第 44 回岩盤力学に関するシンポジウム講演集
公益社団法人土木学会　2016 年 1 月　講演番号 14

３次元格子ばね解析法による円孔周辺の変形解析と連結形式の影響

西村　強[*1]・文村　賢一[2]・河野　勝宣[1]・三橋　大地[1]

[1]鳥取大学大学院　工学研究科社会基盤工学専攻（〒680-8552 鳥取市湖山町南4-101）
[2]大成建設（株）（鳥取大学大学院 工学研究科社会基盤工学専攻 博士後期課程）
（〒812-0011　福岡市博多区博多駅前3-22-6）
*E-mail: tnishi@cv.tottori-u.ac.jp

本文では，質点や剛体を用いた個別要素法などの離散系解析法に用いられるばね係数を弾性定数に基づいて算出する式と，その式を剛体回転量を質点間相対変位量から除去して純粋な変形に対して記述するための手順を記述している．まず，解析の一例としてトンネル解析を意識した円孔を有する板における円孔周辺の応力・変位分布の２次元弾性解への収束状況と連結方式の差異の影響を示している．続いて，境界条件として与える変位が振動する場合の変位分布を示す．これは，運動方程式の時間差分を用いる本法において，伝播状況への連結方式の影響を例示すること，さらに，降伏条件導入時に，段階的な応力解放が塑性域の進展に及ぼす影響を推察するためのものでもある．

Key Words : *3D-distinct element-based model, spring stiffness, elasticity, micro-macro relation*

1. 緒言

本文では，微小変形の仮定のもと，弾性定数を用いて質点や剛体を用いた粒状体解析法に用いられるばね係数の入力値を決定する方法を導入した質点系解析法による解析例を報告する．一般的に多用される粒状体解析法には，個別要素法(Distinct Element Method, DEM)[1]，不連続変形法(Discontinuous Deformation Analysis, DDA) [2]や格子ばね法(Lattice Spring Model, LSM)[3]などがあるが，これらの方法では，質点，剛体要素あるいは変形可能な要素間をばねで連結して，個々の要素の相対運動で解析対象の変形を表現する．特に，DEMは，剛体要素の分離と摩擦を含む接触を導入して，不連続性岩盤や粒状体の変形解析に広く用いられている．また，単に準静的な問題ばかりでなく，大変形や破壊を含む現象そして動的な問題にも適用されている[4), 5), 6)]．このような解析法の利用にあたっては，ばね係数の設定値と，解析対象の弾性定数などの材料特性との対応関係が重要である．一軸圧縮試験などの解析によって，その設定値と材料特性を結びつける報告もある[7)]．

既に，著者らは，質点をばねで連結した格子系でモデル化する解析法におけるばね係数の決定法について報告している．それは，外力や変形に伴い解析対象内に蓄えられたひずみエネルギーとばねに蓄えられたエネルギーが等しいとして弾性係数テンソルと(k_n, k_s)の関係式を示すものである．

さて，２次元問題としてトンネル掘削をモデル化するとき，掘削想定面における段階的な除荷として取り扱われることが多い．上記の手法をトンネル掘削解析を行う時，除荷は連結格子を通じて周辺地盤に伝播することになるが，その伝播状況は，連結形式の影響を受けると考えられる．そして，例えば塑性域の発生を想定する解析では，その進展に影響を与えることも考えられる．以上のことから，２次元円孔解析結果と弾性解との比較を示した上で，境界条件として与える変位を正弦振動とするときの伝播状況について解析例を示す．これは，連結形式の影響を知るとともに，動的な解析における留意点を探ろうしている．

2. 3次元格子ばね解析法の概要

(1) 質点の運動方程式と差分解法

図-1に示す質点間にばねを導入し，個々の質点に対する運動方程式を次のように書く．

$$[\mathbf{m}]\ddot{\mathbf{u}}+[\mathbf{c}]\dot{\mathbf{u}}+[\mathbf{k}]\mathbf{u}=\mathbf{f} \tag{1}$$

ここに，$\mathbf{u}$は変位ベクトル，$\mathbf{m}$は質量マトリクス，$\mathbf{c}$は減衰係数マトリクス，$\mathbf{k}$は剛性マトリクス，$\mathbf{f}$は外力ベクトルである．陽形式解法を用いると，時刻tにおける加速度 $\ddot{\mathbf{u}}_{\mathrm{t}}$ は，

$$\ddot{\mathbf{u}}_t = \frac{1}{m}\left(\mathbf{f}_{\mathrm{t}} - c\dot{\mathbf{u}}_{\mathrm{t}} - k\mathbf{u}_{\mathrm{t}}\right) \tag{2}$$

となる．Δtを微小時間増分として，$t+\Delta t$ の変位 $\mathbf{u}_{\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t}}$ は，

$$\mathbf{u}_{\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t}} = 2\mathbf{u}_{\mathrm{t}} - \mathbf{u}_{\mathrm{t}-\Delta\mathrm{t}} + \ddot{\mathbf{u}}_{\mathrm{t}} \times \Delta t^2 \tag{3}$$

と書けることから変位増分$\Delta\mathbf{u}_{\mathrm{t}}=\mathbf{u}_{\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t}}-\mathbf{u}_{\mathrm{t}}$は，直前の変位増分$\Delta\mathbf{u}_{\mathrm{t}-\Delta\mathrm{t}}$を用いて求めることができる．

$$\Delta\mathbf{u}_{\mathrm{t}} = \Delta\mathbf{u}_{\mathrm{t}-\Delta\mathrm{t}} + \ddot{\mathbf{u}}_{\mathrm{t}} \times \Delta t^2 \tag{4}$$

以上から，既知の変位$\mathbf{u}_{\mathrm{t}}$，$\mathbf{u}_{\mathrm{t}-\Delta\mathrm{t}}$を用いて変位増分と新位置が求められる．時刻$t$における変位速度は，

$$\dot{\mathbf{u}}_{\mathrm{t}} = \frac{\mathbf{u}_{\mathrm{t}} - \mathbf{u}_{\mathrm{t}-\Delta\mathrm{t}}}{\Delta t} + \ddot{\mathbf{u}}_{\mathrm{t}} \times \Delta t/2 \tag{5}$$

(2) ばね係数と弾性定数の関係式

対象とする物体が，ひずみε_{ij}と応力σ_{ij}が0（ゼロ）の状態から，ある載荷された状態にある．これを初期状態として，重心位置x_i (i=1, 2, 3) にある質点pの変位$\bar{u}_i^{\mathrm{p}}$を，微小変形の仮定のもと，次のように表す．

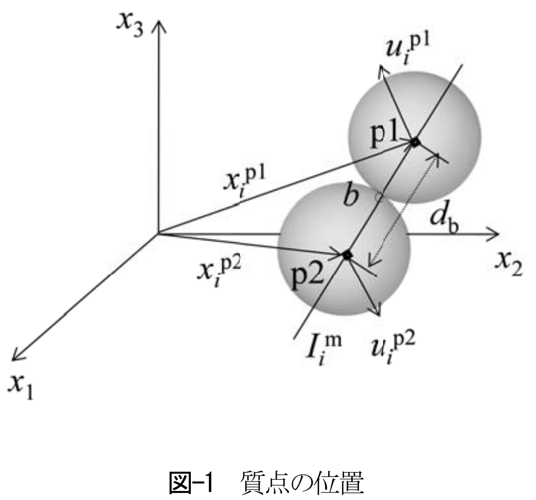
$$\bar{u}_i^{\mathrm{p}} = \varepsilon_{ij} x_j^{\mathrm{p}} \tag{6}$$

このとき，各質点間には法線，接線方向の相対変位($U_{(\mathrm{n})}$, $U_{(\mathrm{s})}$)が発生しており，ばねには($F_{(\mathrm{n})}$, $F_{(\mathrm{s})}$)の力が生じているとして，それらを次式のように与える．

$$F_{(\mathrm{n})} = k_{\mathrm{n}} U_{(\mathrm{n})},\quad F_{(\mathrm{s})} = k_{\mathrm{s}} U_{(\mathrm{s})} \tag{7}$$

2つの質点p_1とp_2（図−1を参照）の連結をbと表記して，法線，接線方向の相対変位を次式のように書く．

$$U_{(\mathrm{n})}^{\mathrm{b}} = \Delta u_i^{\mathrm{b}} I_i^{\mathrm{b}} \qquad U_{(\mathrm{s})i}^{\mathrm{b}} = \Delta u_i^{\mathrm{b}} - U_{(\mathrm{n})}^{\mathrm{b}} I_i^{\mathrm{b}} \tag{8}$$



図−1　質点の位置

ここに，相対変位Δu_i^{b}は，

$$\Delta u_i^{\mathrm{b}} = \bar{u}_i^{\mathrm{p2}} - \bar{u}_i^{\mathrm{p1}} = \varepsilon_{ij}\left(x_j^{\mathrm{p2}} - x_j^{\mathrm{p1}}\right) = \varepsilon_{ij} d_{\mathrm{b}} I_j^{\mathrm{b}} \tag{9}$$

となる．I_i^{b}は法線方向の単位ベクトルI_i^{b}，d_{b}はp_1とp_2間のばねの長さである．詳細は既報に譲る[8]が，ばね間の力とひずみエネルギーは，

$$f_i^{\mathrm{b}} = k_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}} \Delta u_j^{\mathrm{b}} I_j^{\mathrm{b}} I_i^{\mathrm{b}} + k_{\mathrm{s}}^{\mathrm{b}}\left(\Delta u_i^{\mathrm{b}} - \Delta u_j^{\mathrm{b}} I_j^{\mathrm{b}} I_i^{\mathrm{b}}\right) \tag{10}$$

$$\Pi = \frac{\Pi_{\mathrm{b}}}{V} = \frac{1}{V}\sum_{\mathrm{b}=1}^{N_{\mathrm{c}}} \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij} d_{\mathrm{b}} I_j^{\mathrm{b}} f_j^{\mathrm{b}} + \varepsilon_{ji} d_{\mathrm{b}} I_i^{\mathrm{b}} f_i^{\mathrm{b}}\right) \tag{11}$$

と書けることから，弾性係数テンソルC_{ijkl}は，次のように与えられる．

$$C_{ijkl} = \frac{1}{V}\sum_{\mathrm{b}=1}^{N_{\mathrm{c}}}\left[\frac{k_{\mathrm{s}}^{\mathrm{b}} d_{\mathrm{b}}^2}{4}\left(I_j^{\mathrm{b}} I_k^{\mathrm{b}} \delta_{il} + I_i^{\mathrm{b}} I_k^{\mathrm{b}} \delta_{jl} + I_j^{\mathrm{b}} I_l^{\mathrm{b}} \delta_{ik} + I_i^{\mathrm{b}} I_l^{\mathrm{b}} \delta_{jk}\right) + \left(k_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}} - k_{\mathrm{s}}^{\mathrm{b}}\right) d_{\mathrm{b}}^2 I_i^{\mathrm{b}} I_j^{\mathrm{b}} I_k^{\mathrm{b}} I_l^{\mathrm{b}}\right] \tag{12}$$

ここに，δ_{ij}はクロネッカーのデルタである．なお，2.(1)の計算過程から得られる変位量の差としてΔu_i^{b}を求めると回転による項が含まれてしまう．そこで，連続体内の立方体ブロックに注目して，そのブロック内の変位を次式で書く．なお，x_1-x, x_2-y, x_3-zと対応させる．

$$\begin{pmatrix} u_{\mathrm{x}} \\ u_{\mathrm{y}} \\ u_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{13}$$

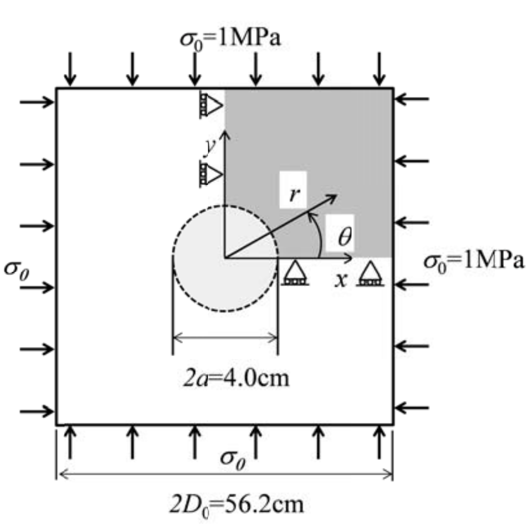
これを，図−1のp_1, p_2を含むブロックに適用して，各座標成分ごとに差を求めると次式が得られる．

$$\begin{pmatrix} \Delta u_1^{\mathrm{b}} \\ \Delta u_2^{\mathrm{b}} \\ \Delta u_3^{\mathrm{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\mathrm{x}}^{\mathrm{p2}} - u_{\mathrm{x}}^{\mathrm{p1}} \\ u_{\mathrm{y}}^{\mathrm{p2}} - u_{\mathrm{y}}^{\mathrm{p1}} \\ u_{\mathrm{z}}^{\mathrm{p2}} - u_{\mathrm{z}}^{\mathrm{p1}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & z^{\mathrm{p2}} - z^{\mathrm{p1}} & -\left(y^{\mathrm{p2}} - y^{\mathrm{p1}}\right) \\ -\left(z^{\mathrm{p2}} - z^{\mathrm{p1}}\right) & 0 & x^{\mathrm{p2}} - x^{\mathrm{p1}} \\ y^{\mathrm{p2}} - y^{\mathrm{p1}} & -\left(x^{\mathrm{p2}} - x^{\mathrm{p1}}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\mathrm{x}} \\ \omega_{\mathrm{y}} \\ \omega_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} \tag{14}$$

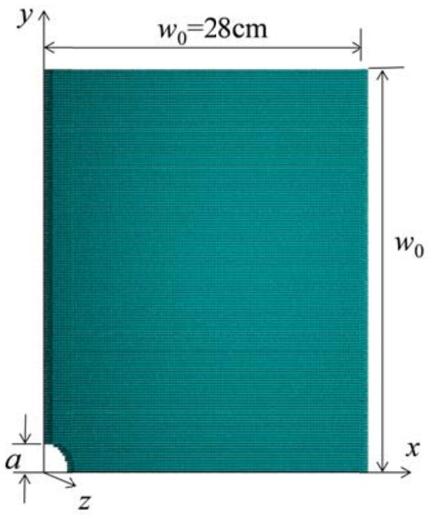
ここに，(ω_x, ω_y, ω_z)は，剛体回転を表している．回転角を表現するためオイラー角(θ, φ, ψ)[9]を導入し，その点が代表する領域の体積と同一体積を有する球の回転として求めている．また，式(2)-(8)の数値解が式(1)の解を表現することを保証する条件として次式を用いた[10]．

$$\Delta t < \min\left(\frac{d_{\mathrm{b}}}{c_{\mathrm{p}}}\right) \tag{15}$$

ここに，c_{p}は縦波の波速である．減衰に関する項は，式(2)を次式のように書き換えて用いた．



(a)解析条件と解析領域



(b) 解析モデル

図-2 円孔を有する板と解析モデル

$$\ddot{\mathbf{u}}_{\mathrm{t}} = \frac{1}{m}\left(\sum \mathbf{f}_{\mathrm{t}} - \mathrm{sgn}(\alpha, \dot{\mathbf{u}}_{\mathrm{t}})\left|\sum \mathbf{f}_{\mathrm{t}}\right|\right) \tag{16}$$

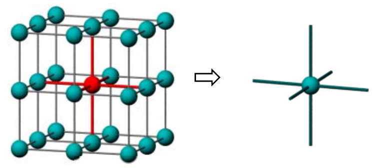
ここに，sgn(p, q)は，pの絶対値にqの符号を付与することを示す．本文の解析では，α=0.8とした．

3. 2次元変形解析例

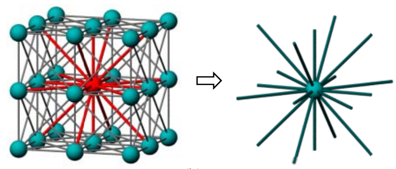
(1) 円孔周辺の応力・変形解析

図-2は，円孔問題の解析モデル図である．**図-2**(b)は，質点間距離d_0=0.2cmで配列した解析モデルを示す．解析モデルの作成では，対称性から**図-2**(a)でハッチングしている1/4領域を解析対象とし，図中のx=0，y=0およびz=0の面上の質点について，それぞれの面法線方向変位を固定とした．総質点数は，円孔部分除去前で141×141×5＝99405個である．質点間の連結は，**図-3**に示す2形式である．解析では，初期応力σ_0の載荷に対する力をばねに生じさせたのちに，各格子点位置は初期配置時の位置にあるとして円孔内に位置する格子点とそれらに連結しているばねを消去するが，質点はx軸およびy軸上を除いてr=2cmの円周上に配置されていない．そのため，**図-2**(b)のように円孔表面は不連続な階段状として表現されることになる．弾性係数E_0=1000MPa，ポアソン比ν_0=0.2である．

この除去に伴う増分変位の半径方向成分u_rの分布状況を**図-4**(a)に，除去後の応力分布を**図-4**(b)に示す．図(a)では，変位増分量u_rを，次式(17)から求める$U_{r=a}$(=0.0024cm)で相対化の上，10段階に区分して表示している．



(a) Type 1



(b) Type 2

図-3 質点連結格子モデル

$$U_{\mathrm{r}} = \frac{(1+\nu)\sigma_0}{E}\frac{a^2}{r} \tag{17}$$

なお，この式は，十分遠方で作用する応力σ_0に対する解であるのに対して，ここで示す結果は有限板に関するものである．それ故，単純な比較は適切ではないが，解析精度の示す基準として用いた．

応力成分σ_r, σ_θについては，各格子点位置の応力値を初期値σ_0で相対化した後に同じく10段階に区分して，ここではσ_θについてのみ表示している．なお，この応力成分の算出には，式(18)を用いている．

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2V}\sum_{\mathrm{b}=1}^{N_{\mathrm{c}}}\left(d_{\mathrm{b}} I_i^{\mathrm{b}} f_j^{\mathrm{b}} + d_{\mathrm{b}} I_j^{\mathrm{b}} f_i^{\mathrm{b}}\right) \tag{18}$$

これらの図を見ると，(i)変位，応力分布とも連結方式の影響がみられること，(ii)θ=π/4を境界としてθ<π/4側と

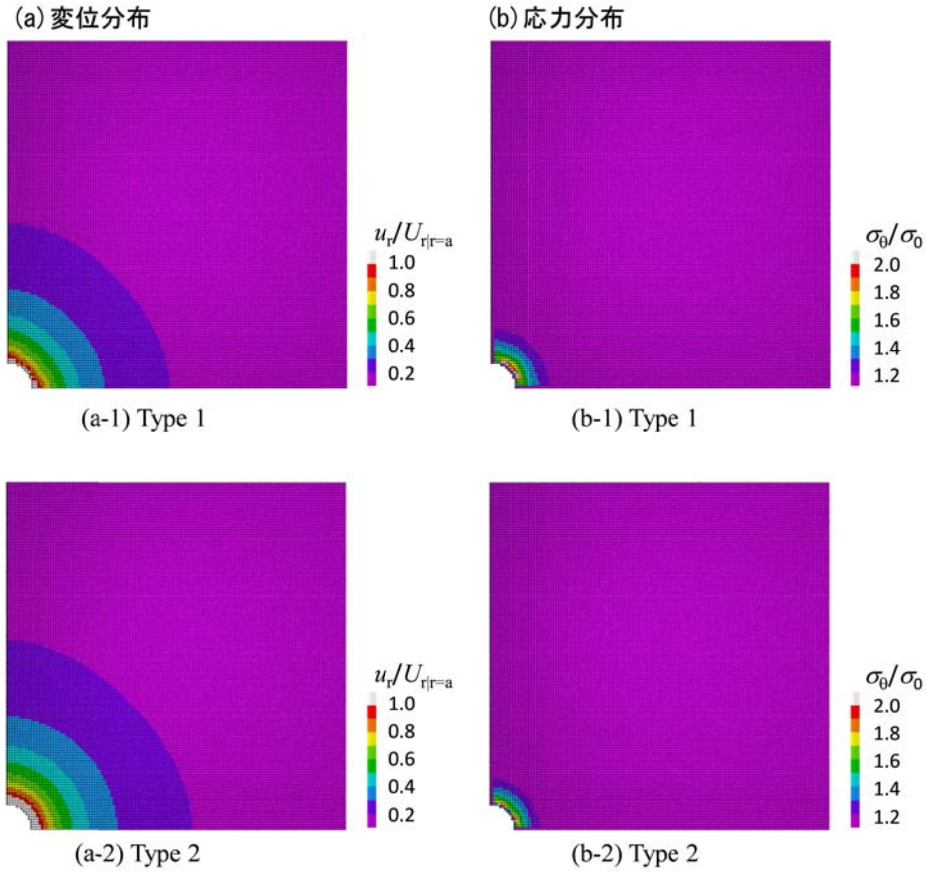
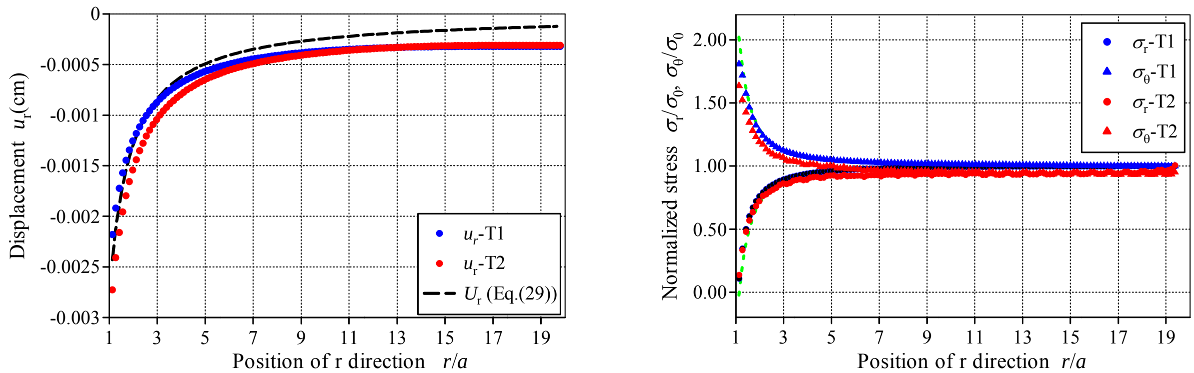


図-4　円孔周辺の変位と応力の分布

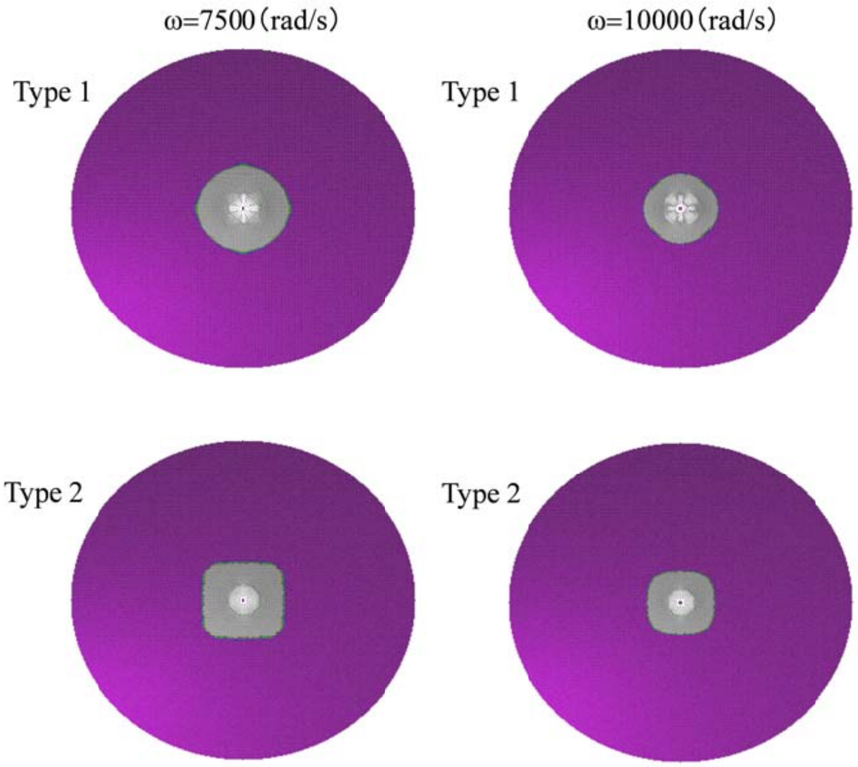


(a) 変位分布　　　(b) 応力分布

図-5　円孔部除去後の$\theta=\pi/4$線上の格子点における半径方向変位と応力

$\theta=\pi/4$側に概ね対称性のある解析結果となっていること，(iii)周方向に注目すれば，特に円孔表面付近では，同心円状の分布性状とはなっていないことが言える．この(iii)は前述のように円孔表面が階段状に表現されていることも一因と考えられる．

このような結果より，初期配置時に(x, y, z)=(1.4, 1.4, 0.4) - (28.0, 28.0, 0.4)線上の変位，応力をついてまとめたものが**図-5**である．**図-5**(a)では円孔表面からの距離に伴いu_rが減少する様子が示されている．連結方法の違いに注目して式(17)より求まるU_rへの接近度をみると，(x, y)=(1.6cm, 1.6cm)に配置された質点では，Type 1: u_r/U_r=1.026, Type 2：u_r/U_r =1.284の数値となっている．これらの数値から円孔付近ではType 1の接近度が良好であるが，それもr/aの増大とともに低下している．これは，遠方で与



図−6 時刻 $t=2\pi/\omega$における変位の伝播状況

えられた応力σ_0に対する解（式(17)）に対して，この応力値を境界条件として与えた解析結果を比較していることが一因と考えられる．そこで，初期分割時にx=28(cm)上にある質点のy方向変位を，ならびにy=28(cm)上にある質点のx方向変位を拘束する条件を与えて試行解析を実施したところ，同じく(x, y)=(1.6cm, 1.6cm)に配置された質点において，Type 1: u_r/U_r=1.005, Type 2: u_r/U_r=1.259となっている．

図−5(b)に同線上の格子点の応力σ_r, σ_θを示している．Type 1, 2とも円孔表面付近で$\sigma_r/\sigma_0=0$, $\sigma_\theta/\sigma_0=2$へ，またr/aの増大とともに$\sigma_r/\sigma_0=\sigma_\theta/\sigma_0=1$に収束する傾向を示している．しかしながら，この収束傾向は，Type 1の結果に比べてType 2が劣っている．円孔部の表現方法も含めて境界条件の設定については検討の必要があると言える．

(2) 板を伝わる波

(1)の解析は，瞬時の除荷を模擬したものである．応力状態の弾性解への収束状況は，外境界上でのσ_0の載荷で知ることができるが，掘削を模擬してさらにそれに伴う変位を知るために，前節のような除荷を解析条件とした．そして，式(4)で求まる変位増分が，極めて小さくなることを条件として，弾性解と比較している．一方，例えば塑性域の発生を想定する解析では，その進展が解放応力の大小ばかりでなく，格子の連結方法の影響を受けることも考えられる．つまり，対角方向に連結のないType 1とそれを有するType 2では，解放応力の伝播状況に差が生じて，さらには，そのことが降伏判定に影響を与えることも予想される．また，このようなことは，本法を波の伝播などの解析に利用する場合，検討しておくべき項目と判断した．次式のような平面内の波の伝播を想定している．

$$u_x = a\exp(i(\omega t - k_x x - k_y y)) \tag{19}$$

$$u_y = b\exp(i(\omega t - k_x x - k_y y)) \tag{20}$$

ここに，ωは角振動数，a, bは振幅，k_x，k_yはそれぞれx方向，y方向の波数に関する係数である．つまり，$\mathbf{\Lambda}=(\lambda_x, \lambda_y)$を波長ベクトル，$\mathbf{c}=(c_x, c_y)$を波速ベクトルとすれば，

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Lambda} = 2\pi \tag{21}$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{c} = \omega \tag{22}$$

となる．

図−6は，質点間距離d_0=0.2cmで配列した解析モデルによる解析結果である．平面内の解析に留めるため，z=0面上の一層モデルであり，総質点数は70681個である．解析では板内の一点を原点として，それに連結する8つの格子点に入力する変位を正弦波とした．弾性係数E_0=50MPa，ポアソン比ν_0=0.2を入力値としている．解析条件は，$a=b=1.0\times10^{3}$cm，ωは図中に示す2例である．対

角連結の有無の影響を確認するとともに，例えば，振動を入力するときには，入力振動数の影響も発生しうることが示されている．

4. 結言

本文では，質点や剛体を用いた粒状体解析法に用いられるばね係数を弾性定数に関連付ける方法を記述した．主たる結果を列記して結言とする．

1) 本法が応力を格子点上で表現可能であることを利用して，円孔周辺の応力解析結果を示した．この手順は，連結した質点を例えば 8 節点 6 面体要素に見立てて，格子系内部の応力を算出する手順を必要とせず，計算に要する手順も簡素である．このような手順でありながらも，円孔近傍の応力，変位とも弾性解に対して十分な接近度で求められた．
2) 境界条件として与える変位に振動を与えるとき，時々刻々の質点の運動に与える影響を格子連結形式の差異に注目して解析した．その結果，対角線格子の有無により変位の伝播状況に変化が生じ得ることが示された．

以上が，本論で得られた主要な結果である．特に，格子点上応力が求まることを利用すれば，物体内の破壊の進展等の表現も，より小さな計算量で実施できる可能性を有している．今後，このような解析手順の導入と改良を行うとともに，特に地盤材料の挙動さらにはトンネルや斜面などをターゲットにした解析を実施していく予定である．

謝辞：本研究の一部は，科学研究費補助金（基盤研究(c), No.26420482，研究代表者：西村　強）の補助を受けて実施している．ここに謝意を表する．

参考文献

1) Cundall, P. A.: A computer model for simulating progressive, large-scale movements in blocky rock systems, *Symposium on rock mechanics*, Nancy, Vol.2, pp.129-136, 1971.
2) Shi, G.-H. & Goodman, R. E.: Generalization of two dimensional discontinuous deformation analysis for forward modeling, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.13, pp.359-380, 1989.
3) Ostoja-Starzewski, M. : Lattice models in micromechanics, *Applied Mechanics Reviews*,Vol. 55, No.1, pp. 35-59, 2002.
4) Jiang, Y, Li, B. & Yamashita,Y.: Simulation of cracking near a large underground cavern in a discontinuous rock mass using the expanded distinct element method, *International Journal of Rock Mechanics and Mining sciences*, Vol.46, No.1, pp. 97-106, 2009.
5) Zhang, X.-P. & Wong, L. N. Y.: Cracking processes in rock-like material containing a single flaw under uniaxial compression: a numerical study based on parallel bonded-particle model approach, *Rock Mechanics and Rock Engineering*, Vol. 45, pp.711–737, 2012.
6) Deng, X. F., Chen, S. G., Zhu, J. B., Zhou, Y., X., Zhao, Z. Y. & Zhao, J.: UDEC–AUTODYN hybrid modeling of a large-scale underground explosion test, *Rock Mechanics and Rock Engineering*, Vol. 48, pp.737-747, 2015.
7) Potyondy, D. O. & Cundall, P. A. : Abonded-particle model for rock, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol.41, No.8, pp.1329-1364, 2004.
8) 文村 賢一，西村 強，河野 勝宣：三次元格子ばね解析法による円孔周りの応力・変形解析，第 43 回岩盤力学に関するシンポジウム講演集，Vol. 43, pp.13-18, 2015.
9) 坂田　勝：工学力学，共立出版，pp.79-82,1977.
10) 土木学会編：動的解析と耐震設計【第2巻】動的解析の方法，p22, 1989.

EFFECT OF THE LATTICE GEOMETRY OF A 3D DISTINCT ELEMENT-BASED MODEL ON STRESS AND DISPLACEMENT AROUND A HOLE

Tsuyoshi NISHIMURA, Kenichi FUMIMURA, Masanori KOHNO and Daichi MITSUHASHI

A distinct element-based numerical model, in which matter is discretized into a system of mass points connected with springs, are developed for the study of rocks. The micromechanical model for describing the elastic continuum is described and relationships between the micromechanical parameters of the springs and the macro material elastic constants of the matter are derived. Firstly, stress and displacement in the plate with a circular hole is simulated with the two types of the lattice geometry. Secondly, to compare the dynamic behaviour of the two types of geometry, we analyze the propagation of plane harmonic wave. The effect of the lattice anisotropy on the analytical results is presented.