

動摩擦を考慮した完全陰解法DDAによる 岩盤斜面振動台実験の再現解析

末岡知紘¹・橋本涼太^{1*}・岩田直樹²・清田亮二²・高橋裕徳²

¹広島大学大学院 工学研究科社会基盤環境工学専攻 (〒739-8527 広島県東広島市鏡山1-4-1)

²中電技術コンサルタント(株) (〒734-8510 広島市南区出汐2-3-30)

*Email: ryotahashimoto@hiroshima-u.ac.jp

重要構造物周辺の岩盤斜面の地震時変形量評価を目的として数値解析手法による検討が進められている。岩盤不連続面に沿った滑り変位量を定量的に評価するには亀裂の摩擦特性を精緻に反映可能な手法を用いる必要がある。筆者らは離散体の解析手法の一つである不連続変形法 (DDA: Discontinuous Deformation Analysis) を対象に摩擦構成則の陰的積分アルゴリズムを導入し解析精度・数値的安定性の向上を図ってきた。ただし、従来手法では不連続面の静止摩擦角と動摩擦角が一致すると仮定しており、実際の岩石の挙動の再現に限界があった。本研究では上記の完全な陰解法に基づくDDAに静止摩擦から動摩擦への移行アルゴリズムを新たに導入し、既往の岩盤模型振動台実験の再現解析によってその妥当性の検証を行った。

Key Words : discontinuous deformation analysis, static friction, dynamic friction

1. 研究の背景と目的

近年、重要構造物周辺の不連続性岩盤や石造建造物など内部に不連続面を有する構造の地震時安全性評価のため、離散体の数値解析法による検討が進められており、その手法の一つとして不連続変形法 (DDA: Discontinuous Deformation Analysis) ¹⁾がある。DDAは弾性多角形ブロックの接触問題を扱うことができる離散体の数値解析手法であり、ブロック間の接触を剛なばねを用いたペナルティ法で処理し、ポテンシャルエネルギー最小化原理に基づき定式化されている陰解法に基づく手法である。したがって、解析時には有限要素法と同様にステップごとに連立方程式を解く必要があり1ステップあたりの計算コストは高くなるが、力学的平衡条件を満足でき、時間増分を大きくしても安定して計算できる。以上のような手法の特徴を利用し、これまで落石²⁾や斜面崩壊³⁾のシミュレーションに多く適用されている。

一方で、オリジナルのDDAには岩塊どうしに摩擦を伴う滑りが生じる際に、その変位量を精度よく表現できる数値計算パラメータ (例えば、ペナルティ係数や時間刻み) の設定が難しいという課題があった⁴⁾。この原因として橋本ら⁵⁾は、DDAでは陰解法を採用しつつも時間増分ごとの摩擦力の更新時に降伏規準に達した際に平衡方程式の解き直しをせず、次の時間ステップで摩擦強度へと引き戻すという手順をとっているため、瞬間的に摩擦力を過大評価していることを指摘した。そこで、不連続面の摩擦強度を精緻に反映するために摩擦構成則の陰

的積分アルゴリズム (リターン・マッピング法) と Newton-Raphson法による反復解法を導入した完全な陰解法に基づくDDAを提案し、精度とロバスト性の両面が改善されることを示した⁶⁾。

しかしながら、この完全陰解法DDAを含め、従来手法では不連続面の静止摩擦強度と滑り出し後の動摩擦係数が一致すると仮定しており、岩石材料で一般的に見られる滑動時の摩擦係数の低下⁷⁾を考慮していない。すなわち、実際の岩石を対象としたシミュレーション時には滑りが卓越しはじめた後の変位量の定量的評価が難しかった。そこで本研究では、上述のリターン・マッピング法をベースとして静止状態から滑り出した後の静止摩擦係数から動摩擦係数への移行 (図-1) を考慮したアルゴリズムを新たにDDAに導入する。そして、開発手法を既往の岩盤斜面模型振動台実験⁸⁾の再現解析に適用し、その性能を検証する。

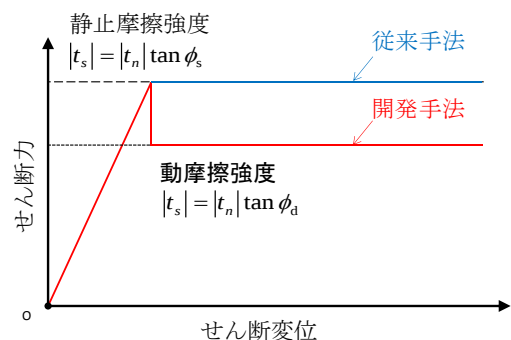


図-1 動摩擦の取り扱い

2. 完全な陰解法に基づく不連続変形法の理論概要

ここでは、橋本ら⁹⁾による摩擦構成則のリターン・マッピング法を導入した完全陰解法DDAの理論概要を記す。オリジナルのDDAの理論はポテンシャルエネルギー最小化原理によって構築されているが、ここでは橋本ら⁹⁾と同様に数値接触力学⁹⁾に基づき仮想仕事の原理による定式化を示す。

(1) 連続体の接触問題の支配方程式と弱形式

DDAでは複数の連続体から構成されている系の相互接触を含む運動方程式を解く。 n 個の独立した連続体 Ω_i ($i=1, 2, \dots, n$) からなる系を仮定すると、各物体の運動・変形は連続体の運動方程式、

$$\rho_i \ddot{\mathbf{u}}_i - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i - \rho_i \bar{\mathbf{b}}_i = 0 \quad (1)$$

ひずみの適合条件式、

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \frac{1}{2} \left\{ \nabla \mathbf{u}_i + (\nabla \mathbf{u}_i)^T \right\} \quad (2)$$

増分形の構成関係式、

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{D}_i : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (3)$$

で記述される。ここで、下付き添字 i は Ω_i の物理量、変数の上のドット ($\cdot$) は物質時間微分、バー ($\bar{\cdot}$) は既知量を表す。また、 ρ は密度、 $\mathbf{u}$ は変位ベクトル、 $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力テンソル、 $\mathbf{b}$ は物体力ベクトル、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は微小ひずみテンソル、 $\mathbf{D}$ は4階の構成関係テンソルである。なお各物体は式(1)~(3)に加えて、変位境界条件、

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{n}_i \quad \text{on } \Gamma_{iu} \quad (4)$$

および応力境界条件

$$\mathbf{t}_i = \boldsymbol{\sigma}_{ij} \cdot \mathbf{n}_j = \bar{\mathbf{t}}_i \quad \text{on } \Gamma_{i\sigma} \quad (5)$$

を満足する必要がある。ここに、 $\mathbf{t}$ は表面力ベクトル、 Γ_{iu} および $\Gamma_{i\sigma}$ はそれぞれ変位境界と応力境界であり、 $\Gamma_{iu} \cup \Gamma_{i\sigma} = \Gamma_i$ かつ $\Gamma_{iu} \cap \Gamma_{i\sigma} = \emptyset$ である。以上の基礎式ならびに境界条件で構成される境界値問題の弱形式を重み付き残差法によって導出すると次式を得る。

$$G_i^{\text{ext, int}}(\mathbf{u}_i, \delta \mathbf{u}_i) = \int_{\Omega_i} \delta \mathbf{u}_i \cdot \rho_i \ddot{\mathbf{u}}_i d\Omega + \int_{\Omega_i} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_i : \boldsymbol{\sigma}_i d\Omega - \int_{\Omega_i} \delta \mathbf{u}_i \cdot \rho_i \bar{\mathbf{b}}_i d\Omega - \int_{\Gamma_{i\sigma}} \delta \mathbf{u}_i \cdot \bar{\mathbf{t}}_i d\Gamma = 0 \quad (6)$$

次に、図-2のように二つの連続体 Ω_j と Ω_k が境界 Γ_{jk} で接触する場合を考える。このとき各物体の運動・変形は式(6)に加えて、物体間の非貫入条件、

$$g_N \geq 0 \quad \text{on } \Gamma_{jk} \quad (7)$$

および Γ_{jk} 上での釣り合い条件、

$$\mathbf{t}_j + \mathbf{t}_k = 0 \quad \text{on } \Gamma_{jk} \quad (8)$$

を満足する必要がある。ここに、 g_N は物体間のギャップ（物体表面の法線方向の距離）である。ここで、式(8)中の Γ_{jk} 上に作用している表面力、つまり接触力を Γ_{jk} に

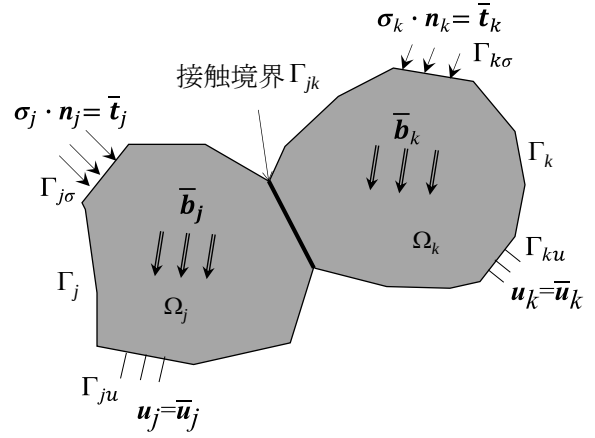


図-2 連続体間の接触問題

垂直な成分 t_N と平行なせん断成分 t_S に分解し、ギャップ g_N と接触面に沿ったせん断変位 g_S に対応する仮想変位をかけ、 Γ_{jk} に関して積分すると以下のように接触力に関する仮想仕事の式が得られる。

$$G_{jk}^c(t_N, t_S, g_N, g_S) = \int_{\Gamma_{jk}} t_N \delta g_N d\Gamma + \int_{\Gamma_{jk}} t_S \delta g_S d\Gamma \quad (9)$$

物体間で接触が生じている場合は、内力、外力、接触力による仮想仕事の和がゼロであるという条件を満たす必要がある。 Ω_i に関する外力と内力による仮想仕事を $G_i^{\text{ext, int}}(\mathbf{u}_i, \delta \mathbf{u}_i)$ 、 Ω_j と Ω_k の接触力による仮想仕事を $G_{jk}^c(t_N, t_S, g_N, g_S)$ とすると、系全体に関して解くべき弱形式は次式となる。

$$\sum_{i=1}^n G_i^{\text{ext, int}}(\mathbf{u}_i, \delta \mathbf{u}_i) + G_{jk}^c(t_N, t_S, g_N, g_S) = 0 \quad (10)$$

(2) 従来手法の接触力の更新アルゴリズム

式(10)に示した弱形式の接触に関する項には未知数として t_N 、 t_S が含まれている。したがって、式(10)を解くには接触力を Lagrange の未定乗数として解くか、ペナルティ法により正則化する必要がある。完全陰解法DDA⁹⁾ではオリジナルのDDAと同じくペナルティ法を採用している。

ペナルティ法では、式(7)の非貫入条件を緩和して物体間の微小な重なりを許容し、接触力の垂直力 t_N を

$$t_N = p_N g_N \quad (11)$$

というように貫入量 g_N と法線方向のペナルティ係数 p_N によって表す。一方、接触力のせん断成分はせん断変位の進行に伴って増加し、摩擦強度に達すると非可逆な滑りを生じる非線形な挙動を示す。摩擦降伏基準としては Coulomb の摩擦則、

$$f = t_S \operatorname{sgn}(g_S) - |t_N| \tan \phi \quad (12)$$

が用いられ、次式でせん断応力 t_S が更新される。

$$t_S = \begin{cases} p_S g_S, & f < 0 \text{ (弾性状態)} \\ |t_N| \tan \phi \cdot \operatorname{sgn}(g_S), & f = 0 \text{ (滑動状態)} \end{cases} \quad (13)$$

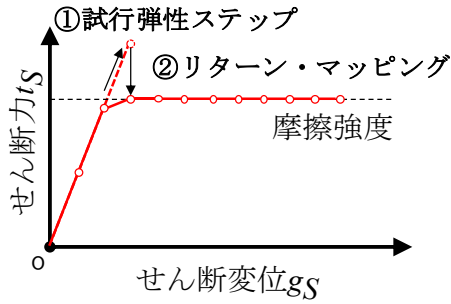


図-3 リターン・マッピング処理の手順

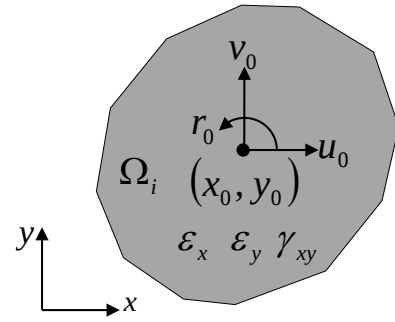


図-4 DDAにおける変位変数

ここで、 ϕ は不連続面の摩擦角、 P_s はせん断方向のペナルティ係数である。この非線形挙動を精緻に表現するためにリターン・マッピング法³⁾を実装している。

具体的な更新アルゴリズムの概要は以下の通りである。まず、時間刻みごとに系全体の変位増分、およびそれに基づく貫入量とせん断変位の変化量を算出し、式(11)ならびに式(13)の第1式を用いて t_N と t_s を更新する(図-3の① 試行弾性ステップ)。得られた接触力を式(12)の降伏条件に代入し $f < 0$ であった場合、弾性状態と判定され更新された接触力はそのまま引き継がれる。一方、 $f \geq 0$ となり降伏基準を超過していたら、図-3の②のように滑動状態と判定され t_s を摩擦強度にまで引き戻すリターン・マッピング処理を行い、式(13)の第2式で更新する。

なお、せん断力の引き戻しの際に生じる外力の不釣り合い力を解消するため、Newton-Raphson法を用いた反復解法も合わせて実装している。このとき反復計算の過程での解の二次収束性を確保するため、Newton-Raphson法に整合するように弱形式を線形化した上で空間離散化を行い、整合接線剛性マトリックスを導出する。

空間離散化は各ブロック内部の変位場および接触部の g_N と g_s に対して行われるが、従来のDDAと同様に前者は一つのブロック内部が一様ひずみであると仮定して二次元の場合重心位置の剛体変位(u_0, v_0)、回転 r_0 、三つのひずみ成分 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ (図-4)を用いて表される。また後者も従来手法と同様、接触をブロックの頂点と辺で定義する(図-5)ことで離散化される。そして、線形化方程式に含まれる加速度項をNewmark法の β 法($\beta = 0.5, \gamma = 1$)を用いて時間離散化し、時間刻みごとに解くことでブロックの動的挙動を解析する。離散化後のマトリックスの具体形など理論の詳細は文献⁹⁾を参照されたい。

(3) 静止摩擦から動摩擦への移行アルゴリズムの導入

式(12), (13)の通り従来手法では摩擦力の算定時に静止摩擦角と滑動中の摩擦力を規定する動摩擦角が一致すると仮定している。一方で、実際の岩石材料を対象とする場合、その不連続面の滑動時の動摩擦角は静止時の摩擦角よりも小さくなることが多い。したがって本研究では、動摩擦への移行アルゴリズムを新たにDDAに導入する。

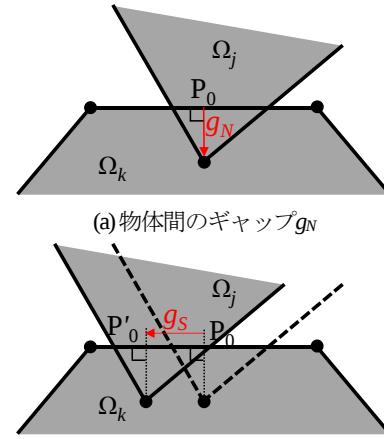


図-5 頂点と辺による接触の定義

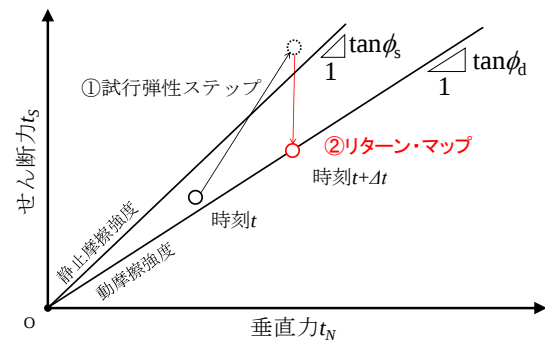


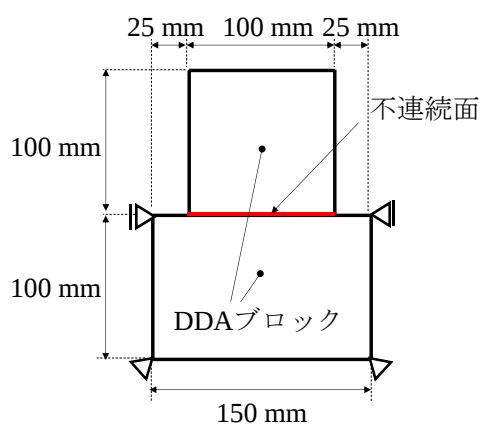
図-6 静止摩擦から動摩擦への移行処理

具体的には、弾性状態からの降伏判定には、式(12)の摩擦角として静止摩擦角 ϕ_s を用い、せん断力が静止摩擦強度に達して滑動状態に移行したあとのせん断力の評価(式(13)の第2式)には、動摩擦角 ϕ_d を適用する。なお、本研究では、簡単のため滑り出すと同時にせん断力が瞬時に動摩擦力にまで低下すると仮定する(図-1)。すなわち、増分計算の過程でせん断力が静止摩擦強度に達した際にはせん断力を動摩擦角に対応した強度にまでリターン・マップする(図-6)。滑動開始後は、滑り続けている間は降伏判定にも動摩擦角 ϕ_d を用い、もし除荷され弾性状態へと移行した場合、再滑動の判定には静止摩擦角 ϕ_s を使用する。以上の処理によって、静止摩擦と動摩擦の移行を表現する。

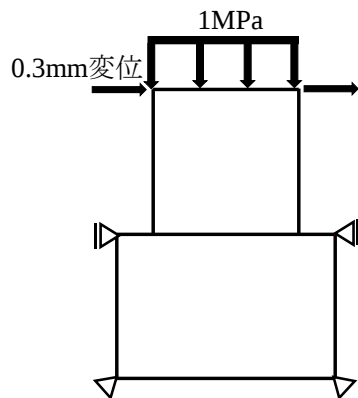
3. 開発手法の検証解析

(1) 不連続面に沿った単純せん断解析

静止摩擦から動摩擦への移行アルゴリズムの効果を検証するため、不連続面に沿った単純せん断解析を行う。図-7に示す2つの弾性体ブロック（ヤング率：1 GPa，ポアソン比：0.0）を解析対象として，上段のブロック上面に1 MPaの垂直荷重を与えた状態で，右向きに0.3 mmのせん断変位を150ステップに分割して与える。なお，不連続面のペナルティ係数は100 GN/m，静止摩擦角は30°，動摩擦角は20°とした。



(a) モデルの寸法



(b) 荷重条件

図-7 不連続面に沿った単純せん断解析モデル

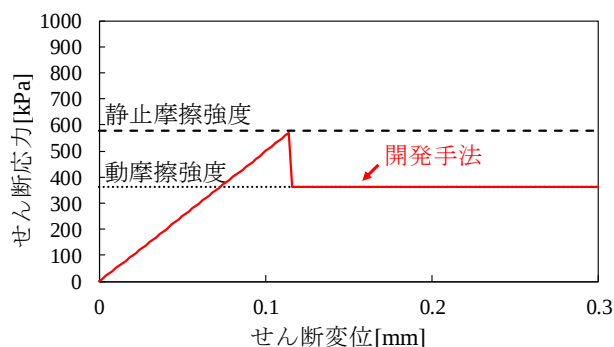


図-8 上段ブロックのせん断応力—せん断変位関係

解析結果より得られた上段ブロックに与えたせん断変位とせん断応力の関係を図-8に示す。本図からはせん断応力が静止摩擦強度（ $1 \text{ MPa} \times \tan 30^\circ \approx 577.3 \text{ MPa}$ ）に達すると瞬時に動摩擦強度（ $1 \text{ MPa} \times \tan 20^\circ \approx 364.0 \text{ MPa}$ ）へ低下していること，また，リターン・マッピング法により各強度が精度良く反映されていることが確認できる．，これにより開発手法が不連続面における静止摩擦と動摩擦の移行を適切に表現できていることが検証された。

(2) 岩盤斜面振動台実験の再現解析

滑り出し後の摩擦強度の低下を伴う実際の岩石に対する開発手法の適用性を検証するため，足立らによる不連続面を有する岩盤斜面の模型振動台実験⁷⁾の再現解析を行った。同実験は上段と下段の二つのブロックで構成された高さ130 mm，幅380 mmで水平面から15°の不連続面を有する琉球石灰岩ブロックをフレームとともに水平一軸振動台に設置し，周波数2 Hzで振幅を最大670 Galまで段階的に増幅させた水平加速度（図-9）を与えて，その滑動開始のタイミングと変位量を観察したものである。

本解析では，図-10に示す二つの弾性体ブロック（ヤング率：7.0 GPa，ポアソン比：0.33，単位体積重量：22.0 kN/m³）からなる実験と同一寸法のモデルを対象に，実験で計測されたフレームの水平加速度波形（図-9）を与え加振する。不連続面の摩擦角については，振動台実験とは別に斜面模型に対して実施された傾斜実験結果に基づき静止摩擦角を40.5°，動摩擦角を31.6°とし，垂直ペナルティ係数は10 GN/m，せん断ペナルティ係数は10 MN/mと設定している。また，時間刻みは0.0001秒とした。以上の条件下で従来通り静止摩擦と動摩擦を一致させた場合と，開発手法による静止摩擦から動摩擦への移行を考慮した場合それぞれで再現解析を実施した。

動摩擦を考慮しなかったケースと考慮したケースそれぞれの解析結果から得られた上段ブロックの斜面に沿った滑り変位履歴（斜面を下る方向が正）を図-11，図-12にそれぞれ示す。なお，図中の矢印は滑り出しを表す。実験結果と比較すると，従来手法では滑り出す時刻はほぼ一致しているものの，滑動開始後の摩擦力の評価にも静止摩擦角を採用しているため，変位の発生量が比べて小さいことがわかる。

一方，開発手法では滑り出し後の摩擦係数の低下が考慮されているため，滑り出しの時刻だけでなく滑り変位量を正確に表現できた。なお，一度滑りが生じてから約10.5cmで変位量が一定となっているのは，ブロックがフレームに設置しているストッパー（図-10）に衝突しそこで停止したためである。今後，段階的に変位が発生するようなケースでの検証を進める必要があるが，以上の結果により開発手法の岩石不連続面に沿った動的滑り問題への適用性を一定程度確認できた。

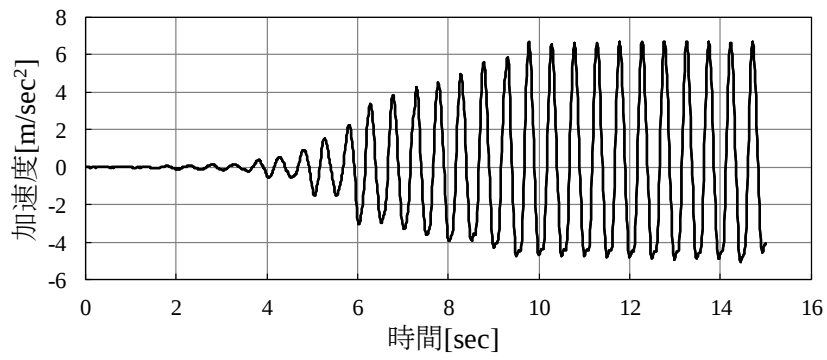


図-9 振動台実験の入力加速度波形

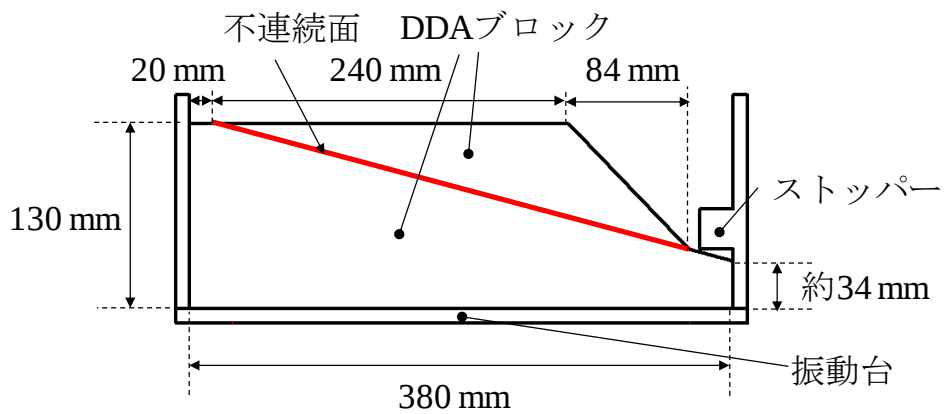


図-10 岩盤斜面模型振動台実験の解析モデル

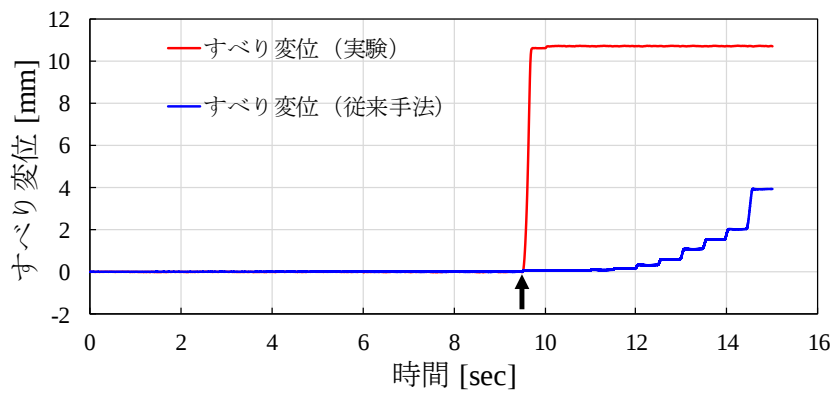


図-11 上段ブロックの変位履歴（動摩擦非考慮）

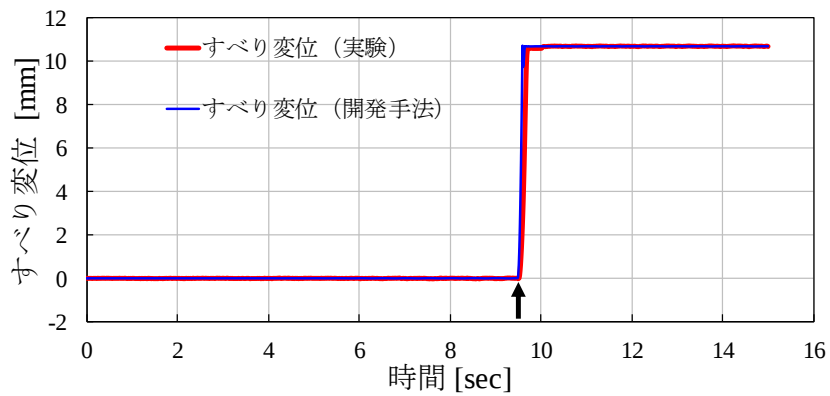


図-12 上段ブロックの変位履歴（動摩擦考慮）

4. 結論

本研究では、不連続性岩盤の動的挙動、特に滑りに伴う摩擦角の低下時の変位を定量的に予測可能な解析手法の構築を目的として、筆者が開発してきた完全な陰解法による不連続変形法（DDA）に静止摩擦から動摩擦への移行アルゴリズムを新たに導入した。

開発手法の性能を検証するため既往の岩盤斜面振動台実験の再現解析を実施し、その結果、滑動開始時刻だけでなくその後の不連続面に沿った変位量を精度良く反映できることが確認された。なお、今回対象とした実験は滑りが一度で完了するものであったため、今後、段階的に変位を生じるようなケースについても検討し、さらなる妥当性検証を進める。

参考文献

- 1) Shi, G.H. and Goodman, R.E.: Generalizaion of discontinuous deformation analysis for forward modelling, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 13, pp. 359–380, 1989.
- 2) 馬 貴臣, 松山裕幸, 西山 哲, 大西有三: 落石シミュレーションのための解析手法の研究, *土木学会論文 集 C*, Vol. 63, No. 3, pp.913-922, 2007.
- 3) Wu, Jian-Hong: Seismic landslide simulation in discontinuous deformation analysis, *Computers and Gefotechnics*, Vol. 37, pp. 594-601, 2010.
- 4) 小山倫史, 赤尾悟史, 西山 哲, 大西有三: 岩盤斜面の地震応答解析における不連続変形法（DDA）の適用に関する研究, *土木学会論文 集 C*, Vol. 65, No. 3, pp.644-662, 2009.
- 5) 橋本涼太, 小山倫史, 菊本統: 不連続面の摩擦則の陰的積分を導入した不連続変形法の開発, 第 45 回岩盤力学に関するシンポジウム講演集, pp. 303-308, 2018.
- 6) Barton, N.: Review of a new shear-strength criterion for rock joints, *Engineering Geology*, Vol. 7, pp. 287-332, 1973.
- 7) 足立光, 岩田直樹, 清田亮二, 藍檀オメル, 渡嘉敷直彦: 不連続面を有する岩盤斜面の地震時安定性に関する実験的および解析的検討, 第 14 回岩の力学国内シンポジウム講演集, 論文 No. 054, 2017.
- 8) Wriggers, P. : *Computational Contact Mechanics (Second Edition)*, Springer, 2006.

SIMULATION OF SHAKING TABLE TEST OF DISCONTINUOUS ROCK SLOPE BY FULLY IMPLICIT DDA CONSIDERING DYNAMIC FRICTION

Tomohiro SUEOKA, Ryota HASHIMOTO, Naoki IWATA, Ryoji KIYOTA,
Hironori TAKAHASHI

For the prediction of the seismic behaviors of the discontinuous rock slopes, a numerical method that can precisely incorporate the friction characteristics along the rock joints is required. In this study, to express the friction strength reduction of the joints during the slippage, a transition algorithm between static and dynamic friction based on the implicit integration method of the constitutive law is newly introduced into Discontinuous Deformation Analysis, a numerical method for jointed rock masses. The developed method was applied to the simulation of a shaking table test of the discontinuous rock slope model, and the validity of the simulated results was examined comparing with the experimental results.