

三次元格子ばね解析法による 円孔周りの応力・変形解析

文村 賢一^{1*}・西村 強²・河野 勝宣²

¹大成建設株式会社 九州支店土木部（〒810-8511 福岡市中央区大手門1-1-7）

²鳥取大学大学院 工学研究科（〒680-8552 鳥取市湖山町南4-101）

*E-mail: fumimura@ce.taisei.co.jp

既報¹⁾では、ばねで連結した質点個々を運動方程式の差分法で追跡する変形解析法において、ばねに蓄えられるエネルギーの総和が、弾性体内のひずみエネルギーと等価であるという仮定を導入して、ばね係数と弾性定数（ヤング率：E，ポアソン比： ν ）の関連付けの定式化を試みた。本文では、この着想に基づく解析法によるトンネル掘削に伴う周辺地盤の変形解析を目指して、円孔周りの応力・変形に関する数値解と弾性理論解の比較を行った。その結果は、地盤を表現する格子状配置の質点の連結パターンに影響を受けるものの、弾性解に近似することが判明した。

Key Words : 3D-distinct element-based model, spring stiffness, elasticity, tunnel, deformation

1. 緒言

山岳トンネルの施工は、「山を落とさない」ことに最大限配慮して工事を進める。中でも、切羽の安定を確保して施工することが重要である。このため、切羽前方地山の安定性が確保されない場合には、先受け工や鏡ボルトなどの補助工法を用いて地山を安定させながら切羽を進める。すなわち、地山を崩落（破壊）させないことがトンネル施工の第一の命題である。

一方、地山や支保の健全性評価は、有限要素法に代表される連続体解析を用いて、応力やひずみを検証することが一般的である。例えば、応力やひずみなどの解析解を分子に、許容値を分母とした指標（安全率）によって判定することなどである。

確かに、応力やひずみによって、地山の挙動原因を推察することは出来るが、地山の挙動そのものを説明するものではない。先にも述べたように、「山を落とさない」こと、それは山岳トンネルの施工に際して、地山の破壊モードやメカニズムを把握し、「山を落とさない」掘削方法を選定することや、支保を選定すること、または補助工法を選定することなどであるが、有限要素法に代表される連続体解析では、破壊現象が再現できないため、これらを定量的に評価・検討することが大変難しい。

一方、個別要素法などに代表される離散系の解析手法では、破壊現象は再現できるものの、ヤング率などの物

理定数を直接扱うことができず、トンネル支保設計に際して定量的な評価を与えることが難しい。

そこで、計測データから地山を評価する方法として、桜井²⁾は変位計測結果から地山の挙動を直接評価する「直接ひずみ評価法」を提唱している。この手法は、施工現場で最も一般的に計測する坑内変位を用いて、地山の健全性が評価できるため、昨今広く用いられている。

しかし、同手法は破壊モードや破壊メカニズムの解明を目的としておらず、岩盤構造物の健全性検証に対して決定的な評価を与えるものとなるまでには至っていない。

つまり、トンネル支保や補助工法の選定において、地山の不均質性や事前調査の限界といった要因もさることながら、定量的に評価する決定的な手法が存在しない。このため、地山分類や計測結果に基づき、経験的手法によってそれらを選定し、数値解析の手法は補助的にそれらの効果を確認することに留まることが多く、定性的な評価・設計にならざるを得ないのが現状である³⁾⁴⁾。

このような認識のもと、本文では、破壊とそれに伴う破断面の生成や大変形の表現に、ばねで連結した質点個々を運動方程式の差分法で追跡する格子ばね解析法の導入を目指す。このような解析法では、前述したように、入力変数とヤング率などの定数の関係が明確にされていない場合が多い。そこで、ばねに蓄えられるエネルギーの総和と弾性体内のひずみエネルギーと等価であるとの仮定に基づく入力値算定式を用いる。そして、円孔

周りの変位・応力の数値解析結果と弾性理論解を比較し、解析手法の精度を確認するとともに、将来性や課題について検証した。

2. 格子ばね解析法の概要

(1) 質点の運動方程式

本文で用いる三次元格子ばね解析法とは、質点をばねで連結した格子系で解析対象をモデル化し、個々の格子点の運動を追跡する数値解析法である。具体的には、図-1に示す質点間にばねを導入し、個々の質点に対する運動方程式を次のように書く。

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f \quad (1)$$

ここに、 m は質量、 c は減衰定数、 f は外力である。陽形式解法を用いると、時刻における加速度 $\ddot{u}$ は、

$$\ddot{u}_t = \frac{1}{m}(f_t - c\dot{u}_t - ku_t) \quad (2)$$

となる。ここで、 Δt を微小時間増分、 $\dot{u}_{t,av}$ を時間区間 $(t, t+\Delta t)$ の質点の平均速度として、 $t+\Delta t$ の変位 $u_{t+\Delta t}$ は次式で求められる。

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_{t,av} \times \Delta t \quad (3)$$

なお、 $\dot{u}_{t,av}$ は、次のように書くことができる。

$$\dot{u}_{t,av} = \frac{u_t - u_{t-\Delta t}}{\Delta t} + \ddot{u}_t \times \Delta t \quad (4)$$

式(4)を式(3)に代入すると、

$$u_{t+\Delta t} = 2u_t - u_{t-\Delta t} + \ddot{u}_t \times \Delta t^2 \quad (5)$$

これより、変位増分 $\Delta u_t = u_{t+\Delta t} - u_t$ は、次式により直前の変位増分 $\Delta u_{t-\Delta t}$ を用いて求めることができる。

$$u_t = u_{t-\Delta t} + \ddot{u}_t \times \Delta t^2 \quad (6)$$

以上から、既知の変位 u_t 、 $u_{t-\Delta t}$ を用いて変位増分と新位置を求められる。 Δt 間の加速度は一定として、

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_t \times \Delta t + \ddot{u}_t \times \Delta t/2 \quad (7)$$

とすれば、時刻 t における変位速度は次式となる。

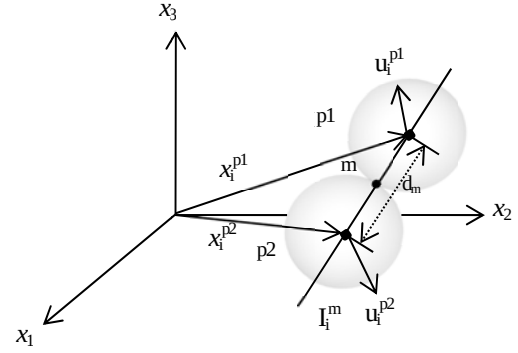


図-1 解析対象内の連結格子点

$$\dot{u}_t = \frac{u_t - u_{t-\Delta t}}{\Delta t} + \ddot{u}_t \times \Delta t/2 \quad (8)$$

(2) ばね係数と弾性定数の関係式

本節では、質点連結系内のばねに蓄えられるエネルギーが、対象とする弾性体内のひずみエネルギーに等しく、その勾配が材料の構成則を与えるとして、ばね係数と弾性定数の関係式を記述する。対象とする材料が、ひずみ e_{ij} と応力 σ_{ij} が、0（ゼロ）の状態から、ある载荷された状態にある。これを初期状態として、重心位置 $x_i (i = 1, 2, 3)$ にある格子点 p の変位 u_i^p を、微小変形の仮定のもと、次のように示す。

$$u_i^p = e_{ij}x_j^p \quad (9)$$

このとき、各格子点間には法線、接線方向に相対変位 $(U_{(n)}, U_{(t)})$ が発生しており、ばねには $(F_{(n)}, F_{(t)})$ の力が生じているとして、それらを次式のように与える。

$$F_{(n)} = K_n U_{(n)}, F_{(t)} = K_t U_{(t)} \quad (10)$$

2つの格子点 p_1 と p_2 （図-1参照）の連結を m と表記して、法線、接線方向の相対変位を次式のように書く。

$$U_{(n)}^m = \Delta u_i^m I_i^m \quad (11)$$

$$U_{(t)}^m = \Delta u_i^m - U_{(n)}^m I_i^m \quad (12)$$

ここに、相対変位 Δu_i^m は、

$$\begin{aligned} \Delta u_i^m &= p_i^{p1} - p_i^{p2} \\ &= e_{ij}(x_j^{p1} - x_j^{p2}) = e_{ij}d_m I_j^m \end{aligned} \quad (13)$$

となる。法線方向単位ベクトル I_i^m は次式で与えられる。

$$I_i^m = \frac{x_i^{p_1} - x_i^{p_2}}{d_m} \quad (14)$$

ここに、 d_m は、 p_1 と p_2 間のばねの長さである。連結 m に関する力 f_i^m は次式のように書くことが出来る。

$$f_i^m = k_n^m \Delta u_j^m I_j^m I_i^m + k_t^m (\Delta u_i^m - \Delta u_j^m I_j^m I_i^m) \quad (15)$$

あるいは、

$$f_i^m = (k_n^m - k_t^m) (e_{kl} I_k^m I_l^m) I_i^m d_m + k_t^m e_{ij} I_j^m d_m \quad (16)$$

式(16)中のダミー添字 ij,kl について、総和規約が適用される。ここで、単位体積当たりのひずみエネルギー Π を次式で表す。

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\Pi_b}{V} = \frac{1}{V} \sum_{m=1}^{N_c} \frac{1}{2} (\Delta u_i^m f_j^m + \Delta u_j^m f_i^m) \\ &= \frac{1}{V} \sum_{m=1}^{N_c} \frac{1}{2} (e_{ij} d_m I_j^m f_i^m + e_{ij} d_m I_i^m f_j^m) \end{aligned} \quad (17)$$

前節を参照して、応力 σ_{ij} は、

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Pi}{\partial e_{ij}} = \frac{1}{2V} \sum_{m=1}^{N_c} \frac{1}{2} (d_m I_i^m f_j^m + d_m I_j^m f_i^m) \quad (18)$$

となる。 N_c は格子系内部の総連結数であり、式(18)に式(16)を代入することにより、次のように書くことができる。

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{m=1}^{N_c} \frac{1}{2} \{ (k_t^m e_{ij} I_l^m I_l^m d_m^2 + k_t^m e_{ij} I_l^m I_j^m d_m^2) + (k_n^m - k_t^m) e_{ij} I_i^m I_j^m I_k^m I_l^m d_m^2 \} \quad (19)$$

弾性係数テンソル C_{ijkl} は、

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (20)$$

と表現できることから、式(20)に式(21)を代入することにより、 C_{ijkl} は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \sum_{m=1}^{N_c} \left\{ \frac{k_t^m d_m^2}{4} (I_j^m I_k^m \delta_{il} + I_i^m I_k^m \delta_{jl} + I_j^m I_l^m \delta_{ik} + \right. \\ &\quad \left. I_i^m I_l^m \delta_{jk}) + (k_n^m - k_t^m) d_m^2 I_i^m I_j^m I_k^m I_l^m \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

ここに、 δ_{ij} は、クロネッカーのデルタである。そして、

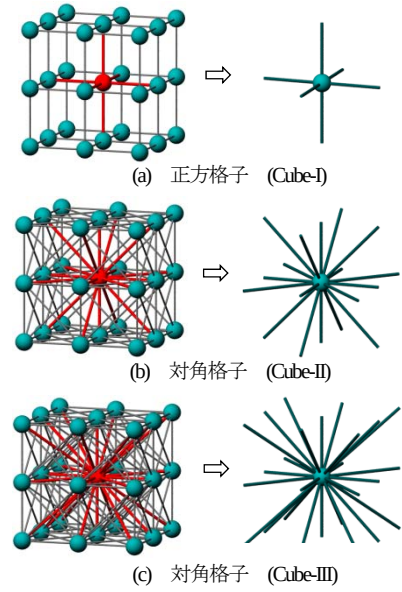


図-2 質点連結格子モデル

ラメ定数(λ , μ)を用いる時、例えば、 $C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} = \lambda + 2\mu$, $C_{1122} = C_{1133} = C_{2233} = \lambda$, $C_{1212} = C_{3131} = C_{2323} = \mu$ であることから、弾性定数とばね係数とが関連付けられる。

3. 格子ばね解析法による解析例

(1) 格子モデルと解析条件

図-2に示す一辺 d_m の立方体を質点—ばね連結系の最小単位として、円孔モデルや有限長円孔の変形解析を用いる。弾性定数—ばね係数の関係を表す式(21)を用いて求められる。

k_n, k_t に対して、式(2)～式(6)の数値解が式(1)の解を表現することを保証する条件として次式を用いた。

$$\Delta t < \min \left(\frac{d_m}{c_p} \right) \quad (22)$$

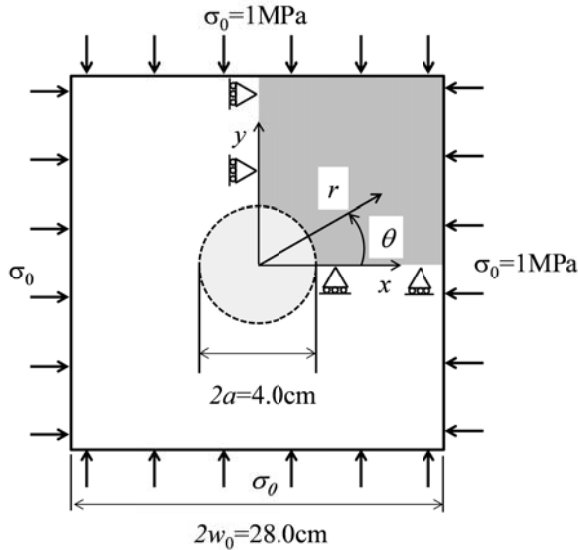
ここに、 c_p は縦波の波速である。減衰に関する項は、式(2)を次のように書き換えて用いた。

$$\ddot{u}_t = \frac{1}{m} \left(\sum f_t - \alpha \cdot \text{sgn}(\dot{u}_t) \left| \sum f_t \right| \right) \quad (23)$$

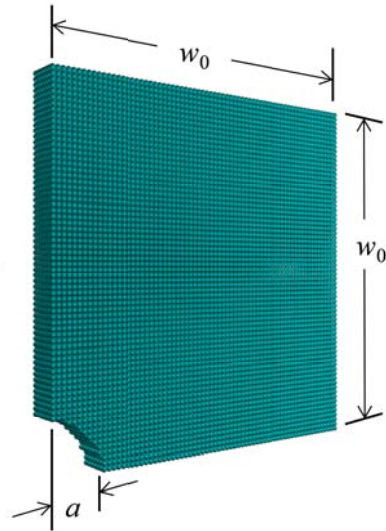
ここで、 $\alpha \cdot \text{sgn}(\beta)$ は、 α に β の符号を付与することを示す。本文の解析では、 $\alpha=0.8$ とした。

(2) 円孔モデル解析（平面ひずみ）

平面ひずみ条件の下、円孔モデルを対象として、円孔



(a) 円孔を有するモデル

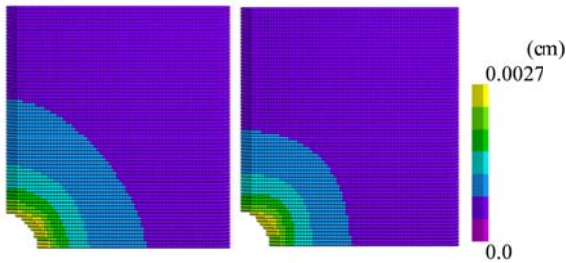


(b) 解析モデル

図-3 円孔モデル解析

表-1 接触ばね係数値と一軸圧縮解析結果

Property \ Cube	Cube-I	Cube-II	Cube-III
k_n (MN/m)	1.317	0.590	0.283
k_t (MN/m)	1.317	0.096	0.057
E/E_0	0.835	1.035	0.683
ν/ν_0	0	1.018	1.317



(a) Cube-I

(b) Cube-II

図-4 円孔モデル変位分布図

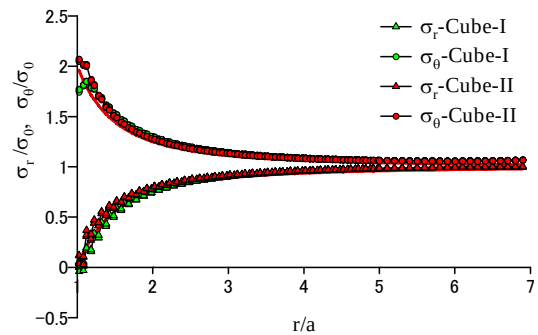


図-5 円孔モデル応力分布図

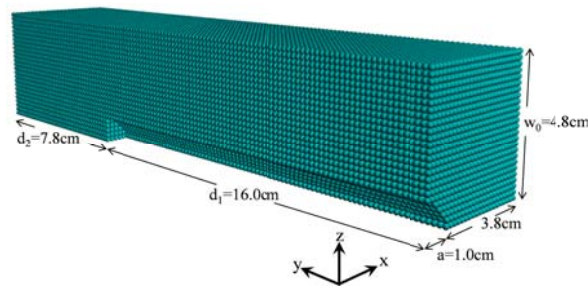
周辺の変形や応力について、格子ばね解析法による解析解と弾性理論解を比較する。

a) 解析条件と格子の連結形式

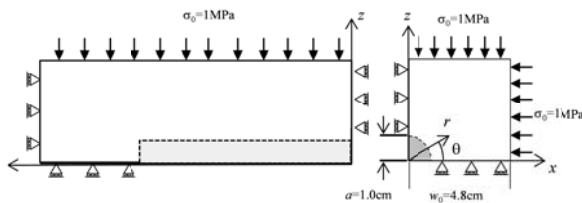
図-3に解析条件を示す。幅、高さともに28.0cmであり、中心に直径4.0cmの円孔を配置している。円孔の中心を座標原点とし、図のようにx軸、y軸を設けて、さらに、半径方向にr軸、x軸とr軸のなす角を θ とする。荷重条件は、図に示すように垂直応力 $\sigma_0=1.0\text{MPa}$ が作用している。解析モデルの作成では、対称性から図-3(a)でハッチングしている1/4領域を解析対象とし、図中のx軸およびy軸上の質点の面法線方向変位を固定とした。図-3(b)に解

析モデルを示す。質点間距離は0.2cmで配列しており、質点間は、ばねで連結している。ばねの配置は、図-2で示したCube-I、Cube-II、Cube-IIIの3種類を準備した。

これらの連結形式に対して、ヤング率 E_0 が1MPa、ポアソン比 $\nu_0=0.2$ としたときの式(21)の算出値を表-1上段に示す。 k_n はばね軸方向、 k_t はばね軸直交方向のばね係数である。円孔モデルの解析に先立って実施した一軸圧縮解析の結果を表-1下段に示す。設定値 E_0 に対して、Cube-IIで $E/E_0=1.035$ であるのに対して、Cube-I: 0.835, Cube-III: 0.683と大きな差が生じている。また、ポアソン比については、設定値 ν_0 に対して、Cube-II: $\nu/\nu_0=1.018$ となっているのに対して、Cube-III: 1.317となっている。さらに、Cube-Iでは、直交方向のみにばねが配置されており、軸方向力がその直交方向に分配されることがないため、 $\nu=0$ となっている。以上の弾性定数設定値の再現性を考慮して、円孔の解析に際しては、Cube-IとCube-IIを用いた解析のみを示すこととする。



(a)有限長円孔モデル



(b)有限長円孔モデルの解析条件

図-6 有限長円孔モデルと解析条件

b) 解析解と弾性理論解の比較

解析では、初期応力 σ_0 の荷重に対する力をばねに生じさせたのち、円孔部分を除去している。図-4に、この除去に伴う増分変位の分布を示す。円孔中心に対して同心円状の変位分布が再現されている。円孔表面位置で数値として比較すると、式(24)で求める値：0.0024cmに対して、Cube-Iで $u_r/U_r=1.09$, Cube-IIで $u_r/U_r=0.99$ となっている。

$$U_r = \frac{(1+\nu)\sigma_0}{E} \frac{a^2}{r} \quad (24)$$

なお、ここでは、掲載していないが、Cube-IIIの変位分布は、 r のみの依存する様態とはならず、 r 一定の周上で $\theta=\pi/4$ 方向に変位が大きくなる傾向がみられる。

図-5に、 x 軸上($\theta=0$)における σ_r , σ_θ の半径方向の変化を示す。横軸は円縁表面からの距離を円孔半径 a で相対化して無次元化している。この応力の算出では、図-2で示した立方体を6面体8節点要素として取扱っている。

いずれの数値解も、円孔表面付近における σ_θ の増大と σ_r の解放を表現し、円孔表面からの距離の増大とともに境界値 $\sigma_0=1\text{MPa}$ に収束していく様子が表現されている。なお、Cube-Iの結果では、円孔表面付近で、 σ_θ の減少が観察される。この理由については、今後検討する予定である。

(3) 有限長円孔モデル解析

図-6(a)に有限長円孔の解析モデルを示す。解析モデルは、対称性を利用して1/4断面を対象とし、幅4.8cm、

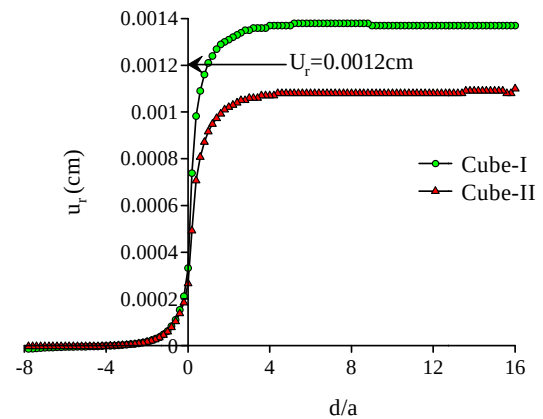


図-7 格子点 $((x,y,z)=(0,0,1.0)-(0,23.8,1.0)$ 上) の z 方向変位

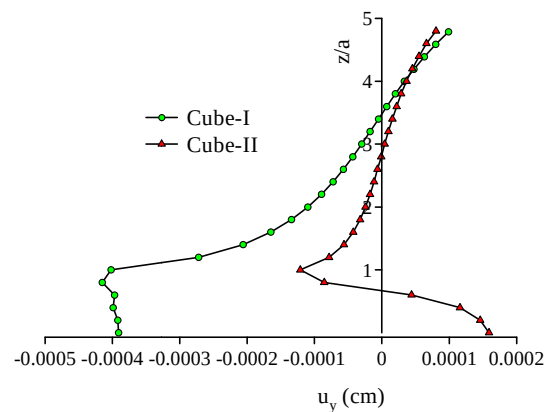


図-8 格子点 $((x,y,z)=(0,16,0)-(0,16,4.8)$ 上) の y 方向変位

高さ4.8cm、奥行き23.8cmの直方体中に、半径1cm、深さ16cmの円孔を設けている。図-6(b)に解析条件を示す。 x - y 平面および y - z 平面は面直交方向に変位固定条件を課した。荷重条件は、図に示すように、前例と同じく1.0MPaの垂直応力が作用している。与えたばね定数は、ヤング率 $E_0=1\text{MPa}$ 、ポアソン比 $\nu_0=0.2$ に対する算定値である。解析手順は、(2)と同様であり、初期応力に対する力をばねに生じさせたのち、円孔部を除去している。

図-7に、 $(x,y,z)=(0,0,1.0)-(0,23.8,1.0)$ 上に位置する格子点の z 方向変位を示す。横軸 $y/a=0$ は円孔底である。この変位は、トンネルで言えば、天端位置の内空側への変位に相当する。図より、孔底(切羽)前方でも変位が生じていること、それが、孔底付近で急激に増加したのち、孔底後方 $z/a=4$ 以降では収束している状況を確認できる。これらの収束値と、式(24)で計算される変位 $U_r=0.0012\text{cm}$ の比較は、図に示すとおりである。なお、この図の横軸 d は、円孔底からの距離である。

図-8は、 $(x, y, z)=(0, 16, 0) - (0, 16, 4.8)$ 上の点，すなわち，円孔底中心から直上方向に位置する点の円孔軸方向(y方向)変位を示している．上部では孔底後方への変位を示すが，孔底と側面の交差部($z/a=1$)付近では前方側への変位を示すこと，そして，孔底部では孔内へ変位することが表現されている．特に，孔底部分に注目すれば，Cube-IIでは，円孔中心軸に近づくほど変位が増大する傾向が観察できるが，Cube-Iでは，それは明瞭ではないことがわかる．

4. 結言

本文は，三次元格子ばね解析法による円孔モデル解析を実施し，弾性理論解との比較を行った．得られた結果を以下にまとめる．

- ・ 円孔モデルを対象とした解析では，変位・応力とも弾性理論解に近似的な解を得ることができる．
- ・ 円孔モデルを対象とした解析結果は，内空変位と比較すると理論解に対して誤差は，Cube-Iで約10%，Cube-I Iで約1%であった．

- ・ 有限長円孔モデルを対象とした解析結果は，切羽前方の先行変位や切羽後方の変位の収束を表現することができる．
- ・ ここで示した解析結果は，解析モデルを構成する連結形式の影響を受けることがある．

ここで示した解析例に検討を加えるとともに，今後，破壊とそれに伴う破断面の生成や大変形を表現した例を示す予定である．

参考文献

- 1) 西村 強，文村賢一，栢野伸也，上田 洋，河野勝宣：格子バネモデルによる弾性体の変形解析とバネ係数の決定法，第 42 回岩盤力学に関するシンポジウム講演集，土木学会，Vol.42, pp.68-73, 2014.
- 2) 桜井春輔：トンネル工事における変位計測結果の評価法，土木学会論文報告集，No.317, pp.93-100, 1982.
- 3) Barton, N., Bandis, S. and Bakhtar, K. : Strength, deformation and conductivity coupling of rock joints. *Int. J. Rock Mech. & Min. Sci. & Geomech. Abstr.* 22 (3), pp. 121-140, 1985.
- 4) 都城秋穂，久城育夫：岩石学 II，岩石の性質と分類，共立全書 205, p.171, 共立出版，1975.
- 5) 大塚 勇，青木知幸，大町達夫，伊藤 洋：数値解析に基づく切羽安定性の評価法の提案，第 36 回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集，土木学会，pp.67-72, 2007.

A NUMERICAL SIMULATION ON STRESS AND DEFORMATION AROUND CIRCULAR HOLE USING A DISTINCT ELEMENT MODELING

Kenichi FUMIMURA, Tsuyoshi NISHIMURA and Masanori KOHNO

In this paper, a relation between the spring stiffness and the elastic constants; the Young's modulus and the Poisson's ratio, is introduced to a three-dimensional distinct lattice spring method. The method is a numerical model in which the body is discretized into individual particles connected by springs. Numerical examples on the effect of a circular hole on stress distribution will be presented. The results of stresses and displacements around the hole are examined with the linear elastic solution. It can be concluded that the numerical results show a fairly good agreement to the elastic solution although the results are influenced by the lattice structure.