

Element Free Galerkin法を応用した 不整合メッシュに対する飽和-不飽和浸透流解析

鈴木 隼人^{1*}・井田 文雄¹・尾留川 剛²・西本 吉伸²

¹株式会社 J P ビジネスサービス 社会環境部 (〒135-8451 東京都江東区深川 2-2-18)

²電源開発株式会社 土木建築部 (〒104-8165 東京都中央区銀座6-15-1)

*E-mail: hayato_suzuki@jpbs.co.jp

地下空間の開発利用に関する諸検討において、地下水浸透流解析を行う場合が多い。有限要素法による解析を行う場合、構造物配置と地盤中の水理地質分布を考慮したモデルを作成することとなるが、より精緻な解析結果を得るためにはモデルを細部まで表現する必要があり、モデル構築には多大な労力を要する場合が少なくない。このような背景のもと、著者らはElement Free Galerkin法を応用した浸透流解析システムを開発した。このシステムはメッシュの集合体（メッシュユニット）を入力とするものであり、メッシュ同士の重複を許容することができる。本研究では、数値解析例を通じて開発したシステムの有効性について検証する。

Key Words : saturated-unsaturated seepage, element free galerkin method, meshless method, groundwater flow, underground structure

1. はじめに

石油備蓄、LPG備蓄などのエネルギー備蓄や地下発電所などの地下空洞の利用拡大に伴い、地下水挙動の解明が急務となってきており、モデルも大規模・複雑化してきている。複雑化については詳細なモデル化が不可欠であるが、断層や地下構造物を考慮した解析用メッシュを作成することは多大な労力を要する。このような背景のもと、櫻井ら¹⁾は、メッシュフリー法の一つであるElement Free Galerkin法²⁾(EFGM)を応用し、不整合メッシュ集合体を入力データとする、新しい浸透流解析システムを開発した。この手法において、メッシュユニットは断層や地下構造物ごとに独立に分割ことができ、メッシュユニット間での接触面において節点を共有している必要はない。よって、メッシュ分割のコストを大幅に減少させることができる。本研究では、この不整合メッシュを利用したEFGMを飽和-不飽和定常浸透流解析に適用し、数値解析例を通じて、有効性を検討する。

2. Element Free Galerkin法

(1) 移動最小自乗法

EFGMでは、図-1のように移動最小自乗法によって近

似関数を構築する。移動最小自乗法では、領域内の任意の位置 x において、未知関数 $\phi(x)$ を次のように近似する。

$$\phi^h(x) = \{p_m(x)\}^T \{a_m(x)\} \quad (1)$$

$\{p_m(x)\}$ は基底であり、三次元の線形基底を用いた。すなわち、

$$\{p_m(x)\} = \{1 \ x \ y \ z\}^T, \quad m = 4 \quad (2)$$

未定係数 $\{a_m(x)\}$ は領域内の任意の点 x において、次式の評価関数の最小条件から求められる。

$$J = \sum_i^N w(r_i) [\{p_m(x_i)\}^T \{a_m(x)\} - \phi_i]^2 \quad (3)$$

ここで、 N は評価点周りに設定した領域 d_i 内に存在する節点数であり、この領域 d_i を影響領域と呼ぶ。

x_i は番目の節点の空間座標値であり、 ϕ_i は $x = x_i$ における ϕ の節点値、 r_i は評価点 x と節点 i との距離である。

重み関数は評価点 x からの距離の関数であり、本研究では、以下に示す四次スプラインを導入した。

$$w(r_i) = 1 - 6\left(\frac{r_i}{d_i}\right)^2 - 8\left(\frac{r_i}{d_i}\right)^3 + 3\left(\frac{r_i}{d_i}\right)^4 \quad (4)$$

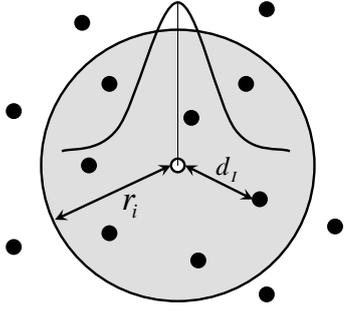


図-1 影響領域と重み関数

(2) 支配方程式と定式化

着目する領域 V 内の地下水流動の支配方程式は、次の浸透流方程式で与えられるものと仮定する。

$$\nabla(k\nabla\phi) = 0 \quad \text{in } V \quad (5)$$

ここで、 k は透水係数、 ∇ は線形微分演算子である。 ϕ は全水頭であり、位置水頭 h と圧力水頭 $p_w / \rho_w g$ の和で表される。

$$\phi = h + p_w / \rho_w g \quad (6)$$

p_w は地下水圧、 ρ_w は地下水の密度、 g は重力加速度である。境界条件は、全水頭（または圧力水頭）が規定される Dirichlet 境界条件とフラックスが規定される Neuman 境界条件である。

$$\phi = \hat{\phi} \quad \text{on } S_\phi \quad (7)$$

$$k \frac{\partial \phi}{\partial n} = \hat{q} \quad \text{on } S_n \quad (8)$$

ここに、 n は領域 V の境界に立てた単位法線ベクトルである。

(3) 領域積分

EFGMでは、領域積分のためにバックグラウンドセルと呼ばれる格子が利用されるのが一般的である。しかし、本研究ではFEM解析で用いられるメッシュを積極的に利用する。すなわち、領域積分にはバックグラウンドセルではなく、メッシュを用いる。このメッシュは後述するメッシュユニットとしても利用する。

(4) 影響半径の設定

節点密度に粗密のある場合の影響半径の設定については以下の方法で行う。基底関数の項数を m とすると、

- ① 節点番号 i と式(3)中の r_i の配列を作成する。
- ② それらの配列を r_i の昇順にソートする。
- ③ 先頭の $m-1$ 個の情報を配列から取り出す。
- ④ 次の一つの情報を配列から取り出す。
- ⑤ 収集した n 個の節点で次の $[R_{mm}]$ を計算する。

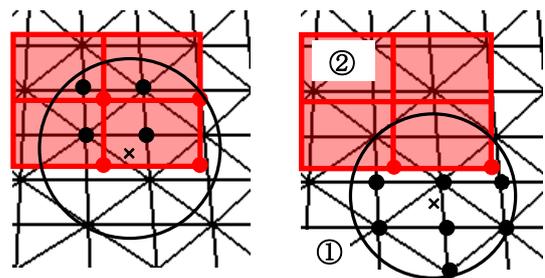
$$[R_{mm}] = [D_{mm}][D_{mm}]^T \quad (9)$$

$$[D_{mm}] = [\{P_m(x_1)\} \{P_m(x_1)\} \cdots \{P_m(x_n)\}] \quad (10)$$

- ⑥ $[R_{mm}]$ の正則性が悪ければ④に戻る。
- ⑦ スケールファクタ κ を乗じ、影響半径 d_i とする。

(5) メッシュユニットの利用

本研究で開発したシステムは、独立したメッシュの集合体（メッシュユニット）を入力とする。以下、メッシュユニットを利用した節点収集の方法について述べる。メッシュユニットが重複している場合には優先順位を与える。図-2においてメッシュユニット①とメッシュユニット②は重なっているが、ここではメッシュユニット②にメッシュユニット①より高い優先順位を与えている。メッシュユニット②を積分する場合は、メッシュユニット①の節点も収集対象とする(図-2(a))。一方、メッシュユニット①を積分する場合は、それより優先順位の高い、メッシュユニット②を積分対象から除外する(図-2(b))。このとき、メッシュユニット②の表面にある節点は収集対象とし、内部の節点については収集対象外とする。



(a) パターン1

(b) パターン2

図-2 メッシュユニットが重複した場合の節点収集

3. 影響領域が精度に与える影響についての検討

(1) 解析モデルおよび解析条件

図-3に示す2つのメッシュユニットからなるモデルに対し、浸透流解析を行った。境界条件は解析領域の左右

にそれぞれ $\hat{\phi}=10\text{m}$, $\hat{\phi}=6\text{m}$ の静水圧条件とした。浸出面を除くその他の面は、不透水境界とした。

メッシュユニット1およびメッシュユニット2の飽和透水係数はそれぞれ、 $1.0 \times 10^5 \text{m/s}$, $1.0 \times 10^7 \text{m/s}$ とした。不飽和領域の透水係数はVGモデル³⁾により設定した。EFGMの解析に用いたメッシュを図-4に示す。(節点数: 740, 要素数: 320) 二次元問題であるが、奥行き方向にも節点を配置した三次元メッシュである。このメッシュに対し、スケールファクタ κ を1.1から2.0まで変化させた解析を行った。比較のため、線形六面体要素を用いたFEM解析(節点数: 58322, 要素数: 28800)もあわせて実施した。

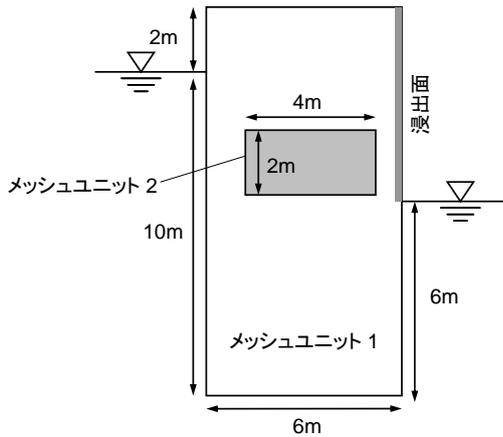


図-3 解析モデル概略

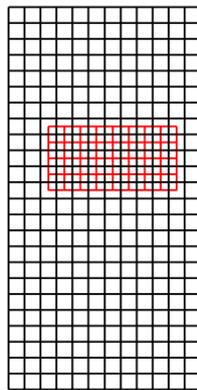


図-4 EFGM解析に用いたメッシュ

(2) 解析結果

図-5に2-4)節で定義したスケールファクタ κ とエラーノルム E_ϕ の関係を示す。 E_ϕ は次式により求めた。

$$E_\phi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{nodes} (\phi_i - \phi_i^{reference})^2}{(\phi^{reference})^2}} / nodes \quad (11)$$

ここで、 $\phi^{reference}$ は線形六面体要素によるFEM解析の解である。

図-5より、全体的な傾向として、 κ が1.6以下の範囲では誤差は比較的小さく、1.6より大きくなるに伴ってFEM解析の解との差が増加する傾向となっていることがわかる。エラーノルムは $\kappa=1.6$ のケースにおいて最小となった。

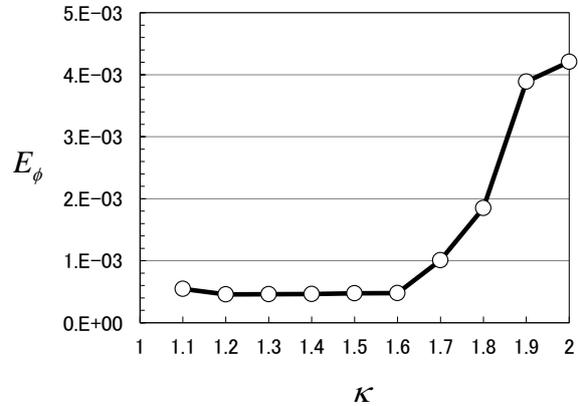


図-5 スケールファクタとエラーノルムの関係

4. 流量の精度評価

(1) 解析モデルおよび解析条件

ここでは、図-6に示す半無限領域に設置した円形暗きよの問題を対象とし、流量の精度を評価する。

円形暗きよの取水量算定式としては次式のMuskat式⁴⁾が広く用いられている。

$$Q = \frac{2\pi k(h_1 - h_2)}{\ln(2d/r)} \quad (12)$$

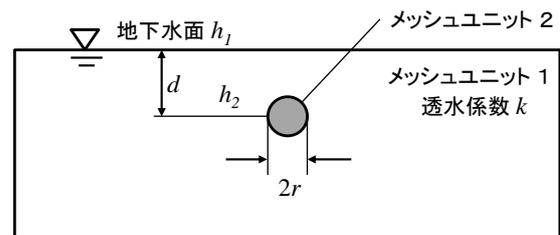


図-6 半無限領域に設置された円形暗きよの解析モデル

本解析では、暗きよの半径 $r=1\text{m}$ 、暗きよ中心の深さ $d=10\text{m}$ に対し、解析領域を $50\text{m} \times 400\text{m}$ とした。メッシュユニット2の側面(空洞壁面)は大気圧とした。EFGM解析に用いたメッシュを図-7に示す。前節と同様、奥行き方向にも節点を配置した三次元メッシュである。スケールファクタ κ は1.1とした。精度比較のため、不整合の無いメッシュによるFEM解析もあわせて実施した。

(2) 解析結果

図-8に暗きよ近傍の圧力水頭の結果を示す。FEMとEFGMの結果は良く一致していることが確認できる。解析結果より求めた暗きよの湧水量をMuskat式と比較して表-1に示す。湧水量は以下の式で無次元化している。

$$Q_n = Q / kd \quad (13)$$

EFGMの無次元化流量はMuskatの理論解と良く一致している。理論解との誤差をみると、FEMが1.52%であるのに対し、EFGMが2.53%とやや大きい。FEMとEFGMでは理論解との差で1%程度の違いがあるものの、EFGMのメッシュが不整合である点を考慮すると妥当な結果であるといえる。

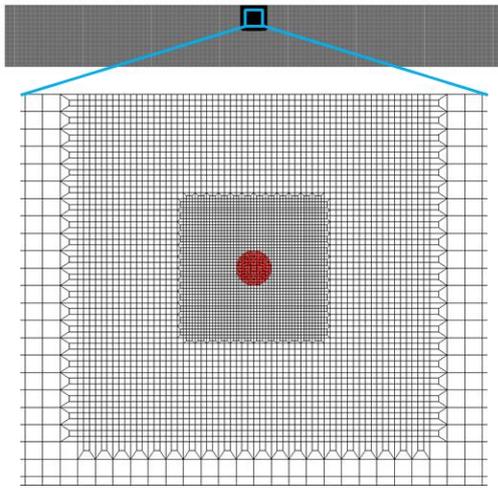


図-7 EFGM解析に用いたメッシュ

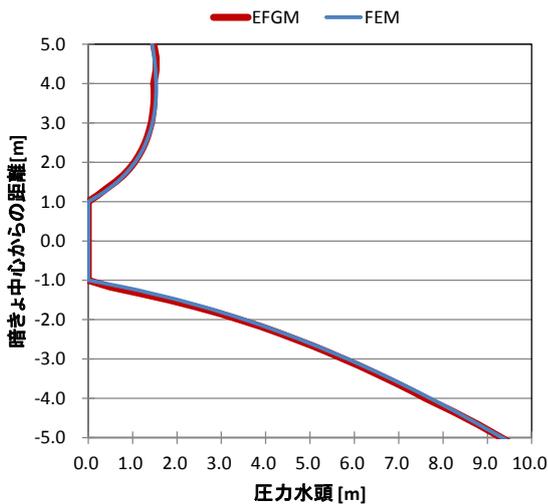


図-8 暗きよ近傍における鉛直方向の圧力水頭分布

表-1 無次元化流量の比較

	無次元化流量	Muskat との誤差[%]
Muskat	2.097	-
EFGM	2.044	2.53
FEM	2.065	1.52

5. 空洞と高透水層を有するモデルを用いた解析

(1) 解析モデルおよび解析条件

図-9に示すモデルに対し、飽和-不飽和浸透流解析を実施した。モデルは400m×400m×100mの矩形領域内に空洞と高透水層を有しており、メッシュユニットをそれぞれ独立に作成している。節点数は19,928、要素数は16,820である。モデルの側面は静水圧境界とし、空洞のメッシュユニットの表面は大気圧とした。スケールファクタ κ は1.1に設定した。

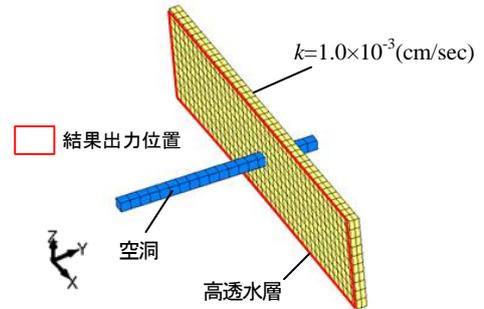
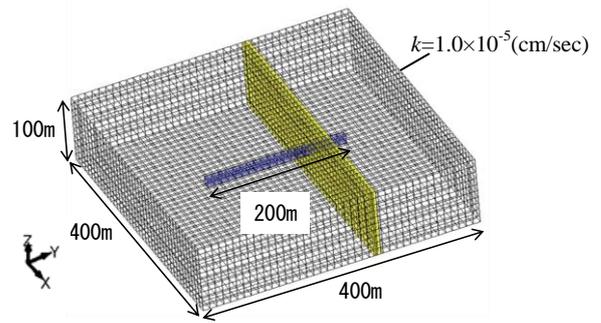


図-9 EFGM解析に用いたメッシュ

(2) 解析結果

解析結果より得られた圧力水頭分布を図-10に示す。比較として、FEM解析の結果も併せて示す。図-10の結果から、空洞の天端まで地下水位が低下している様子が再現できていることがわかる。また、FEMの結果とも定性的に良く一致している。

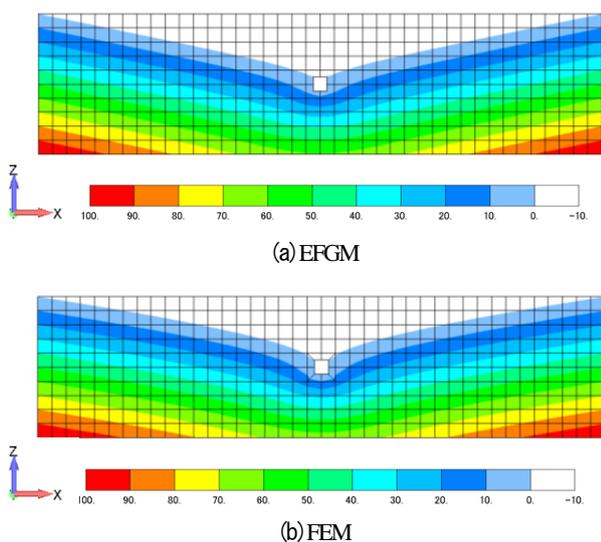


図-10 圧力水頭分布の比較 (単位 : m)

6. おわりに

本研究では、モデル作成の労力を低減することを目的として、不整合メッシュを利用したEFGMを開発した。影響領域の検証解析より、スケールファクタ κ は1.6以下で精度の良い解が得られることがわかり、流量の計算精度についても理論解と良い一致がみられた。基礎的な問題において本解析システムの妥当性が確認されたと判断する。今後はより実モデルでの検証を行う予定である。

参考文献

- 1) 櫻井英行 : Element-Free Galerkin 法を応用した新しい三次元地下水浸透流解析システム, 土木学会論文集, No.720/VII-25, pp.63-75, 2002.
- 2) Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L. : Element-free Galerkin Method. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 37, pp.229-256, 1994.
- 3) Van Genuchten, M. Th. : A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils. *Soil Sci. Am. J.*, 44(5) pp.892-898, 1980.
- 4) Muskat, M. : The flow of homogeneous fluid through porous media., *Mc Graw Hill*, 1937.

SATURATED-UNSATURATED SEEPAGE ANALYSIS USING ELEMENT FREE GALERKIN METHOD FOR INCONSISTENT MESH

Hayato SUZUKI, Fumio IDA, Gou ORUKAWA, Yoshinobu NISHIMOTO

Seepage analysis is often used for the development of underground space. When the finite element method is applied, it is necessary to create a model that takes into account the distribution of geology and position of underground structure. However, it takes a great deal of effort to build such a complex model. Element Free Galerkin method(EFGM), on the other hand, is a method that does not use a finite element. In this paper, we applied EFGM to the analysis of saturated-unsaturated seepage flow system. The system allows the incompatibility of the mesh overlap. Examples by numerical analysis show the effectiveness of the proposed method.