第 42 回岩盤力学に関するシンポジウム講演集
公益社団法人土木学会　2014 年 1 月　講演番号 13

格子バネモデルによる弾性体の変形解析とバネ係数の決定法

西村　強[1*]・文村　賢一[2]・栢野　伸也[3]・上田　洋[4]・河野　勝宣[1]

[1]鳥取大学大学院　工学研究科社会基盤工学専攻（〒680-8552 鳥取市湖山町南四丁目101）
[2]大成建設（株）（鳥取大学大学院 工学研究科社会基盤工学専攻 博士後期課程）
（〒163-0606 東京都新宿区西新宿一丁目25番1号　新宿センタービル）
[3]元鳥取大学大学院　工学研究科社会基盤工学専攻 博士前期課程
[4]鳥取大学大学院　工学研究科社会基盤工学専攻 博士前期課程
*E-mail: tnishi@cv.tottori-u.ac.jp

本文では，微小変形の仮定のもと，質点や剛体を用いた個別要素法などの離散系解析法に用いられるバネ係数を弾性定数に基づいて決定する方法と，その方法において，剛体回転量を質点間の相対変位量から除去して純粋な変形量を求める方法を記述する．具体的には，超弾性構成則を導入して弾性係数テンソルとバネ係数(k_n, k_t)の関係式を示す．ひずみの算出に際しては，剛体回転角の記述が不可欠であるが，本研究では，その記述にオイラー角を用いている．相対変位から角運動量を除去できるだけでなく，回転量を精度よく保存できる，さらには，計算量の軽減できると考えている．一軸圧縮解析と片持ちばり解析を示して，解析法と係数決定法の性能を記述する．

Key Words : *3D-distinct element-based model, spring stiffness, elasticity, micro-macro relation.*

1. 緒言

本文では，微小変形の仮定のもと，質点や剛体を用いた離散系解析法に用いられるバネ係数を弾性定数に基づいて決定する方法と，その方法において，剛体回転量を質点間の相対変位量から除去して純粋な変形量を求める方法を記述する．このような離散系解析法には，個別要素法(Distinct Element Method, DEM)[1)]，不連続変形法(Discontinuous Deformation Analysis, DDA) [2)]や格子バネ法(Lattice Spring Model, LSM)[3)]などがあるが，これらの方法では，質点，あるいは剛体間をバネで連結して，個々の要素の相対運動で解析対象の変形を表現する．特に，DEMは，剛体要素の分離と摩擦を含む接触を導入して，不連続性岩盤や粒状体の変形解析に広く用いられている．また，単に準静的な問題ばかりでなく，動的な問題にも適用されている．このような解析法の利用にあたっては，バネ係数の設定値と，解析対象の弾性定数などの材料特性との対応関係が重要である．一軸圧縮試験などの解析によって，その設定値と材料特性を結びつける報告もある[4)]．阿部[5)]は，等方弾性体に対するつり合い式にDEMにおける要素集合体の巨視的つり合い式が等価であると仮定して，法線方向バネ係数k_n，接線方向バネ係数k_tと弾性定数の関係式を誘導している．そして，その提案式では，ポアソン比$\nu>1/4$では，$k_t<0$となり計算が不安定となることを問題点として記述している．この研究よりも古くから，弾性定数と要素の初期配置に注目した研究(Walton[6)])やバネ係数比k_t/k_nに注目した研究(Richard[7)])など，離散集合体の示す巨視的弾性定数に関する研究例は報告されている．Zhaoら[8)]は，連続体を質点系連結格子で表現し，超弾性構成則に基づいて，k_n，k_tと弾性定数の関係式を誘導した後，一軸圧縮などの解析例を報告している．彼らの導いた関係式でも，$\nu>1/4$で$k_t<0$となるが，一軸圧縮解析では，質点の連結形式によっては，$\nu=0.3$における解析も可能であったと報告している．この他にも，Alassiら[9)]のDEMの係数決定に関する研究もある．いずれにしても，バネ係数と巨視的弾性定数を関連付けには，問題点が残っていることを示している．

本文でも，超弾性構成則[10)]を導入して弾性係数テンソルと(k_n, k_t)の関係式を示す．解析対象に対して質点連結系を用いてモデル化しているが，対象物体に蓄えられるひずみエネルギーを評価する代表領域について検討を加えている．ひずみの算出に際しては，剛体回転角の記述が不可欠であるが，本研究では，剛体回転角の記述にオイラー角を用いている．Zhaoらが用いた最小二乗法によ

る変位場の決定と剛体回転量の算出手順に比べ，相対変位から剛体回転分を除去できるだけでなく，回転量を精度よく保存できる，さらには，計算量の軽減などの利点があると考えている．

2. 3次元格子バネ解析法の概要

(1) 質点の運動方程式

本文で用いる3次元格子バネ解析法とは，質点をバネで連結した格子系で解析対象をモデル化し，個々の格子点の運動を追跡する数値解析法である．具体的には，**図−1**に示す質点間にバネを導入し，個々の質点に対する運動方程式を次のように書く．

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f \tag{1}$$

ここに，mは質量，cは減衰係数，fは外力である．陽形式解法を用いると，時刻tにおける加速度 $\ddot{u}_t$ は,

$$\ddot{u}_t = \frac{1}{m}\left(f_t - c\dot{u}_t - ku_t\right) \tag{2}$$

となる．ここで，Δtを微小時間増分，$\dot{u}_{t,\,av}$ を時間区間$(t, t+\Delta t)$ の質点の平均速度として，$t+\Delta t$ の変位 $u_{t+\Delta t}$ は次式で求められる．

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_{t,av} \times \Delta t \tag{3}$$

なお，$\dot{u}_{t,\,av}$ は，次のように書くことができる．

$$\dot{u}_{t\ av} = \frac{u_t - u_{t-\Delta t}}{\Delta t} + \ddot{u}_t \times \Delta t \tag{4}$$

式(4)を式(3)へ代入すると，

$$u_{t+\Delta t} = 2u_t - u_{t-\Delta t} + \ddot{u}_t \times \Delta t^2 \tag{5}$$

これより変位増分$\Delta u_t = u_{t+\Delta t} - u_t$は，次式により直前の変位増分$\Delta u_{t-\Delta t}$を用いて求めることができる．

$$\Delta u_t = \Delta u_{t-\Delta t} + \ddot{u}_t \times \Delta t^2 \tag{6}$$

以上から，既知の変位u_t，$u_{t-\Delta t}$を用いて変位増分と新位置を求められる．Δt間の加速度は一定として，

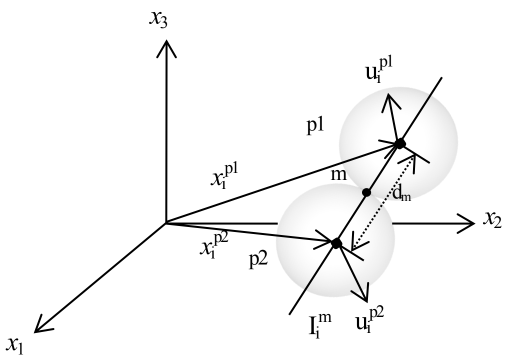
$$u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_t \times \Delta t + \ddot{u}_t \times \Delta t/2 \tag{7}$$

とすれば，時刻tにおける変位速度は，次式となる．

$$\dot{u}_t = \frac{u_t - u_{t-\Delta t}}{\Delta t} + \ddot{u}_t \times \Delta t/2 \tag{8}$$

(2) バネ係数と弾性定数の関係式

本節では，質点連結系内のバネに蓄えられるエネルギーが，対象とする弾性体内のひずみエネルギーに等しく，その勾配が材料の構成則を与える[10]として，バネ係数と弾性定数の関係式を記述する．対象とする材料が，ひずみe_{ij}と応力σ_{ij}が，0（ゼロ）の状態から，ある載荷された



図−1　解析対象内の連結格子点

状態にある．これを初期状態として，重心位置x_i (i=1, 2, 3) にある格子点pの変位u_i^pを，微小変形の仮定のもと，次のように表す．

$$u_i^p = e_{ij} x_j^p \tag{9}$$

このとき，各格子点間には法線，接線方向には相対変位($U_{(n)}$，$U_{(t)}$)が発生しており，バネには($F_{(n)}$，$F_{(t)}$)の力が生じているとして，それらを次式のように与える．

$$F_{(n)} = k_n U_{(n)},\quad F_{(t)} = k_t U_{(t)} \tag{10}$$

2つの格子点p_1とp_2（**図−1**を参照）の連結をmと表記して，法線，接線方向の相対変位を次式のように書く．

$$U_{(n)}^m = \Delta u_i^m I_i^m \tag{11}$$

$$U_{(t)i}^m = \Delta u_i^m - U_{(n)}^m I_i^m \tag{12}$$

ここに，相対変位Δu_i^mは,

$$\Delta u_i^m = u_i^{p1} - u_i^{p2} = e_{ij}\left(x_j^{p1} - x_j^{p2}\right) = e_{ij} d_m I_j^m \tag{13}$$

となる．法線方向の単位ベクトルI_i^mは次式で与えられる．

$$I_i^m = \frac{x_i^{p1} - x_i^{p2}}{d_m} \tag{14}$$

ここにd_mはp_1とp_2間のバネの長さである．連結mに関する力f_iは次式のように書くことができる．

$$f_i^m = k_n^m \Delta u_j^m I_j^m I_i^m + k_t^m\left(\Delta u_i^m - \Delta u_j^m I_j^m I_i^m\right) \tag{15}$$

あるいは,

$$f_i^m = \left(k_n^m - k_t^m\right)\left(e_{kl} I_k^m I_l^m\right) I_i^m d_m + k_t^m e_{ij} I_j^m d_m \tag{16}$$

式(16)中のダミー添字のi, j, k, lについて，総和規約が適用される．ここで，単位体積当たりのひずみエネルギーΠを次式で表す．

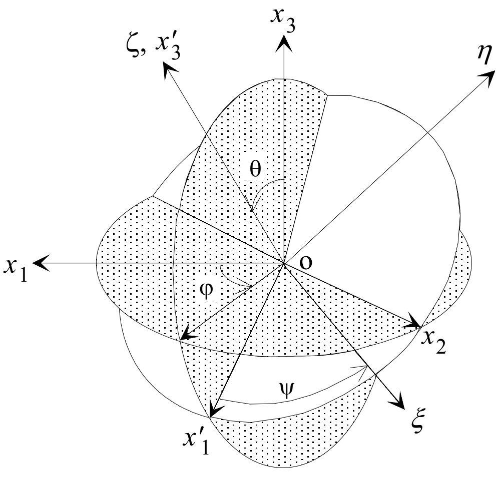


図-2 オイラー角

$$\Pi = \frac{\Pi_b}{V} = \frac{1}{V}\sum_{m=1}^{N_c}\frac{1}{2}\left(\Delta u_i^m f_j^m + \Delta u_j^m f_i^m\right)$$
$$= \frac{1}{V}\sum_{m=1}^{N_c}\frac{1}{2}\left(e_{ij} d_m I_j^m f_j^m + e_{ji} d_m I_i^m f_i^m\right) \quad (17)$$

前節の記述内容を参照して，応力σ_{ij}は，

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Pi}{\partial e_{ij}} = \frac{1}{2V}\sum_{m=1}^{N_c}\left(d_m I_i^m f_j^m + d_m I_j^m f_i^m\right) \quad (18)$$

となる．N_cは格子系内部の総連結数であり，式(18)に式(16)を代入することにより，次のように書くことができる．

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V}\sum_{m=1}^{N_c}\left(\frac{1}{2}\left(k_t^m e_{jl} I_l^m I_i^m d_m{}^2 + k_t^m e_{il} I_l^m I_j^m d_m{}^2\right)\right.$$
$$\left. + \left(k_n^m - k_t^m\right) e_{kl} I_i^m I_j^m I_k^m I_l^m d_m{}^2\right) \quad (19)$$

弾性係数テンソルC_{ijkl}は，

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (20)$$

と表現できることから，式(20)に式(21)を代入することにより，C_{ijkl}は次のように与えられる．

$$C_{ijkl} = \frac{1}{V}\sum_{m=1}^{N_c}\left[\frac{k_t^m d_m{}^2}{4}\left(I_j^m I_k^m \delta_{il} + I_i^m I_k^m \delta_{jl} + I_j^m I_l^m \delta_{ik} + I_i^m I_l^m \delta_{jk}\right)\right.$$
$$\left. + \left(k_n^m - k_t^m\right) d_m{}^2 I_i^m I_j^m I_k^m I_l^m\right] \quad (21)$$

ここに，δ_{ij}はクロネッカーのデルタである．そして，ラメの定数 (λ, μ) を用いるとき，例えば，$C_{1111}=C_{2222}=C_{3333}=\lambda+2\mu$，$C_{1122}=C_{2211}=\lambda$，$C_{1212}=C_{2121}=\mu$であることから，弾性定数とバネ係数とが関連付けられる．

(3) 剛体回転とひずみ

式(13)において，2点間相対変位からひずみを求めるとき，剛体回転成分を除去する必要がある．連続体内の立方体ブロックに注目して，そのブロック内の変位を次式で書く．なお，以下では，x_1-x，x_2-y，x_3-zと対応させる．

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (22)$$

これを，**図-1**のp_1, p_2を中心とするブロックに適用して，各座標成分ごとに差を求めると次式が得られる．

$$\begin{pmatrix} \Delta u_1^m \\ \Delta u_2^m \\ \Delta u_3^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x^{p1} - u_x^{p2} \\ u_y^{p1} - u_y^{p2} \\ u_z^{p1} - u_z^{p2} \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} 0 & z^{p1} - z^{p2} & -\left(y^{p1} - y^{p2}\right) \\ -\left(z^{p1} - z^{p2}\right) & 0 & x^{p1} - x^{p2} \\ y^{p1} - y^{p2} & -\left(x^{p1} - x^{p2}\right) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$
$$(23)$$

ここに，

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right), \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right), \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

で，式(23)の右辺第2項が剛体回転に起因する量である．Zhaoらは，既知の格子点変位に対して最小二乗法を利用して，式(22)中の係数値を求めた後，$(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$を算出している．本研究では，**図-2**に示すオイラー角(θ, φ, ψ)を導入している．これにより1つの格子点（質点）は，3個の座標成分と併せて計6の自由度を有することになる．まず，各格子点位置における剛体回転角は，その点が代表する領域の体積と同一体積を有する球の回転として次式により求める．

$$I_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} - \left(I_\eta - I_\zeta\right)\omega_\eta \omega_\zeta = N_\xi$$
$$I_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} - \left(I_\zeta - I_\xi\right)\omega_\zeta \omega_\xi = N_\eta \quad (24)$$
$$I_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} - \left(I_\xi - I_\eta\right)\omega_\xi \omega_\eta = N_\zeta$$

ここに，(I_ξ, I_η, I_ζ)，$(\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)$，$(N_\xi, N_\eta, N_\zeta)$,は，慣性主軸$(\xi, \eta, \zeta)$に関するそれぞれ慣性モーメント，角速度ならびに力のモーメントである．(N_ξ, N_η, N_ζ),の計算においては，球中心から作用線までの距離を$d_m/2$としている．$(\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta) \rightarrow (\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}) \rightarrow (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$の変換過程の記述は，文献[11]に譲る．なお，$(\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)$ - $(\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi})$ 関係には特異性が存在するが，後節で述べる片持ちばりの解析では，**図-2**の$x_3(z)$軸とζ軸を一致させる条件$(\theta=0)$を課したx_1-x_2平面内の運動で表現できる変形問題の解析に留めている．

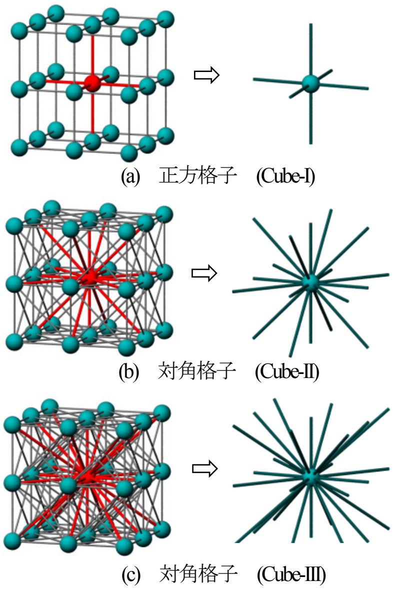


図-3　質点連結格子モデル

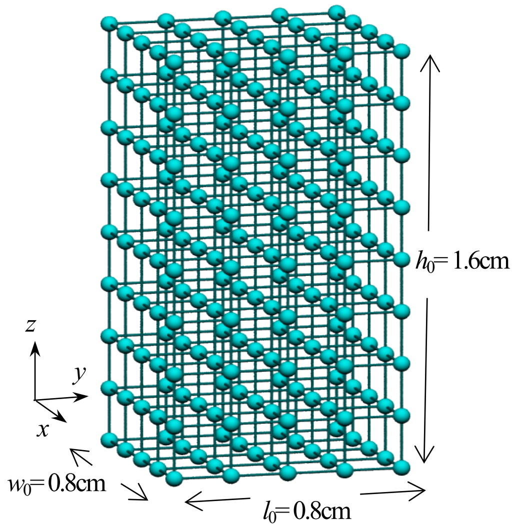


図-4　一軸圧縮解析モデル(Cube I)

表-1　接触バネ係数値と一軸圧縮解析結果

Property ＼ Cube	Cube-I	Cube-II	Cube-III
k_n (MN/m)	1.340	0.605	0.345
k_t (MN/m)	1.340	0.134	0.129
E/E_0	0.942	1.151	1.030
ν/ν_0	0	1.067	1.089

(注：E/E_0, ν/ν_0は，u_z/h_0=0.02 における計算値)

上記のように剛体回転を各格子点位置で求めた後，

$$\omega_x = \left(\omega_x^{p1} + \omega_x^{p2}\right)/2 \tag{25}$$

として式(23)に用いた．この手法では格子点座標において剛性回転を境界条件として与えることが可能である．

3. 解析例

(1) 格子モデルと解析条件

図-3に示す一辺d_mの立方体を質点—バネ連結系の最小単位として，一軸圧縮や片持ちばりの変形解析で用いる．弾性定数—バネ係数の関係を表す式(21)を用いて求められる(k_n, k_t)に対して，式(2)-(6)の数値解が式(1)の解を表現することを保証する条件として次式を用いた[12]．

$$\Delta t < \min\left(\frac{d_m}{c_p}\right) \tag{26}$$

ここに，c_pは縦波の波速である．減衰に関する項は，式(2)を次式のように書き換えて用いた．

$$\ddot{u}_t = \frac{1}{m}\left(\sum f_t - sign(\alpha, \dot{u}_t)\left|\sum f_t\right|\right) \tag{27}$$

ここに，$sign(a, b)$は，aの絶対値にbの符号を付与することを示す．本文の解析では，α=0.8とした．

(2) 一軸圧縮モデルの解析

図-4に示す一辺w_0=0.8cm(=l_0)の正方形断面を有し，高さh_0=1.6cmの直方体を一軸圧縮モデルとする．なお，ここでは，最縁部の質点間距離として，断面の一辺ならびに高さを表示している．総質点数225個であり，下面(z=0)の質点にz方向固定の条件を与えて，上面(z=1.6cm)の質点にΔt=1.0×10^{-7} secあたりΔu_z=−1.0×10^{-8}cmの強制変位増分を与えて一軸圧縮状態とする．質点を連結するバネは**図-3** (a)のCube-Iを用いるとき，d_1 = 0.2cmのみで560本，**図-3** (b)のCube-IIでは，$d_2 = \sqrt{2}$ / 5cmを928本加えて計1488本で，**図-3** (c)のCube-IIIでは，さらに $d_3 = \sqrt{3}$ / 5cmを512本加えて計2000本で，それぞれ作成している．この解析で仮定したヤング率E_0=1112MPa，ポアソン比ν_0＝0.18に対する式(21)による(k_n, k_t)の算定値を**表-1**にまとめる．

一軸圧縮解析において，上面変位がu_z/h_0=0.02となったときのヤング率，ポアソン比の計算結果を**表-1**に併記した．ヤング率の仮定値E_0に対して，Cube-Iで，-6%，Cube-IIで+15%程の値となっている．ポアソン比は，ν_0に対してCube-IIとCube-IIIでは+6~9%の値を得ているが，Cube Iでは，載荷軸方向とその直交方向のみにバネを配置しているため，当然のことながら，軸方向圧縮力がその直交方向へ分配されることは無く，ν=0となっている．

(3) 片持ちばりの解析

図-5に片持ちばり解析モデルを示す．1辺w_0=1.8cm(=h_0)の正方形断面を有する長さl_0=7.8cmの直方体の解析領域

として用いる．質点総数4000個であり，バネ総本数は，Cube-I: 11100本，Cube-II: 31620本，Cube-III: 44256本である．境界条件は，y=0面上の格子点について，x, y, zの3方向の変位固定(u_x=u_y=u_z=0)と剛体回転固定(ω_x=ω_y=ω_z=0)の条件を課し，他端においてx方向荷重P_x=9.8Nを作用させた．

図-6は，変位分布図を描いたものである．図(a)では，x方向変位が固定端からの距離とともに大きくなる様子を，図(b)では，y方向変位が中立軸を挟んでバネの引張と圧縮変形の様子を観察できる．**図-7**に，荷重載荷前に(x, y, z)=(0.8, 0, 1.0) - (0.8, 7.8, 1.0)の線上に存在する質点のx方向変位を示した．これは，片持ちばりのたわみ曲線にも相当するものであるので，理論曲線との比較も示した．3種の格子の結果は，Cube-Iによる結果が理論曲線に近いことがわかる．荷重作用点での自由端のx方向変位に注

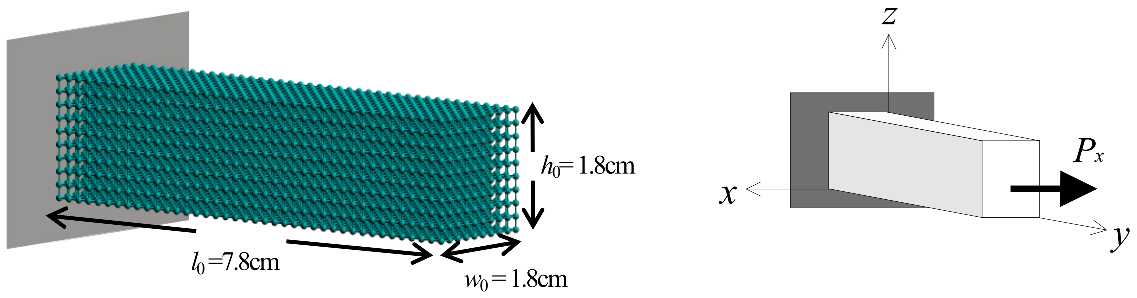


図-5　片持ちばり解析モデル(Cube-I)と境界条件

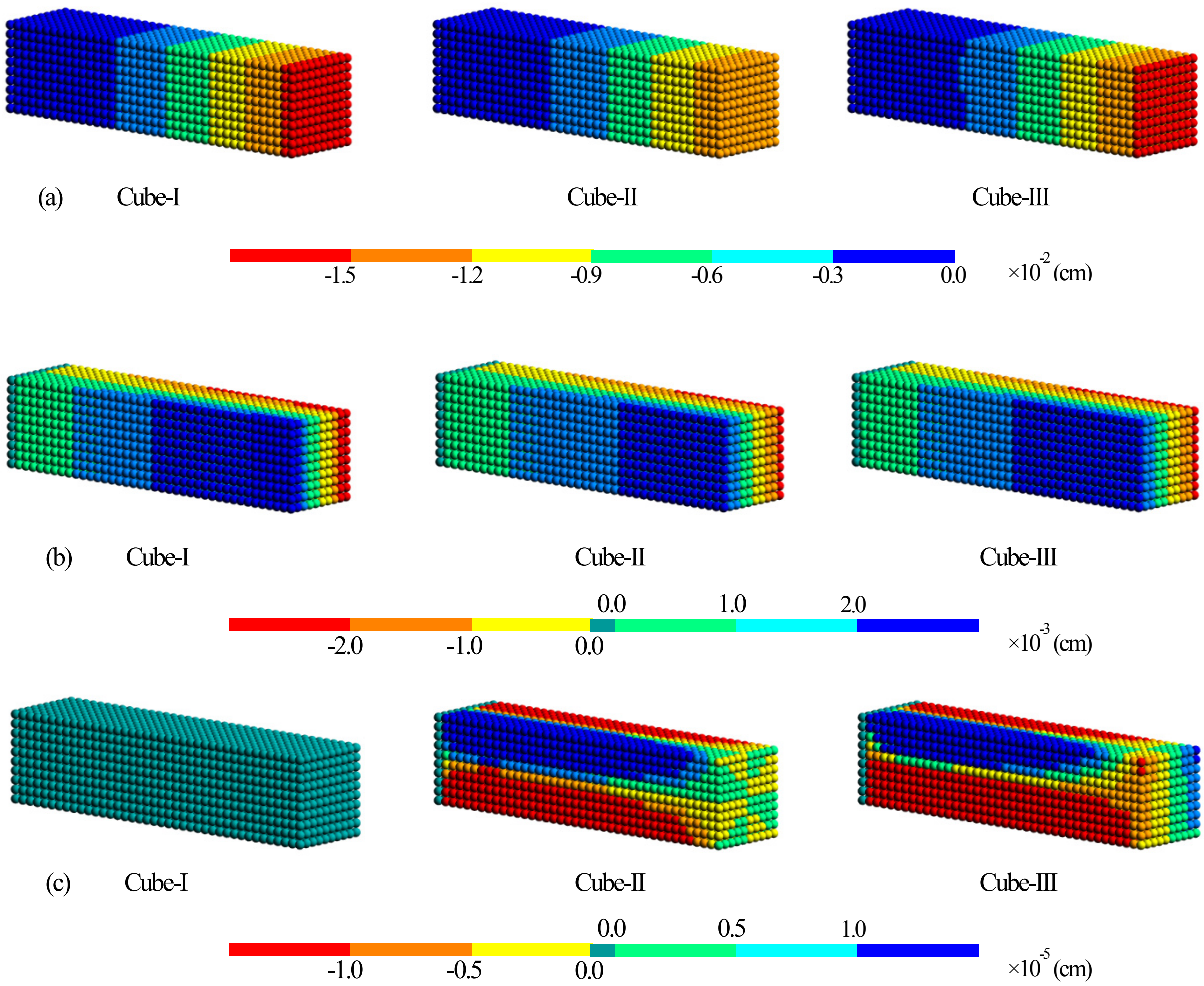


図-6　片持ちばり解析モデルの変位分布図　(a)x方向，(b)y方向，(c)z方向

目すれば，理論計算値$U_{x|y=7.8}$=0.0159cmに対して，Cube-I: $u_{x|y=7.8}$=0.0159cm, Cube-II: $u_{x|y=7.8}$=0.0140cm ， Cube-III: $u_{x|y=7.8}$=0.0151cmであり，最も差の大きいCube-IIで，$u_{x|y=7.8}/U_{x|y=7.8}$= 0.881となっている．

4. 結言

本文では，質点や剛体を用いた離散系解析法に用いられるバネ係数を弾性定数に基づいて決定することに対して，微小変形の仮定のもと，超弾性構成則を利用して関係式を誘導した．解析値の設定値に対する差は，解析に用いた3種類の格子において異なっており，一軸圧縮モデルの結果であるヤング率で約15%，ポアソン比で約9%の差が，さらに，片持ちばりのたわみ量では約12%の差が生じる例があった．ポアソン比に関するCube-Iの結果は，斜方向の連結が不可欠であることを示すものと思われるが，本手順の解析結果が格子の組み方に依存していることを示しているとも言える．また，緒言に述べたν>0.25に対する解析など手つかずの点もある．これらのことを課題として解析法の改良や岩石やコンクリートなど実材料の解析などを行う予定である．

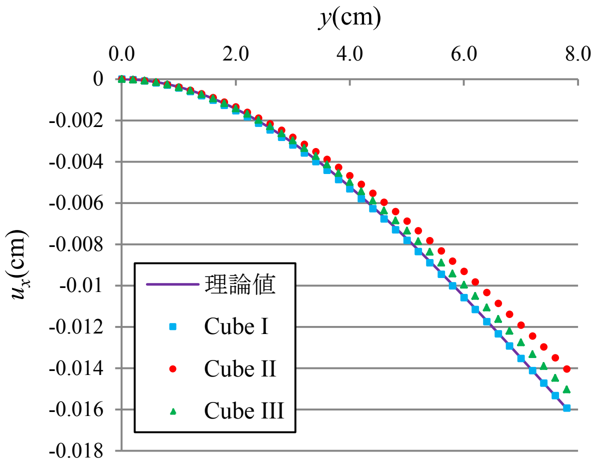


図-7 (x, y, z)=(0.8, 0, 1.0) - (0.8, 7.8, 1.0)線上格子点の x 方向変位

参考文献

1) Cundall, P. A.: A computer model for simulating progressive, large-scale movements in blocky rock systems, *Symposium on rock mechanics*, Nancy, Vol.2, pp.129-136, 1971.
2) Shi, G. H. & Goodman, R. E.: Generalization of two dimensional discontinuous deformation analysis for forward modeling, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.13, pp.359-380, 1989.
3) Ostoja-Starzewski M. : Lattice models in micromechanics, *Applied Mechanics Reviews*,Vol. 55, No.1, pp. 35-59, 2002.
4) Potyondy D. O & Cundall P. A. : Abonded-particle model for rock, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol.41, No8, pp.1329-1364, 2004.
5) 阿部和久：個別要素法による連続体解析におけるバネ定数の設定，土木学会論文集，No.543，pp.83-90，1996.
6) Walton, K. :The effective elastic moduli of a random of spheres, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.35. No.2, pp.213-226, 1987.
7) Richard, J. B. & Leo, R. :Note on a random isotropic granular material with negative poission's ratio, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 26, No. 4, pp. 373-383, 1988.
8) Zhao G.F, Fang, J & Zhao, J: A3D distinct lattice spring model for elasticity and dynamic failure, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* , Vol.35, No. 8, pp. 859-885, 2011.
9) Alassi H.T. & Holt R.: Relating discrete element method parameters to rock properties using classical and micropolar elasticity theories, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.36, No. 10, pp. 1350-1367, 2012.
10)京谷孝史：よくわかる連続体力学ノート，非線形 CAE 協会，pp. 214-217，2008.
11)坂田　勝：工学力学，共立出版，pp.79-82,1977.
12) 土木学会編：土木学会編：動的解析と耐震設計【第2巻】動的解析の方法，p22, 1989.

SPRING STIFFNESS FORMULATION OF DISTINCT ELEMENT-BASED METHOD FOR MODELING OF ELASTIC CONTINUA

Tsuyoshi NISHIMURA, Kenichi FUMIMURA, Shinya KAYANO, Hiroshi UEDA and Masanori KOHNO

A micro-macro and continuum-discontinuum coupled model and corresponding computer codes will be developed for the study of static and dynamic behaviors of rocks. In this paper, the focus is pointed towards deriving relations between micromechanical parameters of particles linked by springs and the effective elastic properties, such as Young's modulus and Poisson's ratio. The local strains are evaluated by the relative normal and shear displacement vectors between particles. It is known that the rigid rotation should not produce strain energy. Therefore, in this method, the rotation related term is expressed with the Euler angle and is removed from the calculation of the relative shear displacement vector.