第 46 回岩盤力学に関するシンポジウム講演集
公益社団法人土木学会　2019 年１月　講演番号 9

剛体回転を考慮した4節点iso-parametric要素マニホールド法による落石モデルの解析

橋本 涼太[1]・大西 有三[2]・佐々木 猛[3*]・三木 茂[4]

[1]広島大学大学院工学研究科（〒739-8527広島県東広島市鏡山1-4-1）
[2]京都大学（〒662-0099 兵庫県西宮市剣谷町12-15）
[3*]サンコーコンサルタント(株) (〒136-8522 東京都江東区亀戸1-8-9)
[4]基礎地盤コンサルタンツ (株) (〒136-8522 東京都江東区亀戸1-5-7)
*E-mail: sasakit@suncoh.co.jp

従来，岩盤崩落や落石解析に用いられている不連続変形法（DDA；Shi, 1981）では，基盤となる岩盤斜面ブロックとその表面を落下する落石ブロックの大きさがその面積比で3桁以上になると，連立方程式の桁落ちにより正しい解が得られない．一方，同じく不連続性岩盤の解析法であるマニホールド法（NMM；Shi, 1989）では，回転自由度が考慮されないため，回転を伴い落下する落石を正しく解析できない．本論文では著者らが提案した4節点iso-parametricマニホールド法にCrisfield & Moita（1996）の共回転定式化を導入し剛体回転を考慮した．その結果，NMMで大回転を生じる落石問題に適用してもメッシュの不自然な変形を回避して解析可能となった．

Key Words :*Numerical Manifolid Method, rock fall problem, co-rotational formulation*

1. はじめに

不連続性岩盤斜面の崩落や落石問題を対象に離散体の解析手法の適用が進んでおり，その中で用いられている手法の一つに不連続変形法（Discontinuous Deformation Analysis: DDA）[1)]がある．DDAはShiが開発した弾性ブロックの動的接触解析法であり，岩塊間の接触をペナルティ法で扱い，ポテンシャルエネルギー最小化原理によって定式化された陰解法に基づく解析手法である．陰解法であるが故に陽解法を採用する個別要素法に比べ長い時間増分でも安定して解が得られる利点を持つ．また，近年では不連続面に作用する摩擦力の更新アルゴリズムを改良し，さらなる精度，安定性の向上が図られている[2)]．

しかし，DDAを実斜面の岩盤崩落や落石解析に適用する際に依然として存在する課題の一つに，計算機の有効桁数の制約による桁落ちの問題がある[3)]．DDAで斜面をモデル化する際には一般に地山は数100m規模の一つの大きな弾性ブロックとしてモデル化される．一方，その上を落下する岩塊や落石は数m程度のサイズとなるため，弾性ブロックの面積や体積には，100倍から1000倍程度の差が生じる．この場合，支配方程式である運動方程式に含まれる慣性項や要素剛性のオーダーに大きなギャップが生じるため連立方程式上で桁落ちが生じ，正しい結果が得られなくなる[3)]．これは現在の計算機の限界により起こる問題であり，根本的解決には時間を要する．

この桁落ちの問題を回避可能な岩盤解析手法として，本研究では同じくShiが提案したマニフォールド法（Numerical Manifold Method: NMM）[4)]に着目する．NMMではDDAと同じく複数の弾性ブロックからなる系を対象としつつ，各ブロック内部の変位場を有限被覆の概念に基づく数学メッシュで空間離散化することで，材料内部の詳細な変形を考慮した解析が可能である．同時に，質量マトリックスや剛性マトリックスのオーダーは数学メッシュの要素サイズに依存するため，地山を十分に細かい要素に分割すれば上述の桁落ちの問題は回避できる．

ただし，NMMは有限要素法と同様格子ベースの手法のため，大回転挙動を扱う際には適切な大変形定式化を採用する必要がある．従来，Sasakiら[5)]はNMMにJaumann応力速度を用いたUpdated Lagrangian法を使用していたが，一般に客観応力速度は増分客観性を満たさないことが知られており[6)]，高速回転時に不自然な応力・変形を示す．

本研究では以上の課題に対し，Crisfield & Moita[7)]が有限要素法にて微小ひずみ領域での大回転挙動を取り扱うために提案した共回転定式化をNMMに導入し，落石問題を適切に取り扱い可能な手法の開発を図った．本論文ではその定式化の概要ならびに解析例を示す．

2. 従来のNMMの理論概要

(1) 弾性体の接触問題のポテンシャルエネルギー

複数の弾性体ブロックからなる系の接触を含む動的大変形解析における系全体のポテンシャルエネルギーΠ^{sys}は式(1)で表される[5].

$$\Pi^{sys}=\sum_{i=1}^{n}\Pi^{(block)i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\Pi^{i}+\sum_{j=1}^{m}\Pi^{i,j}_{PL}\right) \tag{1}$$

式(1)右辺第1項は各ブロックの内力・外力によるポテンシャルエネルギー，第2項はブロックiのブロックjに対する接触力のポテンシャルエネルギーである．第1項は,

$$\begin{aligned}\Pi^{i}=&\int_{V_i}\frac{\rho^{c}}{\rho^{0}}[\tau^{*}\delta\varepsilon]dV_i\\&-\int_{\Gamma_i}\bar{t}\,ud\Gamma-\int_{V_i}[\rho(b-\ddot{u})-c\dot{u}]udV_i\end{aligned} \tag{2}$$

と表せ，式(2)の第1項は速度場のひずみエネルギー，第2項は表面力，第3項は慣性力，物体力および減衰力によるエネルギーである．ここに，τ^{*}：2nd Piola Kirchhoff応力増分，$\ddot{u}$：加速度，$\dot{u}$：速度，ρ^{0}およびρ^{c}：変形前および変形後の密度，b：物体力，c：減衰定数，$\bar{t}$：表面力，V：ブロックの体積，Γ：ブロックの表面積である．NMMでは式(1)のポテンシャルエネルギーを変位に関して最小化し，変位場を後述の有限被覆の概念で空間離散化して解く．

(2) 4節点iso-parametric NMM

上述の通り，NMM では有限被覆（finite cover）の概念を用いて材料内部の変位場を空間離散化する．NMM では解析対象となる物体を物理要素と呼び，その上を変位場の近似関数（被覆変位関数）を持つ有限被覆で互いに重ね合わせながら覆う（**図-1**）．この重なり合った領域を NMM における要素と呼ぶ．そしてこの NMM 要素上で重なり合っている各被覆の変位関数を，Partition of Unity 条件[9]を満たす重み関数による重み付き平均をとって結合することで物理要素全体の変位場を近似する．

理論上被覆やそれにより生成される NMM 要素には任意形状を利用可能だが，本論文では Sasaki ら[5]の四角形の有限被覆（**図-2**）を用いた 4 節点 iso-parametricNMM 要素を用いる．また被覆変位関数には任意の多項式を使用できるが，本研究では被覆全体の変位が四角形被覆の中心点における変位と一致するとする定数被覆変位関数を使用する．重み関数には**図-3** に示すように被覆の中心で 1，境界で 0 となる双一次関数を使用する．このとき，一つの四角形 NMM 要素 e 内部の任意点の変位ベクトルは以下のように表される．

$$\begin{Bmatrix}u_x\\u_y\end{Bmatrix}=[N_e]\{u_e\} \tag{3}$$

$$[N_e]=\begin{bmatrix}w_{e(1)} & 0 & w_{e(2)} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & w_{e(1)} & 0 & w_{e(2)} & \cdots & w_{e(4)}\end{bmatrix} \tag{4}$$

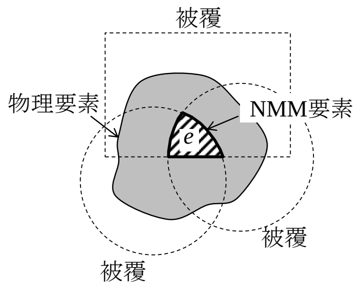


図-1　物理要素と有限被覆，NMM要素の関係

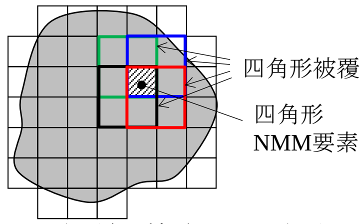


図-2　四角形有限被覆による四角形メッシュ

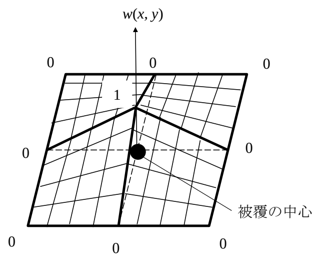


図-3　双一次型の重み関数

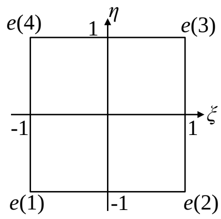


図-4　4節点iso-parametric要素の正規座標

ここに，$[N_e]$は変位マトリックス，$\{u_e\}$は NMM 要素 e の節点変位ベクトルである．式(4)の $w_{e(i)}$（$i=1,2,3,4$）は要素を構成するカバーの重み関数であり，iso-parametric 要素の正規座標（**図-4**）を用いれば次式となる．

$$\begin{aligned}&w_{e(1)}=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta),\quad w_{e(2)}=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\\&w_{e(3)}=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta),\quad w_{e(4)}=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\end{aligned} \tag{5}$$

つまり，重み関数は有限要素法における形状関数に対応している．

要素内の変位を式(3)で表すとき，要素内部のひずみ増分は$[N_e]$の空間勾配であるひずみマトリックス$[B_e]$に節点変位増分$\{\Delta u_e\}$を乗じて求まる．

$$\{\Delta\varepsilon_e\}=[B_e]\{\Delta u_e\} \tag{6}$$

ここに，$\{\Delta\varepsilon_e\}$は Green のひずみと呼ばれ変形前の座標で定義される．このひずみ増分ベクトルから式(2)中の2nd Piola Kirchhoff応力増分は次式で求められる．

$$\{\tau^{*}\}=[C]\{\Delta\varepsilon_e\} \tag{7}$$

ここに，$[C]$は参照座標系で定義される 2nd Piola Kirchhoff 応力- Green ひずみ構成則である．通常，微小変形解析で用いる Cauchy 応力-Almansi ひずみ構成則は変形後の座標で求められる量であり，実験と対応している．一般に$[C]$を正確に求めることは困難で，Sasaki ら [5]は通常の Cauchy 応力-Almansi ひずみ構成則を近似的に用いる Updated Lagrangian 法 [8]を採用し，客観応力速度として Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いている [5]．以上に基づく定式化の詳細は文献を参照されたい [5]．なお，後の計算例でも示すが同手法は応力の増分客観性を満足せず [6]，回転量の増分が大きいと不自然な応力・変形挙動を示す．

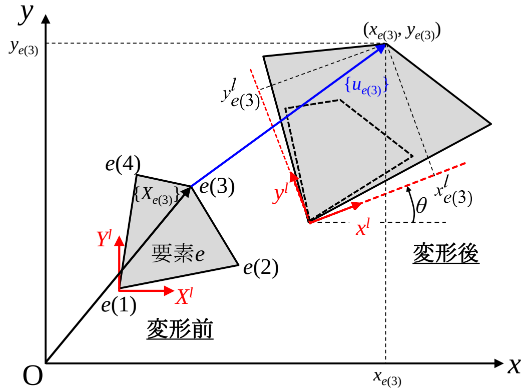


図-5 共回転定式化における局所座標系の取り方

3. 共回転定式化の導入

NMMで剛体回転を適切に解くためCrisfield and Moita[7]が有限要素法を対象に提案した共回転定式化を新たに導入する．客観応力速度を用いた大変形解析が式(3)で得られるひずみ増分から応力増分を計算した後に剛体回転成分を修正するが，共回転定式化では節点変位で表される要素の運動から剛体回転成分を算出し，座標変換で回転を差し引いた局所座標系でひずみ，応力を評価する．

本定式化ではまず，要素ごとの局所的な回転角θが定義できるとし，全体座標系での要素eの節点変位増分$\{\Delta u_e\}$と，反時計回りに角度θ回転させた局所座標系における節点変位増分$\{\Delta u_e^l\}$の間に以下の変換式を考える．

$$\{\Delta u_e^l\} = [T_e]\{\Delta u_e\} \tag{7}$$

ここに，$[T_e]$は要素eの回転角θにより決まる座標変換マトリックスである．また，局所座標系でのひずみ，応力を局所座標系のひずみマトリックス$[B_e^l]$と構成関係マトリックス$[C^l]$を用いて

$$\{\varepsilon_e^l\} = [B_e^l]\{u_e^l\} \tag{8}$$

$$\{\sigma_e^l\} = [C^l]\{\varepsilon_e^l\} \tag{9}$$

と表すとすると，局所座標系での要素の内力ベクトルは

$$\begin{aligned}\{F_e^{l(\mathrm{int})}\} &= \int_{V_e}[B_e^l]^{\mathrm{T}}\{\sigma_e^l\}dV \\ &= \int_{V_e}[B_e^l]^{\mathrm{T}}[C^l][B_e^l]dV\{u_e^l\} = [K_e^l]\{u_e^l\}\end{aligned} \tag{10}$$

となる．ここに，$[K_e^l]$は局所要素剛性マトリックスである．式(10)のベクトルを全体座標系に変換すると

$$\{F_e^{(\mathrm{int})}\} = [T_e]^{-1}\{F_e^{l(\mathrm{int})}\} = [T_e]^{\mathrm{T}}\{F_e^{l(\mathrm{int})}\} = [T_e]^{\mathrm{T}}[K_e^l]\{u_e^l\} \tag{11}$$

となり，さらにこれを線形化した

$$\begin{aligned}\{\Delta F_e^{(\mathrm{int})}\} &= [T_e]^{\mathrm{T}}[K_e^l]\{\Delta u_e^l\} + [\Delta T_e]^{\mathrm{T}}\{F_e^{l(\mathrm{int})}\} \\ &= \left([T_e]^{\mathrm{T}}[K_e^l][T_e] + [K_{e\sigma}]\right)\{\Delta u_e\}\end{aligned} \tag{12}$$

の係数行列が共回転定式化の剛性マトリックスとなる．$[K_{e\sigma}]$は初期応力マトリックスと呼ばれ，変位前の応力状態と$[\Delta T_e]$によって決まるマトリックスである．よって，定式化にあたっては要素ごとの局所座標の取り方と回転量の評価方法を定義し，変換マトリックス$[T_e]$，および$[K_{e\sigma}]$を定める必要がある．

(1) 要素の局所座標系の取り方

Crisfield and Moitaの共回転定式化では，**図-5**のように要素の節点の一つを原点とする直交座標系を局所座標系として採用する（赤い矢印が座標軸，節点$e(1)$が原点）．要素が角度θだけ剛体回転した際には，その節点まわりに座標軸をθ回転させる．このとき，要素内の任意点の全体座標$\{x\}$と局所座標$\{x^l\}$の間には次の関係が成り立つ．

$$\{x\} - \{x_{e(1)}\} = [E]\{x^l\} = [E]\left(\{X^l\} + \{u^l\}\right) \tag{13}$$

$$[E] = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{14}$$

ここに，$\{x_{e(1)}\}$は局所座標系の原点とする節点の全体座標，$\{X^l\}$，$\{u^l\}=\{u_x^l\ u_y^l\}^{\mathrm{T}}$はそれぞれ着目する点の局所座標系での初期座標と現配置までの変位ベクトルである．

(2) 要素の回転角の定義

Crisfield and Moitaは要素中心（iso-parametric要素の正規座標の原点）の局所スピンΩ_e^lがゼロ，つまり，

$$\Omega_e^l = \frac{\partial u_x^l}{\partial Y^l} - \frac{\partial u_y^l}{\partial X^l} = \left\{\frac{\partial}{\partial Y^l} \quad -\frac{\partial}{\partial X^l}\right\}\{u^l\} = 0 \tag{15}$$

と仮定し，要素中心周りに回転角θを定義している．式(13)から得られる$\{u^l\}$を上式に代入すれば，

$$\Omega_e^l = a\sin\theta + b\cos\theta = 0 \tag{16}$$

$$a = \{c\}^{\mathrm{T}}\{x_e\} \tag{17}$$

$$b = \{d\}^{\mathrm{T}}\{x_e\} \tag{18}$$

$$\{c\}^{\mathrm{T}} = \left\{\frac{\partial}{\partial Y^l} \quad -\frac{\partial}{\partial X^l}\right\}\begin{bmatrix} 0 & w_{e(1)} & 0 & \cdots & w_{e(4)} \\ -w_{e(1)} & 0 & -w_{e(2)} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\{d\}^{\mathrm{T}} = \left\{\frac{\partial}{\partial Y^l} \quad -\frac{\partial}{\partial X^l}\right\}\begin{bmatrix} w_{e(1)} & 0 & w_{e(2)} & \cdots & 0 \\ 0 & w_{e(1)} & 0 & \cdots & w_{e(4)} \end{bmatrix} \tag{20}$$

となる．ここに，$\{x_e\}$は全体座標系の要素eの節点座標ベクトルである．式(16)より回転角θは下式で求まる．

$$\theta = \arctan(-b/a) \tag{21}$$

(3) 座標変換マトリックス$[T_e]$の具体形

以上で定義された回転角θを用いて式(7)の変換マトリックスを導く．まず，式(13)の両辺を線形化すると，

$$\{\Delta u^l\} = [E]^{\mathrm{T}}\{\Delta u\} + \{x\}^{\mathrm{T}}[\Delta E] \tag{22}$$

$$[\Delta E] = \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}\Delta\theta == [E']\Delta\theta \tag{23}$$

となる．$\Delta\theta$は式(19)を線形化すると，

$$\Delta\theta = \frac{1}{a^2+b^2}\left(b\{c\}^{\mathrm{T}} - ab\{d\}^{\mathrm{T}}\right)\{\Delta u_e\} = \{v\}^{\mathrm{T}}\{\Delta u_e\} \tag{24}$$

と書けるので，これを式(23)に代入した上で，さらに式(22)へと代入すれば，

$$\{\Delta u^l\} = \left([E]^{\mathrm{T}} + \{x\}^{\mathrm{T}}[E']\{v\}^{\mathrm{T}}\right)\{\Delta u\} = [T_e]\{\Delta u\} \tag{25}$$

となり，$[T_e]$が得られる．そして，こうして導かれた$[T_e]$を線形化すれば，式(12)で初期応力マトリックス$[K_{e\sigma}]$が算出でき，共回転定式化の要素剛性マトリックスを組み立てられる．詳細は文献[7]を参照されたい．

(4) 計算手順

以上で述べた共回転定式化に基づく具体的な計算手順は下記のa)～d)の通りである．

a) 全体座標系と局所座標系の間での各要素の剛体回転角を式(19)により求める．

b) 局所座標系の剛性マトリックス（式(10)）を計算した後，a)で求めた回転角θに対応する座標変換マトリックス$[T_e]$を用いて全体座標系の剛性マトリックス（式(12)右辺第1項）に変換し重ね合わせる．また，$[\Delta T_e]$を算出し初期応力マトリックスを作成し全体方程式に重ね合わせる．

c) 全体座標系で平衡方程式を解き，得られた節点変位増分を用いて変位後のθを求める．そして，求めたθから局所座標系の変位増分を得る．

d) 局所座標系の変位増分から要素のひずみ増分，応力増分を求める．

なお，以上の計算過程では非線形方程式の解法としてNewton-Raphson法を用いる．また，計算結果の出力時にはひずみ，応力ともに全体座標系で表示するのが理解しやすい．局所座標系のひずみ・応力から全体座標系への変換は，

$$\{\varepsilon_e\} = [R_e]\{\varepsilon_e^l\} \tag{26}$$

$$\{\sigma_e\} = [R_e]\{\sigma_e^l\} \tag{27}$$

$$[R_e] = \begin{bmatrix} \{1+\cos 2\theta\}/2 & \{1-\cos 2\theta\}/2 & -\sin 2\theta \\ \{1-\cos 2\theta\}/2 & \{1+\cos 2\theta\}/2 & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta/2 & -\sin 2\theta/2 & \cos 2\theta \end{bmatrix} \tag{28}$$

となる．ひずみ増分と応力増分についても同様である．

以上が開発手法の概要である．紙面の都合上本論文では要素剛性以外の項について詳細には述べなかったが，本定式化では要素の変形を局所座標系で考えつつも，平衡方程式は全体座標系で解くため，外力や変位指定などの境界条件，そしてNMMで扱う接触処理については従来通り全体座標系で取り扱えばよい．

4. 解析例

(1) 1要素の剛体回転解析

提案した共回転定式化を導入したNMMの性能を検証するため，まず，単一のNMM要素を対象に準静的な剛体回転解析を行った．

図-6に解析モデルを示す．一辺1.0mの正方形のNMM要素を使用し，左下の節点1を固定している．要素は弾性体（ヤング率100MPa，ポアソン比0.2）である．全ての応力成分がゼロの状態から節点2のみに節点1の周りを1周するように変位を600ステップで与える．このとき，理想的には1周後に要素は同じ配置に戻り，応力も計算全体を通じてゼロのままになるはずである．本解析をJaumann応力速度を用いたUpdated Lagrangian定式化（以降，ULJ定式化）と共回転定式化のそれぞれで実施した．

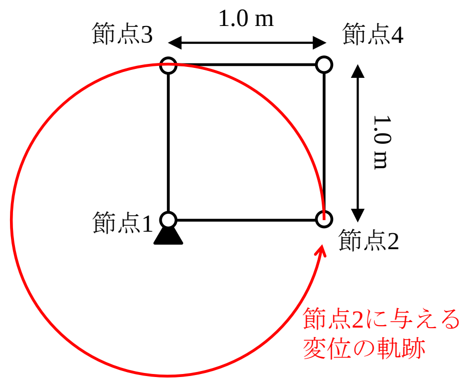
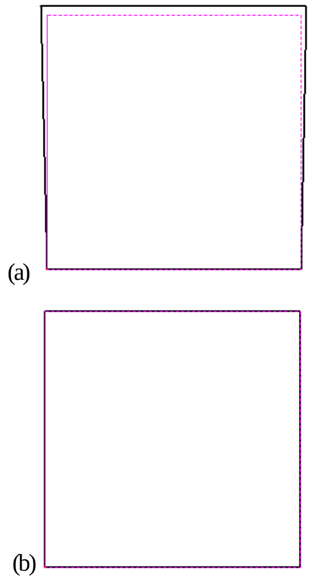


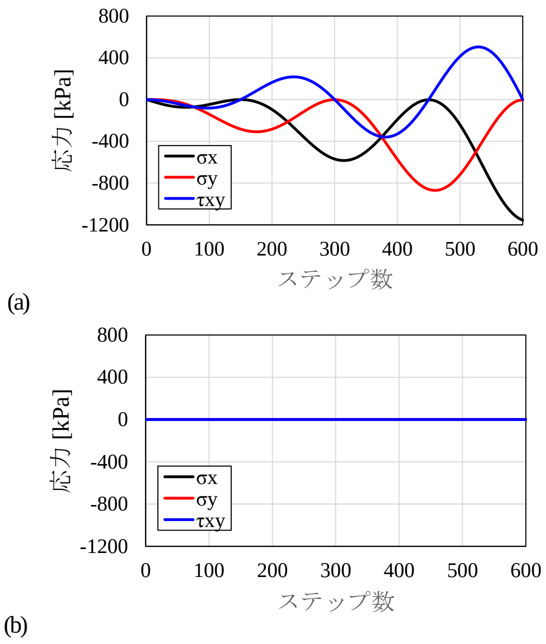
図-6　1要素の剛体回転解析

図−7は各定式化で得られた解析終了時（1周回転後）の要素形状である．図中の黒い線が最終状態の要素の配置，ピンク色の点線は回転開始前の初期配置を表す．(a)ULJ定式化では，変位が指定されていない節点3および4が初期配置とずれ，要素が変形している．一方，(b)共回転定式化では回転前後の要素の配置はほぼ一致し，精度良く剛体回転が表現されている．

図−8は各定式化での回転過程での各応力成分の推移を表している．ULJ定式化では応力各成分が変動し，客観性を満たしていない．このような非物理的な応力が発生していると上述の通り要素の不自然な変形を示すだけでなく，落石解析等での衝突時に異常な反発を生じる恐れがある．一方，共回転定式化では全成分がほぼゼロのまま保たれていることが確認できた．



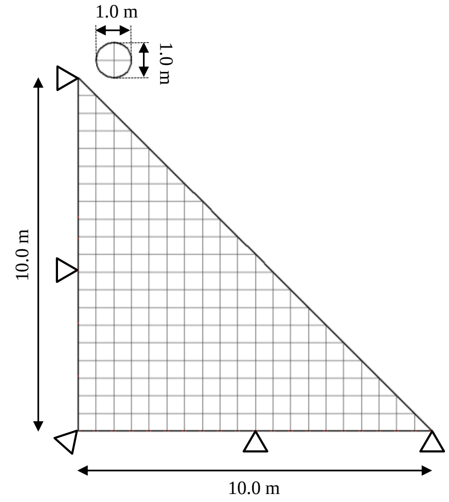
図−7　解析終了時の要素形状：(a) ULJ定式化，(b) 共回転定式化



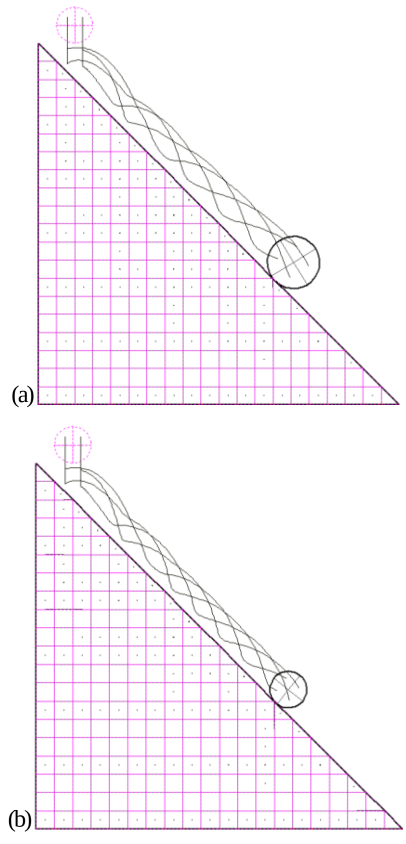
図−8　回転中の応力の推移：(a) ULJ定式化，(b) 共回転定式化

⑵ 直線斜面上の落石解析

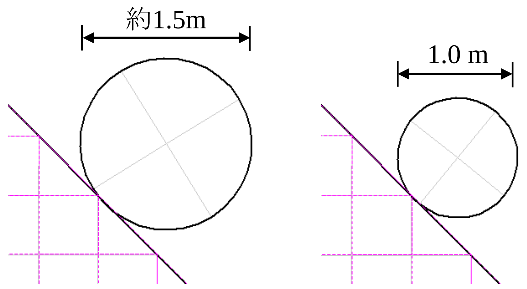
つづいて，接触を含む動的な大回転問題として簡易な落石解析を行った．図−9に示す高さ10m，幅10m，斜面傾斜角45°の斜面モデルを設定し，斜面上部から直径1mの円形の岩塊を落下させた．斜面モデルは底面ならびに左面を固定した．斜面，岩塊ともに弾性体とし，ヤング率は10MPa，ポアソン比は0.2とした．接触ペナルティ係数は10MN/m，摩擦角は30°とし，時間刻みは0.01secとした．以上の条件でJaumann応力速度を用いたUpdated Lagrangian定式化（ULJ定式化）および共回転定式化のそれぞれで解析を実施した．



図−9　解析モデルの寸法



図−10　岩塊の落下軌跡：(a)ULJ定式化，(b)共回転定式化



(a) (b)

図−11 最終状態の岩塊サイズ：(a)ULJ定式化，(b)共回転定式化

図−10はULJ定式化と共回転定式化それぞれで得られた岩塊の変位の軌跡を表したものである．ピンク色の点線は先程の問題と同様に初期配置を表す．本図からはいずれの定式化においても岩塊は一度斜面に衝突して跳ねた後斜面上を転がっており，一見概ね同じ挙動を示した．

しかし，岩塊のサイズに着目してみると（**図-11**），ULJ定式化では岩塊が初期状態よりも明らかな膨張が生じている．一方，共回転定式化では概ねもとの大きさが保たれ，不自然な挙動を生じることなく最後まで結果が得られた．より定量的な予測性能の評価は今後実験等と比較し行う必要があるが，今回開発した共回転NMMは大回転領域にて従来手法よりも物理的に妥当な結果を示したと言える．

5. 結論

本研究では，従来Jaumann応力速度に基づくUpdatedLagrangian法で定式化されていた4節点iso-parametric NMMに新たに共回転定式化を採用することで，物体の剛体回転挙動の解析精度の改善を図った．

開発手法の性能を検証するため，要素の剛体回転を生じる基本的な問題へと適用した結果，開発手法が要素の剛体回転挙動を物理的に不自然な変形を生じることなく精度良く表現できていることを確認した．今後は本手法を落石や岩盤崩落などを対象とした実験や実事例へと適用し，さらなる比較・検証を進める予定である．

参考文献

1) Shi, G.H. and Goodman, R.E.: Generalization of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modeling, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech*, Vol. 13, pp. 359–380, 1989.
2) 橋本涼太，小山倫史，菊本統：不連続面の摩擦則の陰的積分を導入した不連続変形法の開発，第45回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集，pp. 303-308，2018.
3) Ohnishi, Y., Sasaki, T., Koyama, T., Hagiwara, I., Miki, S. and Shimauchi, T.: Recent insights into analytical precision and modelling of DDA and NMM for practical problems, *Geomechanics and Geoengineering: An International Journal*, Vol. 9, No. 2, pp. 97 -112, 2014.
4) Shi, G.H.: Manifold method of material analysis, *Transactions of the 9th Army Conference on Applied Mathematics and Computing*, Report No.92-1, U.S. Army Research Office, 1991.
5) Sasaki, T. and Ohnishi, Y.: Analysis of the discontinuous rock mass by four node iso-parametric Manifold method, *Fourth International Conference for Analysis of Discontinuous Deformation*, Glasgow, Scotland, pp.369-378, UK, 2001.
6) de Souza Neto, E.A., Peric, D. and Owen, D.R.J.: *Computational methods for plasticity: theory and applications*, 2008.
7) Crisfeild, M.A. and Moita, G.F.: A co-rotational formulation for 2-d continua including incompatible modes, *International. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 2619-2633, 1996.
8) McMeeking, R.M., Rice, J.R. : Finite element formulation for problems of large elastic-plastic deformations, *International Journal of Solids Structure*, Vol. 11, pp.601-616, 1975.
9) Melenk, J.M., Babuška, I.: The partition of unity finite element method: basic theory and applications, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 139, pp. 289-314 1996.

ROCK FALL ANALYSIS BY 4-NODE ISO-PARAMETRIC NUMERICAL MANIFOLD METHOD INCORPORATING CO-ROTATIONAL FORMULATION

Ryota HASHIMOTO, Yuzo OHNISHI, Taeshi SASAKI and Sigeru MIKI

In the discontinuous models as NMM, the rigid body rotation is not considered in the degrees of freedom as same as FEM. The co-rotational formulation theory presented by Crisfield and Moita (1996) is introduced for the 4-node iso-parametric NMM and the examples of rock fall model is presented. The simple rockfall simulation results by the proposed method showed much improvement from the previous method avoiding the unphysical mesh distortion during the large rigid body rotation.