第 45 回岩盤力学に関するシンポジウム講演集
公益社団法人土木学会　2017 年 1 月　講演番号 53

不連続面の摩擦則の陰的積分を導入した不連続変形法の開発

橋本 涼太[1*]・小山 倫史[2]・菊本 統[3]

[1]広島大学大学院　工学研究科社会基盤環境工学専攻（〒739-8527 広島県東広島市鏡山1-4-1）
[2]関西大学　社会安全学部（〒569-1098 大阪府高槻市白梅町7-1）
[3]横浜国立大学大学院　都市イノベーション研究院（〒240-8501 神奈川県横浜市保土ヶ谷常盤台79-1）
*E-mail: ryotahashimoto@hiroshima-u.ac.jp

近年，重要土木構造物周辺の岩盤斜面の変形量を考慮した安全性評価を目的として数値解析手法を用いた地震応答解析が試みられている．その中で利用されている手法の一つに不連続変形法（Discontinuous Deformation Analysis：DDA）があるが，DDAには摩擦滑りを精度良く予測できるパラメータ設定が困難であるという課題があった．本研究では，この原因としてDDAにおける不連続面の摩擦構成則の処理方法に着目し，新たにリターン・マッピングアルゴリズムによる陰的積分，非線形方程式の反復解法としてNewton-Raphson法を導入した．開発した解析コードを基本的な境界値問題に適用した結果，解析精度の向上とともに，接触パラメータ設定の柔軟性の改善が確認された．

Key Words : *discontinuous deformation analysis, return mapping algorithm, friction law*

1. はじめに

近年，重要土木構造物周辺の不連続性岩盤斜面を対象として，滑り安全率だけでなく変形量をも考慮した地震時安全性評価に向けた研究が実験および数値解析を通じて進められており[1),2)]，その中で利用されている解析手法の一つに不連続変形法（Discontinuous Deformation Analysis：DDA）[3)]がある．DDAは対象とする系を不連続な弾性多角形ブロックの集合体としてモデル化し，それらの運動を接触を考慮して解く離散体の解析手法である．DDAの特徴は，ペナルティ法による接触処理やポテンシャルエネルギー最小化原理に基づく定式化にあり，いわゆる陰的（implicit）な手法である．そのため有限要素法と同様連立方程式を構築し解く必要があるが，釣合条件を満たし，かつ理論上時間刻みを比較的長くできる[4)]という利点を持ち，落石[5)]や斜面崩壊解析[6)]への適用例も多い．

一方で，DDAには正しい結果が得られるパラメータの設定が難しいという一面もある．小山ら[7)]は，DDAでブロック間の動的な摩擦滑りを精度良く予測できるペナルティの値が作用する垂直力や時間刻みに依存し，かつその範囲は1オーダー程度に限られ設定に注意を要すると指摘しており，岩盤斜面の変形量予測への適用時の大きな課題となっている．同時に，時間刻みを小さくすることで適切なペナルティ値の範囲が広がることもわかっているが，陰的な手法の利点を発揮しきれていない．

この原因として本研究では，DDAにおける不連続面の摩擦則の処理方法に着目する．従来，DDAではある計算ステップで不連続面のせん断力が摩擦強度を超過した場合，次のステップで摩擦強度まで引き戻して計算を続行するよう処理され，残差であるせん断力の超過分は不釣り合い力として再分配される（図-1）．時間刻みの大きさを固定すれば，せん断剛性に相当するペナルティが大きいと残差も大きくなり，特に振動解析時には繰返し載荷によって蓄積し，精度が悪化する．逆にペナルティが小さ過ぎる場合にはブロック間の貫入量が過大となるため，適切なペナルティの値の範囲が狭い原因となっていると考えられる．また，時間刻みを小さくすると使用できるペナルティの範囲が広がるのも，せん断力の増分が小さくなり，残差が低減されるためであると言える．

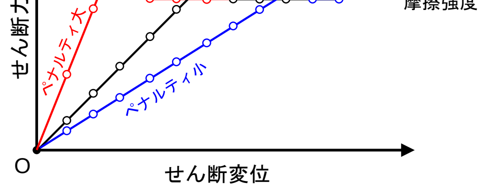


図-1 DDAでの不連続面せん断時の摩擦挙動

以上を仮定すると，DDAによる滑り現象の解析精度とパラメータ設定の柔軟性を向上させるには，過大な貫入が生じない十分に大きなペナルティを用いつつせん断力の残差が生じないような摩擦構成則の積分アルゴリズムを導入することが有効であると考えられる．そこで本研究では，DDAの理論を数値接触力学[8]に基づき再構築し，摩擦構成則のリターン・マッピングアルゴリズムによる陰的積分とNewton-Raphson法による収束計算を採用した完全な陰解法によるDDAを提案する．また提案手法の有効性を基本的な境界値問題で確認する．

2. 摩擦則の陰的積分を導入した不連続変形法

(1) 支配方程式と弱形式

ここでは，数値接触力学[8]で扱う連続体の運動・変形の基礎式，物体間の接触条件とそれらの弱形式を記す．以降，二次元問題を対象としてn個の独立した連続体からなる系を考え，各連続体が空間内で占める領域をΩ_i（$i=1,2,\ldots,n$），Ω_iの境界をΓ_i（$=\Gamma_{iu}\cup\Gamma_{i\sigma}$，$\Gamma_{iu}$：変位境界，$\Gamma_{i\sigma}$：応力境界）とする．

a) 連続体の運動・変形問題の基礎式

個々の物体Ω_iの運動・変形は，連続体の運動方程式，

$$\rho_i \ddot{\boldsymbol{u}}_i - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}_i - \rho_i \bar{\boldsymbol{b}}_i = 0 \qquad (1)$$

によって記述される．ここで，下付き添字 i は Ω_iの物理量，変数の上のドット[$\cdot$]とバー[－]は物質時間微分と既知量を表す．ρ は密度，$\boldsymbol{u}$ は変位ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力テンソル，$\boldsymbol{b}$ は物体力ベクトルである．上式に加え変位，応力に関する境界条件を考慮すると弱形式は，

$$\begin{aligned} G_i^{\mathrm{ext,int}} &= \int_{\Omega_i}\left(\rho_i\ddot{\boldsymbol{u}}_i\right)\cdot\delta\boldsymbol{u}_i d\Omega + \int_{\Omega_i}\boldsymbol{\sigma}_i:\delta\boldsymbol{\varepsilon}_i d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_{i\sigma}}\bar{\boldsymbol{t}}_i\cdot\delta\boldsymbol{u}_i d\Gamma - \int_{\Omega_i}\rho_i\bar{\boldsymbol{b}}_i\cdot\delta\boldsymbol{u}_i d\Omega = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

となる．ここに，$\delta\boldsymbol{u}$ は Γ_u上で $\delta\boldsymbol{u}=0$ を満たす仮想変位，$\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ は仮想ひずみ，$\boldsymbol{t}$ は表面力ベクトルであり，式(2)は外力と内力に関する仮想仕事の原理式と一致する．

b) 物体間の接触条件

今，Ω_i（$i=1,2,\ldots,n$）の内，Ω_jとΩ_k（$j\neq k$）がその界面Γ_{jk}で接触を生じる場合を考える（**図-2**）．このとき，Γ_{jk}では法線方向の互いの距離が非負で，かつ接触面での表面力が釣り合うという条件，

$$g_n \geq 0 \quad \mathrm{on}\,\Gamma_{jk} \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{t}_j + \boldsymbol{t}_k = 0 \quad \mathrm{on}\,\Gamma_{jk} \qquad (4)$$

が満たされなければならない．ここに，g_nは二物体間の界面法線方向の距離（ギャップ）である．式(4)のΓ_{jk}上での表面力，すなわち接触力を接触面の法線成分t_nとせん

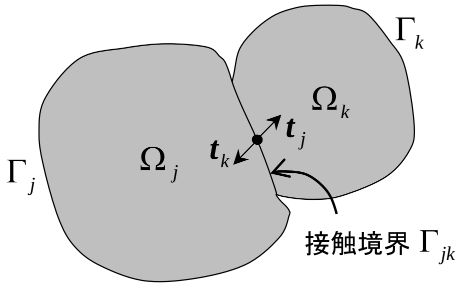


図-2 連続体間の接触

断成分t_sに分解し，それぞれにギャップg_nとせん断変位g_sに対応した仮想変位を乗じてΓ_{jk}に関し積分すると，次の接触力による仮想仕事が得られる．

$$G_{jk}^{c} = \int_{\Gamma_{jk}} t_n \delta g_n d\Gamma + \int_{\Gamma_{jk}} t_s \delta g_s d\Gamma \qquad (5)$$

接触が生じている場合，物体はその外力および内力による仮想仕事（式(2)）に加え，接触力による仮想仕事の和がゼロであるという条件を満たさなければならないため，結局，系全体で解くべき弱形式は次式となる．

$$G = \sum_{i=1}^{n} G_i^{\mathrm{ext,int}} + G_{jk}^{\mathrm{c}} = 0 \qquad (6)$$

(2) 接触力のペナルティ法による正則化と摩擦構成則の陰的積分

式(6)の弱形式の中には接触力t_n，t_sが含まれており，これらは未知数である．そのため，式(6)を解析する際には，Lagrangeの未定乗数法により未知数としたまま直接解くか，ペナルティ法により正則化する必要がある．本研究では従来のDDAと同様にペナルティ法を採用する．このとき，法線成分t_nについては，

$$t_n = p_c g_n \qquad (7)$$

と表される．ここに，p_cは接触ペナルティ係数である．

一方，せん断成分t_sは摩擦構成則にしたがって非線形な挙動を示すため，適切な積分アルゴリズムを用いる必要がある．先述の通り従来のDDAではあるステップでせん断力が摩擦強度を超過した場合，次の時間ステップで摩擦強度まで引き戻すため，時間刻みが粗い場合等に大きな誤差が生じる．そのため本研究では時間刻みに依存せず精度良く摩擦挙動を表現するため，Coulombの摩擦則，せん断変位g_sの可逆的な弾性成分g_s^{e}と非可逆的な滑り成分g_s^{slip}への加算分解，およびペナルティ係数を用いたせん断力の弾性構成則，

$$t_s = p_c g_s^{\mathrm{e}} \qquad (8)$$

を仮定し，弾塑性論のアナロジーに基づくリターン・マッピングアルゴリズム[8]を導入する．

リターン・マッピングでは，後退Euler差分で離散化した増分形式の摩擦構成則の初期値問題，

$$\begin{cases} g^{\mathrm{e}}_{s|t+\Delta t} = g^{\mathrm{e}}_{s|t} + \Delta g_s - \Delta\gamma \dfrac{\partial f}{\partial t_s} \\ \Delta\gamma \geq 0,\ f \leq 0,\ \Delta\gamma f = 0 \end{cases} \tag{9}$$

を塑性乗数$\Delta\gamma$に関して解き$g^{\mathrm{e}}_{s|t+\Delta t}$を求め，$t_s$を更新する．リターン・マッピングにより弾性状態（DDAにおけるLOCK状態）と判定されればt_sは式(8)となり，滑り状態（DDAにおけるCLOSE状態）と判定されれば，

$$t_s = \mu |t_n| \operatorname{sgn} g_s = p_n \mu |g_n| \operatorname{sgn} g_s \tag{10}$$

となる．この際，せん断力の引き戻し（リターン・マップ）が行われるため，平衡条件を満たすためにNewton-Raphson法等の反復解法による収束計算が必要となる．

(3) 弱形式の線形化

式(6)は接触による境界非線形性と摩擦構成則を含む非線形方程式であるため，Newton-Raphson法を用いた反復解法により求解する．その際，解の二次収束性を保証するため，Newton-Raphson法に整合するよう方程式を線形化する必要がある．今，系の時刻tの状態が既知で，$t+\Delta t$での状態を求めるとすると，式(6)の線形化方程式は，

$$\sum_{i=1}^{n} G^{\mathrm{ext,int}}_{i|t} + G^{\mathrm{c}}_{jk|t} + \sum_{i=1}^{n} \Delta G^{\mathrm{ext,int}}_{i} + \Delta G^{\mathrm{c}}_{jk} = 0 \tag{11}$$

と表される．ここに，下付き添字「$|t$」は時刻tの変数を表す．ここでは特に，接触力による仮想仕事の線形化$\Delta G^{\mathrm{c}}_{jk}$について示しておく．式(7)，(8)，(10)より，$\Delta G^{\mathrm{c}}_{jk}$はLOCK状態とCLOSE状態に対してそれぞれ，

$$\begin{aligned} \Delta G^{\text{c-lock}}_{jk} &= \int_{\Gamma_{jk}} p_c \Delta g_n \delta g_n d\Gamma + \int_{\Gamma_{jk}} p_c g_n \Delta\delta g_n d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_{jk}} p_c \Delta g_s \delta g_s d\Gamma + \int_{\Gamma_{jk}} p_c g_s \Delta\delta g_s d\Gamma \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \Delta G^{\text{c-close}}_{jk} &= \int_{\Gamma_{jk}} p_c \Delta g_n \delta g_n d\Gamma + \int_{\Gamma_{jk}} p_c g_n \Delta\delta g_n d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_{jk}} p_c \mu |\Delta g_n| \operatorname{sgn} g_s \delta g_s d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_{jk}} p_c \mu |g_n| \operatorname{sgn} g_s \Delta\delta g_s d\Gamma \end{aligned} \tag{13}$$

となる．なお，従来のDDAの定式化では線形化が適切に行われておらず，LOCK状態の式(12)の右辺第2，4項が含まれない他，CLOSE状態の式(13)は一切考慮されない．そのため，DDAにおける上記の項に対応する接触剛性マトリックスを新たに導出する必要がある．

(4) DDAによる空間離散化

式(11)，(12)，(13)で表される線形化方程式をマトリックス形式の剛性方程式に置き換え数値的に解くために必要となる変位$\boldsymbol{u}$，δg_n，Δg_n，$\Delta\delta g_n$，δg_s，Δg_s，$\Delta\delta g_s$のDDAによる離散化について記す．

a) 変位の離散化

従来，DDA では物体形状を多角形ブロックに近似した上で，内部の応力，ひずみが均一であると仮定し，重心の変位 u_0，v_0，重心周りの剛体回転量 r_0，ひずみ成分ε_x，ε_y，γ_{xy} を変位変数として内部の変位場を近似する．本研究でもこれにしたがい，下式を用いることとする．

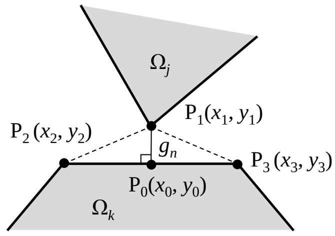


図-3 ブロックの頂点と辺の組による接触

$$\boldsymbol{u}_i(x,y) = [T_i(x,y)]\{d_i\} \tag{14}$$

$$[T_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(y-y_0) & x-x_0 & 0 & \dfrac{y-y_0}{2} \\ 0 & 1 & x-x_0 & 0 & y-y_0 & \dfrac{x-x_0}{2} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\{d_i\} = \{u_0 \quad v_0 \quad r_0 \quad \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

ここに，上付き添字 T は行列やベクトルの転置を表す．

b) δg_n，Δg_n，$\Delta\delta g_n$の離散化

DDAでは**図-3**のように二つのブロックの頂点と辺の組で接触が定義され，例えばΩ_jの頂点P_1がΩ_kの辺P_2P_3を横切って貫入し，つまりg_nが負となったときに接触が生じたと判定される．このときg_nは頂点P_1から辺P_2P_3に下ろした垂線の足P_0とP_1の距離として，次式で表せる．

$$g_n = (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{n}_k \tag{17}$$

ここに，$\boldsymbol{x}_i = \{x_i, y_i\}^{\mathrm{T}}$（$i=0$~3）は点$P_i$の位置ベクトル，$\boldsymbol{n}_k$は辺$P_2P_3$の外向き単位法線ベクトルであり次式で表される．

$$\boldsymbol{n}_k = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{\tau}_k = \boldsymbol{e}_3 \times \frac{1}{l}(\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2) = \frac{1}{l}\begin{Bmatrix} y_2 - y_3 \\ x_3 - x_2 \end{Bmatrix} \tag{18}$$

なお，$\boldsymbol{e}_3$は紙面手前方向の単位ベクトル，$\boldsymbol{\tau}_k$は辺P_2P_3の単位接線ベクトル（点P_2から点P_3に向かう向きが正），lは辺P_2P_3の長さである．このときδg_nは式(17)の両辺の変分，

$$\delta g_n = (\delta\boldsymbol{x}_1 - \delta\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{n}_k + (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) \cdot \delta\boldsymbol{n}_k \tag{19}$$

をとり，$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$が$\boldsymbol{n}_k$と平行であること，そしてDDAにおいて変位が式(14)で近似されることを考慮して，

$$\delta g_n = [E_{jk}]\begin{Bmatrix} \{\delta d_j\} \\ \{\delta d_k\} \end{Bmatrix} \tag{20}$$

$$[E_{jk}] = \frac{1}{l}\begin{Bmatrix} y_2 - y_3 \\ x_3 - x_2 \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \left[[T_j(x_1, y_1)] \quad -[T_k(x_0, y_0)] \right] \tag{21}$$

と導かれる．また，Δg_nは同様にして次式となる．

$$\Delta g_n = [E_{jk}]\begin{Bmatrix} \{\Delta d_j\} \\ \{\Delta d_k\} \end{Bmatrix} \tag{22}$$

そして，新たに扱われる$\Delta\delta g_n$は式(19)を線形化して

$$\begin{aligned} \Delta\delta g_n &= \Delta(\delta\boldsymbol{x}_1 - \delta\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{n}_k + (\delta\boldsymbol{x}_1 - \delta\boldsymbol{x}_0) \cdot \Delta\boldsymbol{n}_k \\ &\quad + (\Delta\boldsymbol{x}_1 - \Delta\boldsymbol{x}_0) \cdot \delta\boldsymbol{n}_k + (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) \cdot \Delta\delta\boldsymbol{n}_k \end{aligned} \tag{23}$$

で表され，式(18)に基づいて$\Delta\boldsymbol{n}_k$，$\delta\boldsymbol{n}_k$，$\Delta\delta\boldsymbol{n}_k$を演算して代入し，式(14)を考慮すると最終的に下式となる．

$$\Delta\delta g_n = -\frac{1}{l}\begin{Bmatrix}\{\delta d_j\}\\ \{\delta d_k\}\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\Bigg(\big[G_{jk}\big]^{\mathrm{T}}\big[H_{jk}\big]+\big[H_{jk}\big]^{\mathrm{T}}\big[G_{jk}\big] - \frac{g_n}{l}\big[H_{jk}\big]^{\mathrm{T}}\big[H_{jk}\big]\Bigg)\begin{Bmatrix}\{\Delta d_j\}\\ \{\Delta d_k\}\end{Bmatrix} \tag{24}$$

$$\big[G_{jk}\big]=\frac{1}{l}\begin{Bmatrix}x_3-x_2\\ y_2-y_3\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\Big[\big[T_j(x_1,y_1)\big]\quad -\big[T_k(x_0,y_0)\big]\Big] \tag{25}$$

$$\big[H_{jk}\big]=\frac{1}{l}\begin{Bmatrix}y_2-y_3\\ x_3-x_2\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\Big[[0]\quad \big[T_k(x_3,y_3)\big]-\big[T_k(x_2,y_2)\big]\Big] \tag{26}$$

c) δg_s, Δg_s, $\Delta\delta g_s$の離散化

接触部のせん断変位は図–4のように辺P_2P_3上にせん断変位の基準点P'_0（位置ベクトル$\boldsymbol{x}'_0$）を設定し，それと点P_1の間の接線方向の距離として定義し，次式で表す．

$$g_s = \left(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}'_0\right)\cdot \boldsymbol{\tau}_k \tag{27}$$

このときδg_sは，式(27)の両辺の変分，

$$\delta g_s = \left(\delta\boldsymbol{x}_1 - \delta\boldsymbol{x}'_0\right)\cdot \boldsymbol{\tau}_k + \left(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}'_0\right)\cdot \delta\boldsymbol{\tau}_k \tag{28}$$

をとり，式(18)の$\boldsymbol{\tau}_k$の定義から$\delta\boldsymbol{\tau}_k$を演算し代入すれば，

$$\delta g_s = \big[I_{jk}\big]\begin{Bmatrix}\{\delta d_j\}\\ \{\delta d_k\}\end{Bmatrix} \tag{29}$$

$$\big[I_{jk}\big]=\frac{1}{l}\begin{Bmatrix}x_3-x_2\\ y_2-y_3\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\Big[\big[T_j(x_1,y_1)\big]\quad -\big[T_k(x'_0,y'_0)\big]\Big] + \frac{g_n}{l^2}\begin{Bmatrix}y_2-y_3\\ x_3-x_2\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\Big[[0]\quad \big[T_k(x_3,y_3)\big]-\big[T_k(x_2,y_2)\big]\Big] \tag{30}$$

と導かれ，Δg_sも同様にして次式となる．

$$\Delta g_s = \big[I_{jk}\big]\begin{Bmatrix}\{\Delta d_j\}\\ \{\Delta d_k\}\end{Bmatrix} \tag{31}$$

そして，$\Delta\delta g_s$は式(28)を線形化した

$$\Delta\delta g_s = \Delta\left(\delta\boldsymbol{x}_1 - \delta\boldsymbol{x}'_0\right)\cdot \boldsymbol{\tau}_k + \left(\delta\boldsymbol{x}_1 - \delta\boldsymbol{x}'_0\right)\cdot \Delta\boldsymbol{\tau}_k + \left(\Delta\boldsymbol{x}_1 - \Delta\boldsymbol{x}'_0\right)\cdot \delta\boldsymbol{\tau}_k + \left(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}'_0\right)\cdot \Delta\delta\boldsymbol{\tau}_k \tag{32}$$

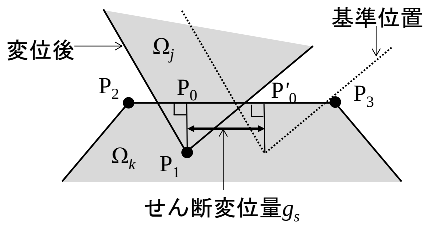
について，式(18)から$\Delta\boldsymbol{\tau}_k$，$\delta\boldsymbol{\tau}_k$，$\Delta\delta\boldsymbol{\tau}_k$を導き代入することで以下のように得られる．

$$\Delta\delta g_s = \frac{1}{l}\begin{Bmatrix}\{\delta d_j\}\\ \{\delta d_k\}\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\Bigg(\big[E'_{jk}\big]^{\mathrm{T}}\big[H_{jk}\big]+\big[H_{jk}\big]^{\mathrm{T}}\big[E'_{jk}\big] - \frac{g_n}{l}\Big(\big[H_{jk}\big]^{\mathrm{T}}\big[J_{jk}\big]+\big[J_{jk}\big]^{\mathrm{T}}\big[H_{jk}\big]\Big) - \frac{g_s}{l}\big[H_{jk}\big]^{\mathrm{T}}\big[H_{jk}\big]\Bigg)\begin{Bmatrix}\{\Delta d_j\}\\ \{\Delta d_k\}\end{Bmatrix} \tag{33}$$

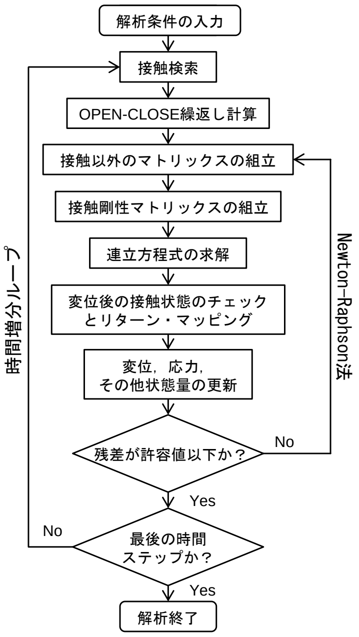
$$\big[E'_{jk}\big]=\frac{1}{l}\begin{Bmatrix}y_2-y_3\\ x_3-x_2\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\Big[\big[T_j(x_1,y_1)\big]\quad -\big[T_k(x'_0,y'_0)\big]\Big] \tag{34}$$

$$\big[J_{jk}\big]=\frac{1}{l}\begin{Bmatrix}x_3-x_2\\ y_2-y_3\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\Big[0\quad \big[T_k(x_3,y_3)\big]-\big[T_k(x_2,y_2)\big]\Big] \tag{35}$$

以上で得られた式(20)，(22)，(24)，(29)，(31)，(33)を用いて式(12)，(13)を離散化することで，Newton-Raphson 法に整合した接触剛性マトリックスが得られる．



図–4 せん断変位量の定義



図–5 開発手法の解析フロー

(5) 時間離散化

個々の連続体の運動を解くDDAでは，式(2)にも見られるように定式化上，加速度項を含んでおり，これを時間離散化する必要がある．本研究では従来手法[3]と同様に，Newmarkのβ法（$\beta = 0.5$，$\gamma = 1.0$）を用いる．

(6) 解析コード全体のフロー

以上の理論に基づき実装した解析コード全体のフローを図–5に示す．ここまでにも述べたように，開発手法では，剛性方程式を構築・求解し変位増分を求めた後，リターン・マッピングによるせん断力の更新を行う．その際，摩擦強度を超過したせん断力が降伏条件を満たすように引き戻され残差が発生するため，Newton-Raphson法による収束計算が合わせて実装されている．

Newton-Raphson法の前に位置するOPEN-CLOSE繰返し計算についても少し触れておく．詳細は文献[7]に譲るが，これは従来よりDDAで用いられている変位増分を求める過程で正しい接触状態（接触の有無）を決定するための反復計算であり，これによってブロックが高速で衝突するような問題を安定して解くことができる．本研究ではこのDDAの特徴を残し，OPEN-CLOSE計算収束時の状態をスタートにしてNewton-Raphson法を実施する．

3. 検証解析

(1) 一面せん断試験

摩擦構成則のリターン・マッピングアルゴリズムの効果を検証するため，一面せん断試験の解析を行う．図-6が使用した解析モデルであり，二つの弾性体ブロック（ヤング率：1 GPa，ポアソン比：0.2）からなる．不連続面のペナルティ係数は10 GN/m，摩擦角は30°とし，上段のブロック上面に1MPaの垂直力を与えた状態で，右向きに2mm変位を与えせん断する．その際，変位載荷ステップの分割数による結果の違いを確認するため，20，50，200ステップの3ケースを設定し，従来のDDAと開発手法それぞれで実施する．

各ケースで得られたせん断変位とせん断応力の関係を図-7に示す．従来のDDAではせん断応力が理論的な摩擦強度（1MPa×tan30°≒0.577MPa）を一度超過した後引き戻されており，その超過量は載荷ステップ数が粗いほど大きくなっている．一方で，開発手法ではステップ数に依存せず精度良く摩擦強度が表現されており，リターン・マッピング導入の効果が確認できた．なお，図-7(b)の20ステップのケースで降伏前に勾配が大きく変化している箇所があるのも，リターン・マッピングによってせん断応力の引き戻しが行われたためである．

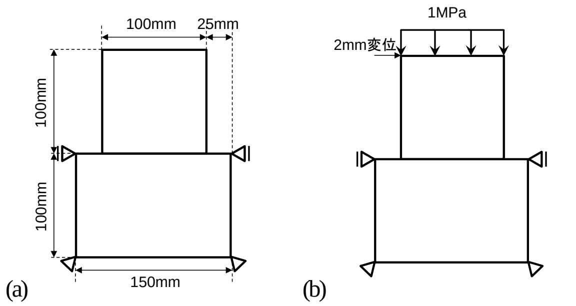


図-6 一面せん断試験の解析モデル：(a) 寸法，(b) 載荷条件

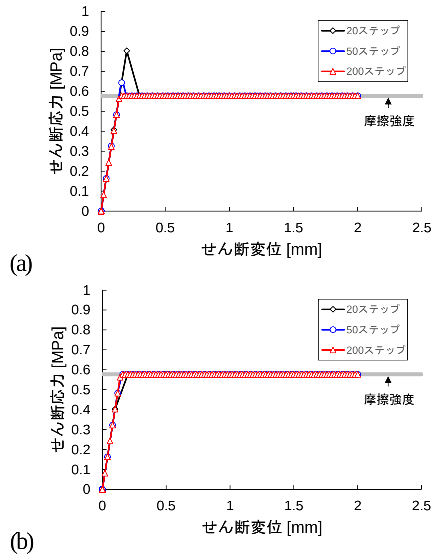


図-7 せん断変位－せん断応力関係：(a) 従来手法，(b) 開発手法

(2) 単一ブロックの動的滑り問題

ここでは，動的な摩擦滑りに対する開発手法の適用性を検証するため，小山ら[7]が実施した単一ブロックの滑り運動の解析を行う．図-8に示す二つの弾性体ブロック（ヤング率：14.9 GPa，ポアソン比：0.2，単位体積重量：21.56 kN/m^3）からなるモデルを対象に，自重を与えた状態で下段のブロックに対して図-9に示す正弦波形の変位を水平方向に与えた際の，上段ブロックの変位応答を小山ら[7]が示している理論解と比較する．不連続面の摩擦角は36.4°とし，ペナルティ係数はその値による影響を検討するため，2.0×10^4，×10^5，×10^6，×10^7 kN/mの4ケースを設定する．また，時間刻みによる結果の違いも比較するため，上記4ケースそれぞれについて時間刻みを0.001s，0.01sとした計8ケースを従来手法，開発手法で解析する．

各ケースの解析結果から得られた上段ブロックの変位応答を図-10（従来手法）と図-11（開発手法）に示す．まず，図-10の従来手法では，時間刻みが0.001sの場合ある程度理論解と一致する結果が得られている．しかしペナルティによって結果にばらつきがある上，2.0×10^{7}のケースでは大幅に精度低下した．また，時間刻みが0.01sになると，結果のばらつきがさらに大きくなり全体的に理論解との一致度は低下した．一方，開発手法による結果（図-11）では，ペナルティの値による結果の違いはほとんど見られなかった．また，理論解との一致度も時間刻みが粗くなると若干悪くなるものの，全ケースで従来より精度の高い結果が得られた．したがって，開発手法によって時間刻みやペナルティといったパラメータによらず，安定してかつ高精度に不連続面の滑り変位の算定が可能となった．

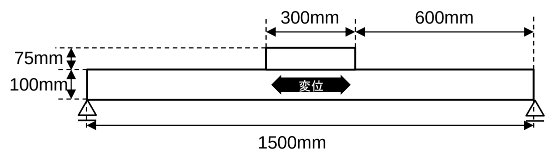


図-8 滑り運動の解析モデル

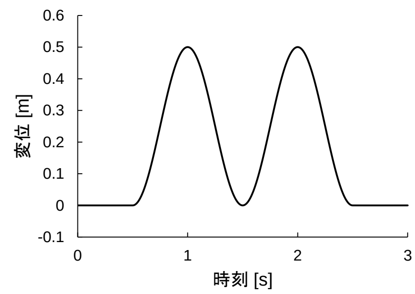
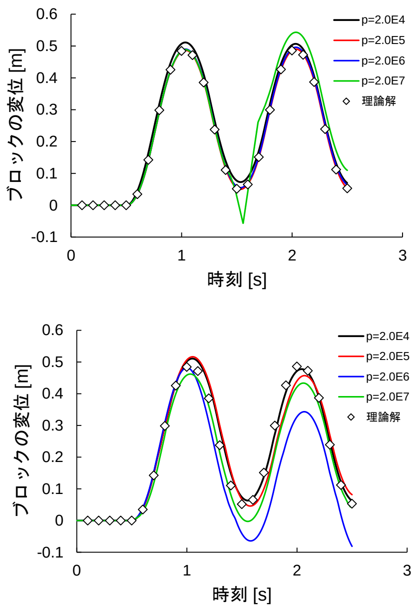


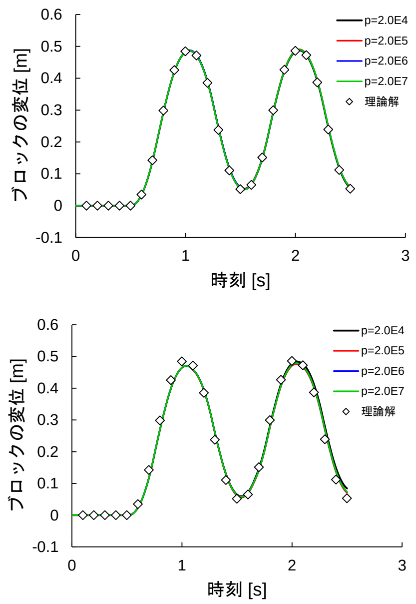
図-9 下段ブロックに与える変位



(a)

(b)

図-10 上段ブロックの変位応答（従来手法）：
(a) 時間刻み0.001s，(b) 時間刻み0.01s



(a)

(b)

図-11 上段ブロックの変位応答（開発手法）：
(a) 時間刻み0.001s，(b) 時間刻み0.01s

4. 結論

本研究では，不連続変形法（DDA）におけるブロック間の滑り変位の解析精度とパラメータ設定の柔軟性の向上を目的として，DDAの理論を数値接触力学に基づき再構築し，摩擦構成則のリターン・マッピングによる陰的積分と，Newton-Raphson法を新たに導入した完全な陰解法に基づくDDAを提案した．開発した解析コードを一面せん断試験と単一ブロックの滑り運動の解析に適用した結果，解析時の時間刻みやペナルティの値に依存せず摩擦挙動を精度良く計算できることが確認された．今後は，斜面模型の振動台実験[例えば2)]の再現解析等を通じた開発手法の妥当性のさらなる検証が必要となる．

参考文献

1) 石丸　真，河合　正：遠心力模型実験による岩盤斜面の地震時安定性評価に関する基礎検討，土木学会論文集 C，Vol. 67，No. 1，pp.36-49，2011.
2) 足立　光，岩田直樹，清田亮二，藍檀オメル，渡嘉敷直彦：不連続面を有する岩盤斜面の地震時安定性に関する実験的および解析的検討，第 14 回岩の力学国内シンポジウム講演集，No. 054，2017.
3) Shi, G.H. and Goodman, R.E.: Generalizaion of discontinuous deformation analysis for forward modelling, Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., Vol. 13, pp. 359–380, 1989.
4) Jing, L.: Formulation of discontinuous deformation analysis (DDA) — an implicit discrete element model for block systems, Engineering Geology, Vol. 49, pp. 371-381, 1998.
5) 馬　貴臣，松山裕幸，西山　哲，大西有三：落石シミュレーションのための解析手法の研究，土木学会論文集 C，Vol. 63，No. 3，pp.913-922，2007.
6) Wu, Jian-Hong: Seismic landslide simulation in discontinuous deformation analysis, Computers and Gefotechnics, Vol. 37, pp. 594-601, 2010.
7) 小山倫史，赤尾悟史，西山　哲，大西有三：岩盤斜面の地震応答解析における不連続変形法（DDA）の適用に関する研究，土木学会論文集 C，Vol. 65，No. 3，pp.644-662，2009.
8) Wriggers, P. : *Computational Contact Mechanics (Second Edition)*, Springer, 2006.

DEVELOPMENT OF DISCONTINOUS DEFORMATION ANALYSIS INCORPORATING IMPLICIT INTEGRATION OF FRICTION LAW

Ryota HASHIMOTO, Tomofumi KOYAMA, Mamoru KIKUMOTO

Seismic response analysis of rock slopes for deformation estimation has been studied intensively in recent years, and Discontinuous Deformation Analysis (DDA) is one of the feasible methods in this field. However, conventional DDA has difficulty in setting appropriate analysis parameters which can predict sliding between the blocks precisely. In this study, to enhance the accuracy and the easiness of parameter setting of DDA, the integration method of friction law is focused. The implicit updating scheme of friction force (return mapping algorithm) and Newton-Rapshon iteration is newly introduced to DDA, and the effectiveness of the proposed method is confirmed through fundamental numerical examples.