_rの関数とする．

$$
k_{rw}=k_{rw}(s_r),\ k_{rn}=k_{rn}(s_r)
\tag{9}
$$

$$
p_c=p_n-p_w=f(s_r)
\tag{10}
$$

間隙率について以下の構成式を用いる．

$$
\mathrm{d}\phi=b\mathrm{d}\varepsilon_v+\frac{s_r}{N(b-\phi_0)}\mathrm{d}p_w+\frac{1-s_r}{N(b-\phi_0)}\mathrm{d}p_n
\tag{11}
$$

ここでε_vは体積ひずみ，Nは材料定数，ϕ_0は初期の間隙率である．dは微小増分を表す．材料定数Nは骨格を構成する岩石の体積弾性係数K_sと$1/N=(b-\phi_0)/K_s$の関係にある．

(2) Fixed-stress split法に基づくアルゴリズム

等方線形弾性体の構成式より体積ひずみ，全応力，平均間隙圧の間に以下の関係が成立する．

$$
\mathrm{d}\varepsilon_v=\frac{\mathrm{d}\sigma_m}{K}+\frac{b\mathrm{d}\bar{p}}{K}
\tag{12}
$$

ここでKは多孔質体の体積弾性係数，σ_mは平均全応力である．式(11)に代入すると次式を得る．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\phi=\frac{b}{K}\mathrm{d}\sigma_m&+\left(\frac{s_r}{N(b-\phi_0)}+\frac{s_r b^2}{K}\right)\mathrm{d}p_w\\
&+\left(\frac{1-s_r}{N(b-\phi_0)}+\frac{(1-s_r)b^2}{K}\right)\mathrm{d}p_n
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Fixed-stress split 法で解くべき方程式を考える．時間増分をτとして，後退差分を用いて時間離散化すると

$$
\begin{aligned}
&s_r^{n+1}\rho_w^{n+1}\left(\phi^{n+\frac{1}{2}}-\phi^n\right)\\
&+\phi_0 s_r^{n+1}\left(\rho_w^{n+1}-\rho_w^n\right)\\
&+\phi_0\rho_w^{n+1}(s_r^{n+1}-s_r^n)+\tau\frac{\partial(\rho_w^{n+1}V_{wi}^{n+1})}{\partial x_i}=0
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1-s_r^{n+1})\rho_n^{n+1}\left(\phi^{n+\frac{1}{2}}-\phi^n\right)\\
&+\phi_0(1-s_r^{n+1})\left(\rho_n^{n+1}-\rho_n^n\right)\\
&-\phi_0\rho_n^{n+1}(s_r^{n+1}-s_r^n)+\tau\frac{\partial(\rho_n^{n+1}V_{ni}^{n+1})}{\partial x_i}=0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

ここで，上付きの n+1 が現在の計算ステップを表し，未知数である．上付きの n は前ステップの値を表し既知数である．間隙率は力のつり合い式計算後に再度更新される中間値であるから上付きの添え字 n+1/2 を用いた．

Fixed-stress split 法では間隙率に関する構成式について，平均全応力に$\sigma_m^{n+1}-\sigma_m^n=\sigma_m^n-\sigma_m^{n-1}$の仮定を導入する．これは流体方程式中の平均全応力速度を前ステップの値で近似することを意味する．上記の仮定の下で式(13)を離散化すると以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\phi^{n+\frac{1}{2}}-\phi^n&=\frac{b}{K}(\sigma_m^n-\sigma_m^{n-1})\\
&+\left(\frac{s_r}{N(b-\phi_0)}+\frac{s_r b^2}{K}\right)(p_w^{n+1}-p_w^n)\\
&+\left(\frac{1-s_r}{N(b-\phi_0)}+\frac{(1-s_r)b^2}{K}\right)(p_n^{n+1}-p_n^n)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

力のつり合い式は排水条件を仮定して解くので，次式のようになる．

$$
\frac{\partial\Delta\sigma'_{ji}}{\partial x_j}=b\frac{\partial(\bar{p}^{n+1}-\bar{p}^n)}{\partial x_j}+\frac{\partial\sigma_{ji}^n}{\partial x_j}
\tag{17}
$$

$$
\sigma_{ij}^{n+1}=\sigma_{ij}^n+\Delta\sigma'_{ij}-b\Delta\bar{p}
\tag{18}
$$

上記の流体方程式とつり合い式を線形化し，準Newton 法的に収束するまで反復計算を行う．なお，本研究では線形弾性多孔質体が対象であるから，排水条件下での力学方程式は線形方程式である．収束判定は以下の 2 つの不等式を用い，両方の基準が満たされれば収束とした．

$$\max\left(\left|\frac{\delta p_w^{n,k}}{p_w^{n-1}}\right|, \frac{\delta s_r^{n,k}}{s_r^{n-1}}\right) < \epsilon_{\mathrm{fl}} \tag{19}$$

$$\left|\frac{\delta\sigma_m^{n,k}/K}{\phi_0}\right| < \epsilon_{\mathrm{mc}} \tag{20}$$

ここで，$\epsilon_{\mathrm{fl}}, \epsilon_{\mathrm{mc}}$はそれぞれ流体方程式，力のつり合い式に関する収束判定値である．

(3) 非排水条件を利用した間隙水圧応答の近似

本研究では，荷重に対する間隙流体圧の瞬時応答が十分に生じる条件を対象としている．そこで，反復計算の開始時の状態を前ステップの状態ではなく，非排水条件および飽和度一定条件を課して力のつり合いを解いた結果とする．式(2), 式(3), 式(7)および式(8)より

$$b\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{v}} + \frac{1}{L}\mathrm{d}p_w = 0 \tag{21}$$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{N} + \phi_0\big(c_w s_r + c_n(1-s_r)\big) \tag{22}$$

飽和度一定$\mathrm{d}s_r = 0$および式(2)より全応力とひずみの関係式が導かれる．

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} = D_{e,ijkl}^{ud}\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \tag{23}$$

$$D_{e,ijkl}^{ud} = D_{e,ijkl} + \frac{b^2}{L}\delta_{ij}\delta_{\mathrm{kl}} \tag{24}$$

以上をまとめると計算フローは図-1 の通りである．なお，力のつり合いの離散化は Galerkin 法で，流体の質量保存則の離散化は空間方向に有限体積法，時間方向に後退差分を用いた．

3. 提案手法の適用性の検討

(1) 検討条件の概要

水で飽和した等方線形多孔質弾性体の 1 次元問題，および水-CO_2二相流存在下における等方線形多孔質弾性体の 2 次元問題を用いて Fixed-stress split 法の適用性を検討する．対象は等方線形多孔質弾性体であり，荷重レベルは小さい．

(2) 水飽和1次元問題

はじめに水で飽和された多孔質弾性体の 1 次元問題の例を示す．解析コードで解くモデルは 3 次元であるため，適当な境界条件を課して 1 次元問題とする．図-2 に計算条件を示す．層厚に比較して水平方向に十分な広がりを有する領域の上部に正弦波荷重を加える問題を考える．これは鉛直方向の 1 次元問題であり，図-2 のような高さ 1m の鉛直 1 次元の有限要素メッシュを用いて解析を行った．間隙水について底部および側面を流量 0，上部大気圧固定とした．変位について，底部を変位固定，上部および側面を水平方向固定，奥行方向の変位をすべて固定とした．初期は静水圧で，上部に振幅1000Paの正弦波荷重を加える．周期は 1.0×10⁴秒である．表-1 に用いた材料パラメータを示す．本パラメータでは水の剛性が固体骨格の剛性に比べて大きいため，非排水条件では荷重の大部分を間隙水圧が受け持つことになる． また，ポアソン比を 0.0 としているので固体骨格のひずみと有効応力の水平成分は生じない．ヤング率は通常想定される岩石の剛性に比べて十分小さいので，$1/N = 0.0$, biot 定数は 1.0 とした．

図-3 に深度 0.09m および 0.81m における過剰間隙水圧(初期値からの間隙水圧変化)，有効応力の経時変化，および上端での鉛直変位の時刻歴を示す．グラフは半周期分を示す．「FS」が Fixed-stress split 法による解，「FS_1iter」が Fixed stress split 法で収束計算を行わない場合である．「FC」が完全連成(Full-coupling)を表す．図-3 より Fixed-stress split 法による解は完全連成の解と一致することが分かる．また，反復計算を行わない場合でも，おおよそ正解に近い結果を示している．よって，収束にはおおよそ 5～10 回程度の反復を要したが，計算時間の短縮のために収束回数を少なくすることも可能である．

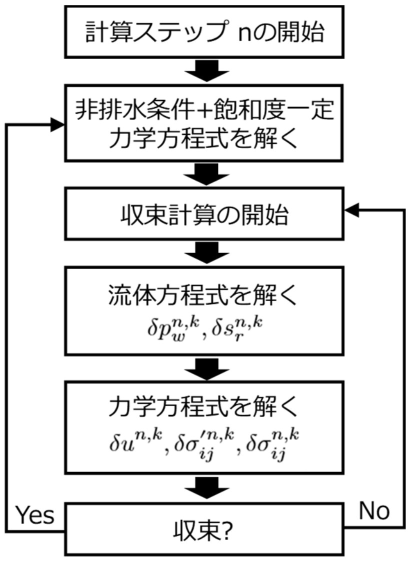


図-1 解析フロー

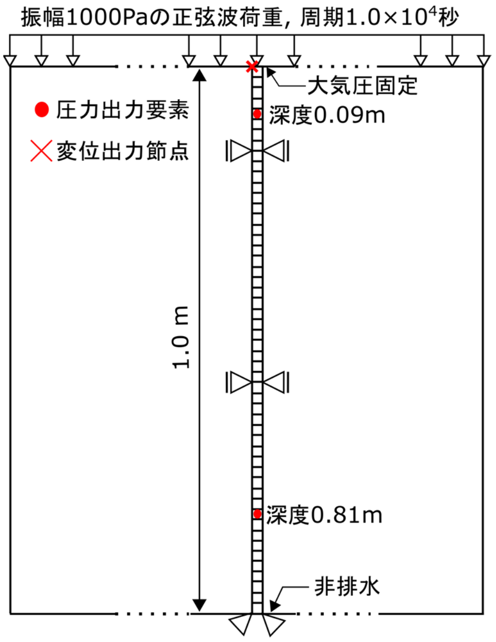
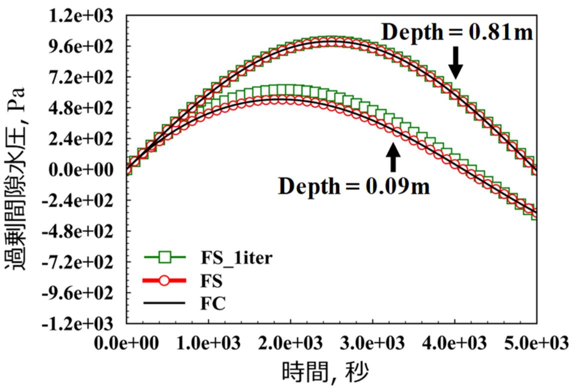


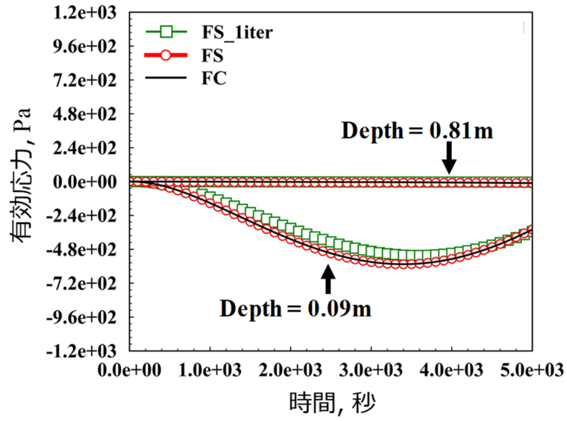
図-2 水飽和1次元問題の解析条件

表-1 水飽和１次元問題で用いた材料パラメータ

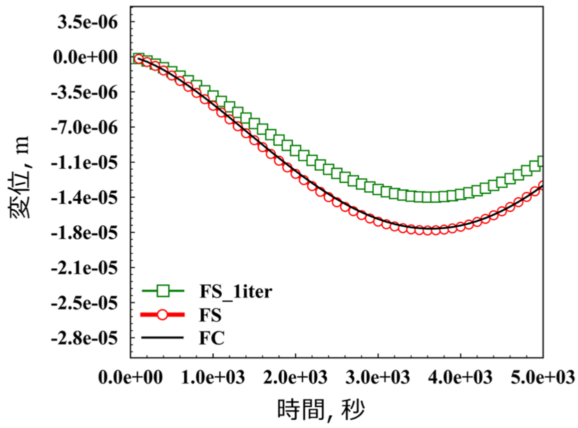
パラメータ	値
ヤング率 E , Pa	1.0×10^{7}
1/N, Pa^{-1}	0.0
Biot 定数	1.0
Porosity ϕ_0	0.20
水の密度 $\rho_{w,\mathrm{ref}}$ (初期), kg/m^3	998.0
水の参照圧力 $p_{w,\mathrm{ref}}$, Pa	1.0×10^{5}
水の圧縮率 c_w, Pa^{-1}	0.5×10^{-9}
水の粘性 μ_w, Pa s	1.0×10^{-3}



(a) 過剰間隙水圧



(b) 有効応力



(c) 上端の鉛直変位

図-3 水飽和１次元問題の解析結果

(3) 水-CO_2二相流存在下における圧力応答

多相流存在下における多孔質弾性体における，周期外力に対する圧力応答が問題となる例として，二酸化炭素地中貯留の貯留層の潮汐に対する圧力応答があげられる．二酸化炭素回収貯留(Carbon dioxide capture and storage)は工場や火力発電所などから排出された CO_2 を回収し，地中深くの地層に圧入して長期間にわたって貯留する技術である。地球温暖化を抑止する効果的なオプションとして実用化に向けた動きが世界各国で進められている。

一方，潮汐は主に月と太陽の引力によって引き起こされる海面の上下動(海洋潮汐)および地殻の変形(地球潮汐)の総称である．長岡の二酸化炭素地中貯留実証プロジェクトにおいて，観測井で測定された間隙水圧の潮汐に対する応答振幅が CO_2 到達後に低下することが確認されている [4]．この事は貯留層内の圧力から圧入した CO_2 の情報を得られることを示唆しており，CO_2 モニタリング技術として応用できる可能性がある [4].

図-4 に計算条件を示す．モデルは水平面 1000m×1000m，厚さ 10m の貯留層を設定する．始めに左端下の要素から CO_2 を圧入する．この計算によって得られた間

隙水圧，濡れ相の飽和度分布を初期条件とする．**図-4**中のコンターがそれぞれ設定した初期間隙水圧と初期飽和度の分布である．間隙水圧の主要トレンドからの摂動成分を模擬するために，荷重有りのケースと荷重無しのケースそれぞれで荷重1周期分の計算を行い，両者の差分をとる．x=1000mの面およびy=1000mの面は1.0×10^7Paで水圧固定，x=0mの面，y=0mの面，底部および上面は流量0境界とした．**表-2**は用いた材料パラメータである．CO_2の物性は25MPa，93℃における超臨界状態のCO_2に相当する．変位について，側面は水平変位固定，底部が鉛直変位固定である．設定した不飽和特性は**図-5**の通りであり，毛管圧曲線および相対浸透率数値表で与えた．**図-6**に荷重有りケースと荷重無ケース間の間隙水圧差分の時刻歴を示す．比較のために完全連成で解いた結果を合わせて示す．本条件下では，Fixed-stress split 法で解いた結果が完全連成で解いた結果に比べて概ね一致するものの，Fixed-stress split 法による解が若干大きくなった．これは間隙水圧の絶対値に比較して，荷重による圧力変動の値が小さいことが要因ではないかと考えられる．CO_2プルームの内部にある要素 156, 280 は圧力変動の振幅がCO_2プルームの外側の要素に比べて小さく，CO_2が存在することにより圧力変動の振幅が減少していることが分かる．一方で，CO_2プルームの外部であるが境界近傍の要素 342 とそのさらに外側の要素 435 で圧力変動の振幅がほぼ一致することから，本計算条件の下では，CO_2飽和度により圧力変動の大きさが決まっていることが分かる．

表-2　弾性定数および流体物性

パラメータ	値
ヤング率E, Pa	1.0×10^9
ポアソン比ν	0.20
$1/N$, Pa^{-1}	1.25×10^{-10}
Biot 定数b	0.90
Porosity ϕ_0	0.20
水の密度 ρ_w (初期), kg/m^3	998.0
水の圧縮率c_w, Pa^{-1}	0.50×10^{-9}
水の粘性 μ_w, Pa s	1.0×10^{-3}
CO_2の密度 ρ_{CO_2} (初期), kg/m^3	660.0
CO_2の圧縮率c_{CO_2}, Pa^{-1}	0.60×10^{-8}
CO_2の粘性 μ_{CO_2}, Pa s	1.8×10^{-5}

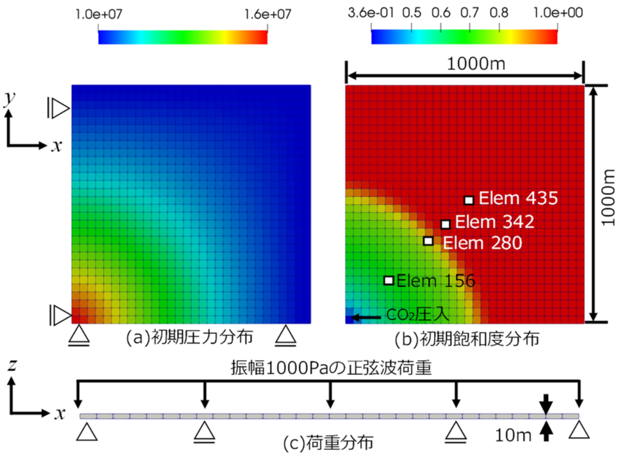


図-4 計算条件と初期飽和度

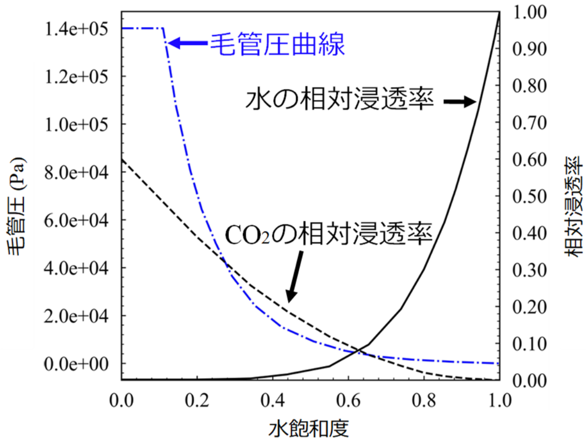


図-5 水飽和度-毛管圧，水飽和度-相対浸透率関係

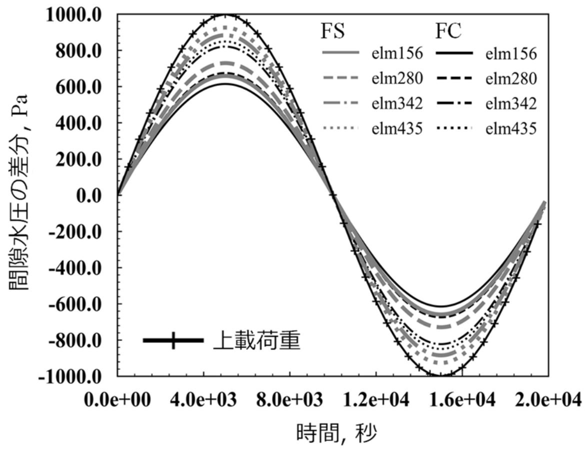


図-6 間隙水圧差分の経時変化

4. 結論と今後の課題

本研究では，表面力が経時変化する問題に Fixed stress split 法の適用性を検討した．本手法を水で飽和した等方多孔質弾性体の1次元問題，および水-CO_2二相流存在下における等方多孔質弾性体の問題にそれぞれ適用し，別

途完全連成により解いた結果と比較した．その結果Fixed-stress split 法による解は完全連成解析の解と概ね一致し，本手法による分離型解法が周期荷重を受ける多孔質弾性体に対して適用可能であることが分かった．今後はより一般的な条件下での適用性も確認するとともに，本手法を利用して汎用解析コードを利用した流体-地盤連成解析コード[5)]の適用範囲の拡大につなげたい．

参考文献

1) Kim, J., Tchelepi, H. A. and Ruben J. : Stability, accuracy and efficiency of sequential methods for coupled flow and geomechanics. *Proc. of SPE reservoir simulation symposium*. Society of Petroleum Engineers, 2009.
2) Mikelić, A., Wang, B. and Wheeler, M. F. : Numerical convergence study of iterative coupling for coupled flow and geomechanics. *Computational Geosciences*, Vol. 18, No.3-4, pp.325-341, 2014.
3) Coussy, O. Poromechanics. John Wiley and Sons, 2004.
4) Sato, K. Monitoring the underground migration of sequestered carbon dioxide using Earth tides. *Energy conversion and management*, Vol. 47, No.15-16, pp.2414-2423, 2006.
5) 赤木　俊文，山本　肇：並列流体-地盤力学連成シミュレータの開発 -二酸化炭素地中貯留における地盤変形問題への適用-，大成建設技術センター報，第51号，2018.

Applicability of iterative coupling by fixed-stress split method to poroelastic problems during cyclic loadings.

Toshifumi Akaki and Hajime Yamamoto

Among several iterative coupling methods, the fixed-stress split method is often used due to the unconditional stability and relatively rapid convergence. However, there is no literature on the applicability under variational loadings. In this study, applicability of the fixed-stress split method is studied for two problems, water-saturated one dimensional model with cyclic loading and a model including water-CO_2 two-phase fluids with cyclic loadings. The fixed stress-split method has shown well accuracy in the former problem. In the latter problem, there was some difference in simulation results between the fixed-stress split method and fully coupled method.