

乾燥来待砂岩の伝熱特性と厳密解による検討

山辺 正^{1*}・市川 敦也²

¹埼玉大学大学院 理工学研究科 (〒 338-8570 さいたま市桜区下大久保 255)

²埼玉大学工学部 建設工学科

*E-mail: yamabe@mail.saitama-u.ac.jp

低温環境に置かれた岩質材料の伝熱特性について、均質な砂岩を用いて検討した。冷却試験では直径 50 mm 高さ 50 mm の円柱供試体と、直径 50 mm および 100 mm の球状供試体を用いた。実験では中心温度を測定すると共に、側面において温度計測が可能なひずみゲージを貼付した。解析では乾燥状態の円柱と球状供試体の冷却試験に厳密解を適用し、熱伝達境界を適切に設定することにより伝熱特性を精度良く表現できた。

Key Words : heat transfer boundary, Dirichlet boundary, exact solution

1. 目的

地盤内に発生する低温側の熱現象としては液化低温ガスの岩盤貯蔵、寒冷地の凍上問題、「凍土壁」などが関連する。低温環境に置かれた地盤内部に含まれる水の凍結による力学的な影響は、水の相変化による体積変化¹⁾が原因である。この問題を解析的に扱った研究にはステファン問題^{2),3)}の取組み⁴⁾があり、水が凍結する連成場において凍結時の熱伝達係数について検討した例^{5),6)}や、原位置凍結融解試験の研究⁷⁾もある。これらの現象を数値解析^{8),9)}に取込むには、境界条件が単純な室内実験において解析手法の確認や実験手法の妥当性を検討すべきである。

本研究では、飽和供試体の凍結融解試験に伴う温度変化挙動を紹介した後、乾燥供試体を用いた冷却放熱試験について検討した。その結果から、供試体中心の温度変化を表現できる境界条件の形式について厳密解を援用した考察を展開する。

2. 実験に用いた供試体と実験方法

(1) 供試体の物性値

本研究に用いた試料は島根県宍道湖南部に分布する砂岩で一般に来待砂岩と呼ばれ、本文では単に砂岩と記す。この砂岩には堆積構造に基づく力学的異方性¹⁰⁾が知られており、本研究では方位の明らかな供試体を準備した。その物性値を表-1に示す。同表の比熱 C は示差走査熱量計 (DSC) の結果¹¹⁾、熱伝導率 κ は乾燥供試体の研磨した表面にプローブをあてる迅速熱伝導計測装置 (QTM-500) による結果を用いた。同表の比熱

表-1 乾燥した来待砂岩の物性値

物性	記号	値	単位
乾燥密度	ρ_d	1.992	g/cm ³
間隙率	n	18.72	%
比熱 (平均)	C	843.0	J/(kg·K)
熱伝導率	κ	0.951	W/(m·K)
圧裂引張り強さ	σ_t	4.468	MPa

には温度依存性があり、本研究で採用した厳密解には対象とした温度範囲内の平均値を用いた。熱物性には異方性も知られている¹²⁾が、本研究では方位を一定に作成した供試体の周囲から対称な熱環境を与え中心で温度変化を計測するため、表-1の物性値で構成される均質な材料と見なして実験結果を評価した。

(2) 供試体の準備と実験方法

実験に先立ち乾燥供試体の作成にあたっては 110 °C の環境で 48 時間以上乾燥させた試料を、デシケーター内にて常温になるまで保管した。飽和供試体の作成では、水浸させた供試体を 48 時間以上の間、真空脱気した。

実験では図-1 の上部に示す直径 50 mm、高さ 50 mm の円柱供試体を準備した。球状供試体については図-1 の下部に示す直径 50 mm と 100 mm を準備した。これら供試体の中心に至る直径 3.5 mm の穴を穿孔し熱電対の先端を挿入し、供試体中心の温度を測定した。

供試体から突き出た熱電対の部分については、耐熱性能に優れたシンフレックスチューブで覆い供試体と

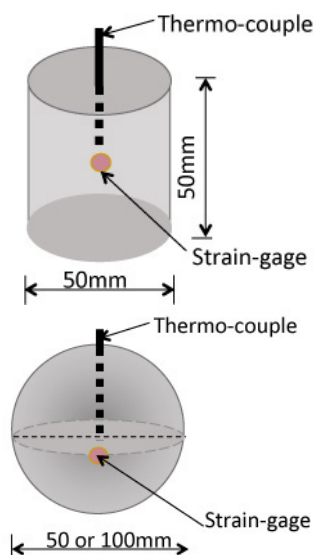


図-1 冷却試験に用いた円柱および球状供試体

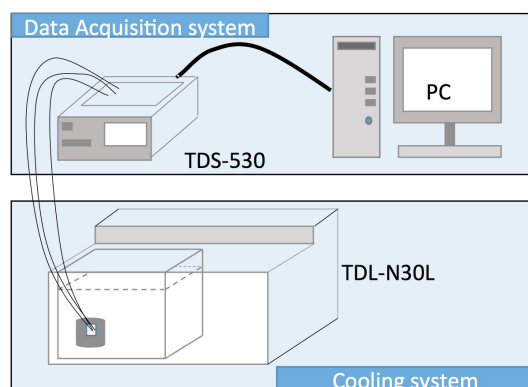


図-2 実験装置の概略図

共にビニール袋で密封した。その際、供試体周辺に空気が残らぬよう内部を脱気した。この手法により供試体に不凍液が浸透することを防いだ。供試体の側面には、測温機能付きのロゼットゲージを1枚貼り付け、温度とひずみを測定した。冷却過程では図-2の循環式恒温装置 (TDL-N30L) を用いた。設定した低温の不凍液で満たされた恒温槽中に常温の供試体を投入し、データロガー (TDS-530) で低温下の挙動を観測した。供試体の中心および側面の温度と側面のひずみが定常になるまで冷却を続け、定常状態を確認した時点で恒温装置の冷却機能を停止した。その後、空調で管理した常温環境の実験室内に取出し、ピーカーに入れて放熱過程を観測した。

3. 円柱供試体の温度変化

乾燥状態と飽和状態の供試体を -20°C の環境に設置し供試体中心の温度を計測した結果を図-3に示す。飽和

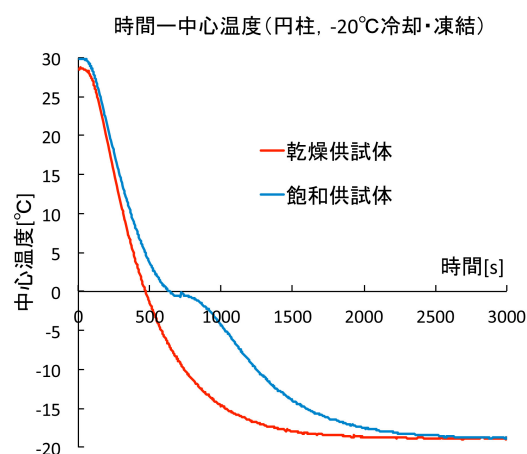


図-3 中心温度の経時変化。湿潤飽和と乾燥の比較 (円柱)

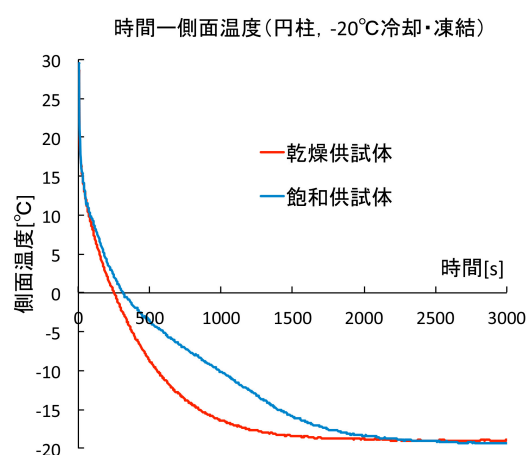


図-4 側面温度の経時変化。湿潤飽和と乾燥の比較 (円柱)

状態では内部に潜熱が発生し 0°C 付近においては温度低下が一時的に停留¹³⁾する。図-4は、同一供試体の側面で計測した温度変化である。当然だが図-4の温度低下は図-3より早く進行し、潜熱の影響も観察される。この潜熱や間隙の影響によって発生する氷層の移動を伴う現象の数値解析は別報¹⁴⁾に譲り、本研究では乾燥状態の熱伝導問題に注目する。

(1) 乾燥した円柱供試体に対する低温下の挙動解析

本節は、乾燥状態の供試体に対し実施した冷却実験を解釈できる適切な境界条件について検討する。円柱供試体の熱伝導問題を円柱座標系として定式化すると、支配方程式として次式を得る。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1)$$

T は供試体の温度 ($^{\circ}\text{C}$)、 t は時間 (秒)、 r は中心からの半径方向距離 (m)、 $\alpha = \kappa/(\rho C)$ は熱拡散率 (m^2/s) である。境界条件を Dirichlet 境界とし、外部温度を T_w ,

供試体の半径を L とすれば

$$T = T_w, \quad (r = L) \quad (2)$$

となる。一方、境界条件を熱伝達境界とすれば

$$-\kappa \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=\pm L} = h(T_s - T_w) \quad (3)$$

h は熱伝達係数 ($\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$), κ は表-1 の熱伝導率である。また, T_s は供試体表面の温度である。この T_s は供試体に貼付けたゲージで計測できるが, 左辺の温度勾配は供試体の表面近傍における半径方向の値であるから, 熱伝達係数 h を実験的に定めることはできない。

上記 2 種類の境界条件に対応する式 (1) の厳密解は次式に集約できる。

$$T(r, t) = T_w + (T_i - T_w) \sum_{j=1}^n u_j(r, t) \quad (4)$$

T_i は供試体の初期温度, $u_j(r, t)$ は無次元温度である。この無次元温度に対する厳密解¹⁵⁾により 2 種類の境界条件に対して, それぞれ以下の解¹⁶⁾を得る。

・ Dirichlet 境界に対する無次元温度解

$$u_j(r, t) = \frac{2J_0(r\alpha_j/L)}{\alpha_j J_1(\alpha_j)} \exp \left\{ - \left(\frac{\alpha_j}{L} \right)^2 \alpha t \right\} \quad (5)$$

・ 熱伝達境界に対する無次元温度解

$$u_j(r, t) = \frac{2J_0(r\beta_j/L) \cdot J_1(\beta_j)}{\beta_j \cdot \{J_0^2(\beta_j) + J_1^2(\beta_j)\}} \exp \left\{ - \left(\frac{\beta_j}{L} \right)^2 \alpha t \right\} \quad (6)$$

$J_n(x)$ は第 1 種 n 次のベッセル関数であり, α_j は $J_0(x)$ と x 軸との交点座標, β_j は以下を満足する値である。

$$\beta_j \cdot J_1(\beta_j) = Bi \cdot J_0(\beta_j) \quad (7)$$

$Bi = Lh/\kappa$ は無次元量のビオ数である。式 (7) は β_j を陽に解けない超越方程式であるが, 数式処理ソフトで交点の x 座標 β_j を精度よく決定¹⁷⁾できる。具体的に境界条件を十分に満足する解を得るためには, 式 (4) のフーリエ・ベッセル級数の項数として十分な大きさの n を用いる事になる。本研究では最低 20 項とし必要に応じて大きな n とした。熱伝達係数 h を決定するには, 従来の知見などにより初期値を設定し, 式 (7) の Bi に含まれる h を繰返し求める手順が必要となる。繰返し計算は中心温度が 0°C になることを目標とした逆解析である, と言い換えることも出来る。 h が大きくなると供試体周辺から熱の放出量も大きくなり, 中心が 0°C となるまでに必要な時間は短くなる。このように h の効果は一方的で繰返し計算は数回の内に収束するので, 供試体の中心温度が 0°C になる時間を目標に h を決定できる。その時間を事前に見積もることはできないが, 熱伝達境界の適切性を示すために, 本研究では上述の手法を採用した。 0°C を例えば 5°C 等に変更することも可能である。

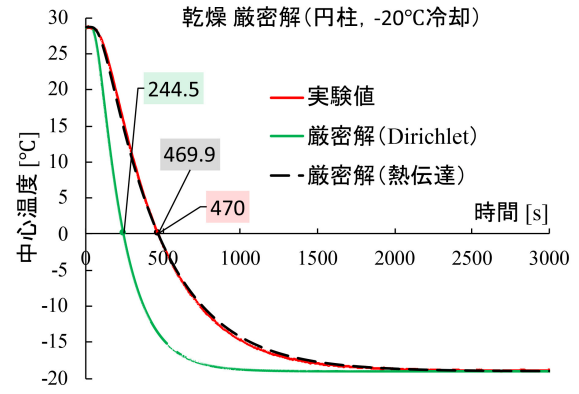


図-5 中心温度の時間変化に関する実験と境界条件の異なる場合の比較 (円柱, -20°C)

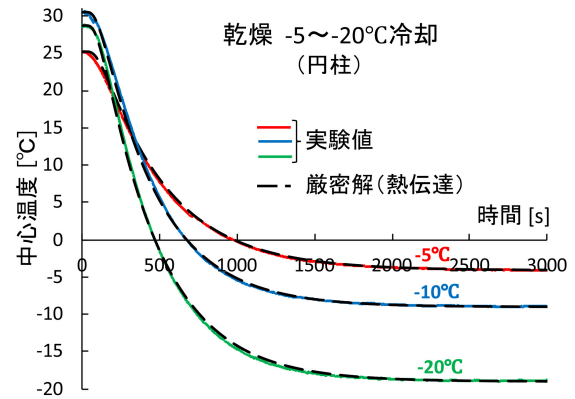


図-6 冷却過程における中心温度の変化

(2) 境界条件の異なる厳密解と実験値の比較

乾燥供試体の冷却試験に対し前項に見た手法と実験結果を比較する。図-5 の赤線は, 環境温度 -20°C での砂岩の冷却過程を表している。緑の線は Dirichlet 境界, 黒の破線は熱伝達境界である。実験値と熱伝達境界は良く一致しており両者を区別することは難しい。一方, Dirichlet 境界の場合は, 非定常な区間で実験値と乖離している。例えば中心温度が 0°C になるまでの時間を比較すると, およそ 1.9 倍の差がある。同図は -20°C の場合であるが, 他の温度条件を加えて示すと図-6 となった。同図から, いずれの環境温度でも熱伝達境界の厳密解 (点線) と実験値 (実線) は, ほぼ一致している。したがって, 乾燥供試体に適切な境界は熱伝達境界であり, 実験の挙動を十分に表現できると言える。

図-5 の実験後に供試体を恒温槽から取り出し, 実験室内で放熱過程を計測した結果を図-7 に示す。同図は放熱過程においても熱伝達境界は温度変化を良く表すことを示している。一方, Dirichlet 境界では特に初期において実験結果を表現できないことも判る。

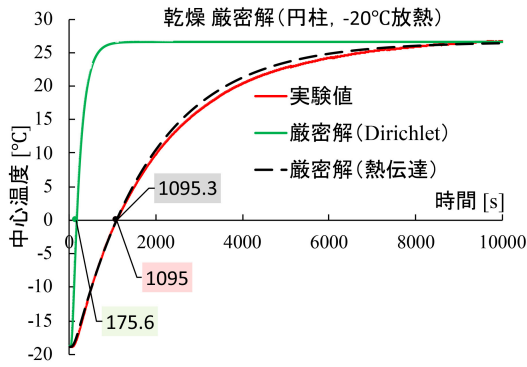


図-7 放熱過程における中心温度の変化

(3) 境界条件の違いによる内部の温度分布

前項の図-5, 図-6 は供試体中心の温度変化であった。図-5 の厳密解で半径方向の温度分布は Dirichlet 境界と熱伝達境界に対応して図-8, 図-9 になる。両図では、冷却過程の経過時間をパラメータとした。供試体両端において、Dirichlet 境界では温度分布の傾きが大きく特に時間初期に顕著であり、熱伝達境界の両端は温度分布の傾きは緩和されている。図-8 の供試体両端では常に不凍液温度となっており、これは供試体側面が瞬時に外部温度と等しくなることを意味している。図-4 に示した側面温度の変化とは矛盾する挙動である。

熱伝達係数 h は物性値ではなく、物体の周辺環境が流体であっても粘性や流速などに依存して変化し得る量である。実際には物体の表面近傍で冷却または放熱を受けた流体が移動し、熱エネルギーを輸送する複雑な挙動が発生する。この現象を熱流体の挙動を含めて正面から議論する代わりに、式 (3) の形式を採用することで熱輸送現象を表現する方策が熱伝達係数であり、その意味で工学的な量と捉えることができる。実験に用いた不凍液内に電磁流速計を挿入し流速を計測した結果、環境温度に依存する粘性の変化に影響を受けて平均流速も遷移し -5°C の 47.3 mm/s から -20°C の 21.2 mm/s まで低下した。流速が低下するに伴い輸送される熱量は減少し h も低下するためビオ数 Bi も減少することが予想される。これについては、次節の球状供試体に関する実験結果と共に検討する。

ここで図-8, 図-9 の初期時間を拡大すると、僅かに揺らぎが観察される。三角関数を基礎とするフーリエ級数が、不連続点付近で揺らぎを示すギブスの現象はフーリエ・ベッセル級数においても観察され両図でも $t=0$ の時に同様の揺らぎが発生する。総時間が数千秒の現象において初期時間に発生するこれらの揺らぎは、数秒以内に消滅するので、ここでは問題にならない。

図-5 では、熱伝達境界を用いた冷却過程の厳密解が中心温度の時間変化を示す実験結果を良く表していた。

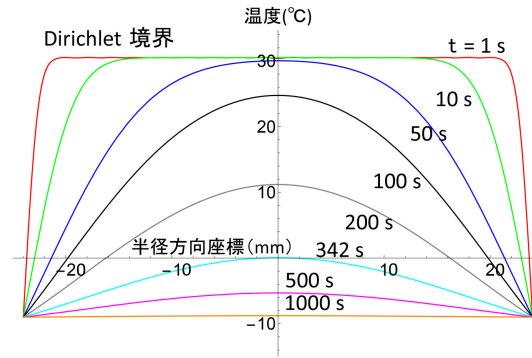


図-8 Dirichlet 境界による半径方向の温度分布

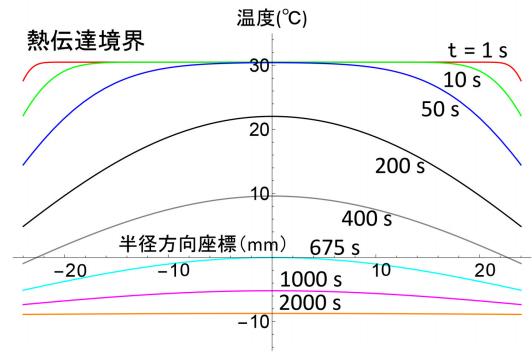


図-9 熱伝達境界による半径方向の温度分布

熱伝達係数を用いた式 (6) から半径方向の温度分布を求めた図-9 も、同様の精度を有していると考えられる。金属材料のように物体内部の熱伝導率が大きな場合は、ビオ数 Bi は極端に小さな値となり物体内部の温度分布も半径方向に差が現れない。逆に生物由来の食品などでは Bi が大きな値となり中心温度は低下しにくい傾向を示す。本研究で用いた砂岩のように間隙率が大きい場合は、上記 2 種の材料と比較して温度分布や変化が中間的な挙動を示すと想定でき、過渡熱伝導問題¹⁸⁾となる。

4. 乾燥した球状供試体の温度変化

前節の円柱供試体に続き、球状供試体について検討する。ここでは厳密解を示し、直径が 2 倍の供試体を用いた実験結果を前節の円柱の結果と比較すると共に、ビオ数の温度依存性を明らかにする。

(1) 厳密解による熱伝導問題の表現

球状供試体の熱伝導問題を、球座標を用いて定式化すれば支配方程式は次式となる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (8)$$

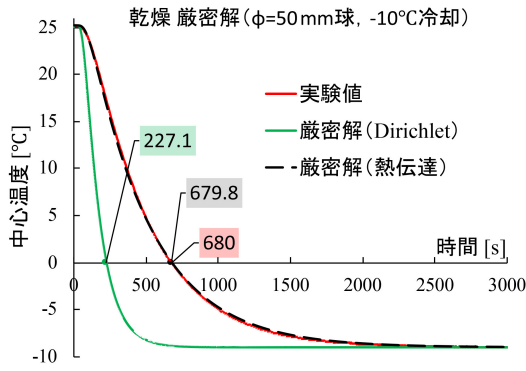


図-10 球状供試体における中心温度の変化

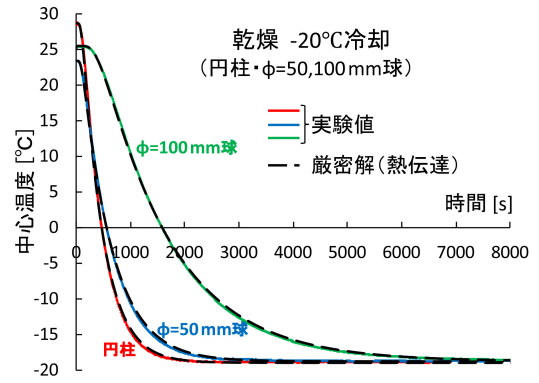


図-11 円柱と球状供試体の中心温度変化

ここで、変数は式 (1) と同一である。Dirichlet 境界の場合は式 (2), 熱伝達境界では式 (3) を満足することも円柱と同様である。上記 2 種類の境界条件に対し式 (4) と同様に、式 (8) の厳密解を次式で表す。

$$T(r, t) = T_w + (T_i - T_w) \sum_{\nu=1}^n \theta_{\nu}(r, t) \quad (9)$$

ここで、 $\theta_{\nu}(r, t)$ は無次元温度であり、その他の変数は式 (4) と同一である。この 2 種類の境界条件に対して、以下の無次元温度解¹⁶⁾を得る。

・ Dirichlet 境界に対する無次元温度解

$$\theta_{\nu}(r, t) = \frac{2(-1)^{\nu+1} \sin\left(\frac{\nu\pi r}{L}\right)}{\frac{\nu\pi r}{L}} \exp\left\{-\frac{(\pi\nu)^2}{L^2} \alpha t\right\} \quad (10)$$

・ 熱伝達境界に対する無次元温度解

$$\begin{cases} \theta_{\nu}(r, t) = 2\Psi_{\nu}(r) \exp\left\{-\frac{(\psi_{\nu})^2}{L^2} \alpha t\right\} \\ \Psi_{\nu}(r) = \frac{\sin \psi_{\nu} - \psi_{\nu} \cos \psi_{\nu}}{\psi_{\nu} - \sin \psi_{\nu} \cos \psi_{\nu}} \sin\left(\frac{\psi_{\nu} r}{L}\right) \end{cases} \quad (11)$$

ここで、 ψ_{ν} は以下を満足する値である。

$$\frac{Bi}{\psi_{\nu}} = \frac{1}{\psi_{\nu}} - \cot(\psi_{\nu}) \quad (12)$$

球状供試体の場合、熱伝達境界では式 (12) で表される超越方程式から変数 ψ_{ν} の値を求め、この ψ_{ν} を式 (11) に代入し球状供試体の無次元温度 $\theta_{\nu}(r, t)$ を決定できる。図-10 は、環境温度が -10 °C の球状供試体の冷却過程を表している。図-5 と同様、図中の緑は Dirichlet 境界、破線は熱伝達境界、赤は実験を表す。実験結果と熱伝達境界は良く一致しており、境界条件には熱伝達境界が適切であることが判る。続いて直径 50 及び 100 mm の球状供試体を用いて冷却試験を実施した。中心温度の変化を円柱の結果と共に示すと図-11 を得る。形状や体積によらず、適切な熱伝達係数により乾燥供試体に

表-2 球状供試体の中心が 0 °C に至る時間。下表において DB は Dirichlet Boundary を意味する。

	温度	φ50	φ100	φ100/φ50
実験値	- 5 °C	955	3070	3.215
	- 10 °C	680	2210	3.250
	- 20 °C	560	1585	2.830
熱伝達	- 5 °C	954.3	3070.3	3.217
	- 10 °C	679.8	2210.4	3.252
	- 20 °C	559.8	1584.2	2.830
DB	- 5 °C	295.9	1322.9	4.471
	- 10 °C	227.1	984.6	4.336
	- 20 °C	167.0	734.1	4.396

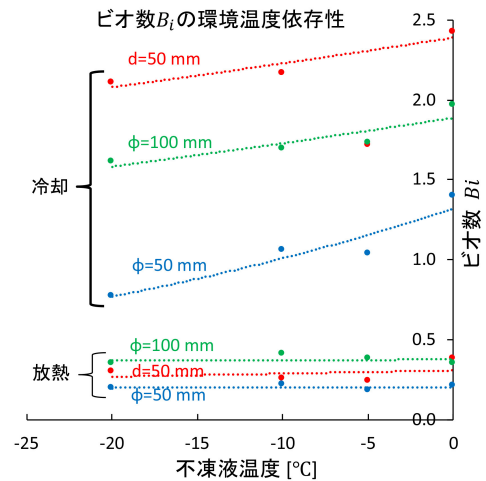


図-12 円柱 (d=50) と球状供試体 (φ=50, 100) のビオ数 B_i

において厳密解と実験値は一致した。環境温度と直径の違いに関わらず、全ての実験条件において同様の結果を得た。球状供試体の冷却過程で、中心温度が 0 °C に至る時間として表-2 を得る。熱伝達境界の結果は十分な精度であるが、Dirichlet 境界 (DB) では実験結果を

表現できない。円柱と球状供試体のビオ数の環境温度依存性を図-12に示す。冷却過程では温度低下と共にビオ数は低下する。これは電磁流速計で計測した平均流速の低下傾向とも合致した挙動である。不凍液から供試体を取り出した後の放熱過程においては、実験室内の空気の流れが緩やかであるため、ビオ数はほぼ一定になったと考えられる。

5. 結論

砂岩の冷却放熱試験を実施し、円柱と球状供試体について中心温度の時間変化を表現するには熱伝達境界が有効であることを示した。熱伝達係数は材料に固有な物性値とは異なり、外部環境の温度や流速さらには供試体の形状に依存する値であるが、ここに提案した手法を適用した非定常な厳密解と実験値は極めて近い値になることを示した。またビオ数の環境温度依存性を明らかにした。以上から多孔質な軟岩を対象として各種の熱伝導解析を実施するには、熱伝達境界を導入し適切な熱伝達係数を決定することにより、非定常な温度変化を合理的に表現できることを示した。

謝辞： 比熱および熱伝導率の測定に関し竹村貴人先生（日本大学）に、循環式恒温試験装置の流速測定に関し八木澤順治先生（埼玉大学）にお世話になったことを記して深くお礼を申し上げます。またJSPS科学研究費補助金（JP26249068, JP26630218）の助成を受けたことにも深く感謝申し上げます。

参考文献

- 1) Hobbs, P.V. : *Ice Physics*, Clarendon Press, 1974.
- 2) Stewartson, K. & Waechter, R.T. : On Stefan's problem for spheres, *Proc.R.Soc.London*, A 348, 1976.
- 3) Crank, J : *Free and Moving Boundary Problems*, Clarendon Press, Oxford, 1984.
- 4) Kholpanov, L.P., Zakiev S.E. & Fedotov, V.A. : *Theoretical Found. of Chem.Eng.*, 37-2, pp.113-121, 2003.
- 5) Yamabe, T. & Neaupane, K.M. : Determination of some thermo mechanical properties of Sirahama sandstone under subzero temperature condition, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 38, pp.1029-1034, 2001.
- 6) Neaupane, K.M. & Yamabe, T. : A fully coupled thermo hydro mechanical nonlinear model for a frozen medium, *Computers and Geotechnics*, 28 (8), pp.613-637, 2001.
- 7) 石山宏二, 渡辺邦夫, 山辺正, 野本寿 : 低温熱環境下における岩盤の温度分布特性-釜石鉱山における岩盤凍結融解試験, *応用地質*, 37 (2), pp. 2-10, 1996.
- 8) Yow, J.L. & Hunt, J.R. : Coupled precess in rock mass performance with emphasis on nuclear waste isolation, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 39 (2), pp.143-150, 2002.
- 9) Kolditz,O., Görke,U-J., Shao,H. & Wang,W. ed. : *Thermo Hydro Mechanical Chemical Processes in Fractured Porous Media*, Springer, 2012.
- 10) 朴赫, 高橋学, 藤井幸泰, 竹村貴人, 高橋直樹 : 来待砂岩の力学異方性と堆積構造に関する研究, その2, *応用地質*, 53 (3), pp.112-120, 2012.
- 11) 伊東良晴, 藤森裕基, 名古屋啓太, 竹村貴人 : 熱力学の視点から見た多孔質岩の熱物性精密測定と微小空孔の評価, *13th Japan Symposium on Rock Mechanics & 6th Japan-Korea Joint Symposium on Rock Engineering*, pp.793-796, 2013.
- 12) Popov, Y., Beardsmore, G., Clauser C. & Roy, S. : ISRM Suggested Methods for Determining Thermal Properties of Rocks from Laboratory Tests at Atmospheric Pressure : *Rock Mech. Rock Eng.*, 49, pp.4179 - 4207, 2016.
- 13) Ijam, N.K., Yamabe, T. & Sudisman, R.A. : Heat transfer characteristics of Tage Tuff under Freezethaw Environment, *Proc. of the 14th JRMS*, Paper 0085, pp.1 - 6, 2017.
- 14) 飛田大二郎 : 低温環境下における地盤内の熱-浸透問題に関する数値解析的研究, 埼玉大学理工学研究科 環境社会基盤コース, 2015.
- 15) Carslaw, H.S. & Jaeger, J.C. : *Conduction of Heat in Solids*, 1st. & 2nd. ed., Clarendon Press, Oxford, 1946 & 1959.
- 16) Jakob, M. : *Heat Transfer*, Vol.1, Ch.13, John Wiley, New York, 1949.
- 17) 山辺 正 : 堆積軟岩の凍結融解問題における境界条件の検討, 第38回西日本岩盤力学シンポジウム, pp.23-26, 2017.
- 18) 日本機械学会 : 伝熱工学, 2005.

Heat transfer phenomena and its suitable boundary conditions of Kimachi sand stone under cooling and heating process

Tadashi YAMABE and Atsuya ICHIKAWA

To investigate the heat transfer characteristics of sand stone due to cooling and heating process, cylinder of 50mm diameter and sphere of 50mm and 100mm diameter were used as the samples. Two types of boundary conditions had been used for the derivation of exact solutions of the governing equations. They were Dirichlet boundary (DB) and heat transfer boundary (HTB) conditions. Hence, comparison had been made on these two boundary conditions to identify their suitability on heat transfer characteristics. The results show that the exact solutions derived using HTB have been fitted better than DB for both cooling and heating phenomenon in cylinders as well as in spheres.