

# 不連続変形法 (DDA) による三次元落石解析の 計算精度要因とモデル化の検討

佐々木猛<sup>1\*</sup>・萩原育夫<sup>1</sup>・三木茂<sup>2</sup>・大西有三<sup>3</sup>  
西山哲<sup>4</sup>・小山倫史<sup>4</sup>

<sup>1</sup>サンコーコンサルタント (株) (〒136-8522 東京都江東区亀戸1-8-9)

<sup>2</sup>基礎地盤コンサルタンツ (株) (〒136-8577 東京都江東区亀戸1-5-7)

<sup>3</sup>京都大学 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

<sup>4</sup>京都大学大学院工学研究科 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)

\*E-mail: sasakit@suncoh.co.jp

本研究では、三次元不連続変形法(3D-DDA, Shi, 2001)を用いて、落石解析をする際の計算精度要因とモデル化の影響を検討し、長大で広域な斜面上を崩落する落石現象が解析可能な手法を開発した。不連続変形法を用いた落石解析では、斜面ブロックと落石ブロックの面積比 (二次元) や体積比 (三次元) がある一定以上になると、運動方程式の定式化上の有効桁が不足し、正しい結果が求まらない場合がある。特に三次元モデルでは、斜面ブロックと落石の体積比が辺の3乗の関数になるため、問題が顕著になる。著者らはこの問題を解決するため、三次元DDAにおける計算精度要因を分析し、弾性体と剛体ブロックを混合した三次元DDA解析モデルを開発した。

**Key Words :** three dimensional DDA, rock fall analysis, precision of the analysis, modeling

## 1. はじめに

著者らは、これまで二次元<sup>1)</sup>および三次元<sup>2)</sup>の不連続変形法を用いて落石解析を進めてきた<sup>3,4)</sup>。落石解析の特徴は、地山側と落石側のブロックの面積比 (二次元) や体積比 (三次元) が極端に大きくなるのが通常である。このため、剛性マトリックの重ね合わせ時に小さなブロック (落石側) の剛性が桁落ちし、正しい結果が求まらない場合がある。これらの現象を数値的に回避するための方策として、地山側のブロックを細分化し、出来るだけ落石ブロックとの面積比 (二次元) や体積比 (三次元) を小さくしている。また、これに加えて、地山ブロックが大きな場合には、地山ブロックが長周期の弾性振動を起し、連立方程式の収束が悪くなり、場合により発散して正しい答えが求まらない場合もある。さらに三次元解析では、任意多面体で構成されるブロックの体積や慣性モーメントを求めるための数値積分、接触面の探索や貫入計算に常にブロック面の方向余弦の計算が必要となり、このことが収束性の悪化や計算時間の長大化を招き、実用性を阻害する原因にもなっている。本研究では、これらの要因を分析し、地山ブロックを剛体、落石ブロックを弾性体として剛体と弾性体の混合計算をすることに

より数値不安定性を回避し、解析精度の向上や地山ブロックの積分を省略するなど計算速度の短縮化を図った。

## 2. 三次元不連続変形法の概要

### (1) 全体運動方程式

動的大変形解析の弾性体ブロックの接触を含む運動方程式を統一的に表現すると二次元解析の場合と同様に、系全体のポテンシャルエネルギー  $\Pi^{sys}$  は式(1)で表わされる<sup>3)</sup>。

$$\Pi^{sys} = \sum_{i=1}^n \Pi^{(block)i} = \sum_{i=1}^n \left( \Pi^i + \sum_{j=1}^m \Pi_{pL}^{i,j} \right) \quad (1)$$

式(1)の右辺第1項は各ブロックの連続体としてのポテンシャルエネルギーであり、第2項はブロック  $i$  のブロック  $j$  に対する接触のポテンシャルエネルギーである。第1項は式(2)で表される。

$$\Pi^i = \int_V \frac{\rho^c}{\rho} \left[ \tau_{ij}^* \delta D_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \delta (2 D_{ik} D_{kj} - v_{k,i} v_{k,j}) \right] dV - \int_{\Gamma} \bar{t} \cdot u d\Gamma - \int_V [\rho(\dot{b} - \ddot{u}) - c\dot{u}] \cdot dV \quad (2)$$

式(2)の第1項は速度場のひずみエネルギー、第2項は表面摩擦エネルギーであり、第3項は慣性力及び減衰力

によるエネルギーである。ここに、 $\ddot{u}$ :加速度、 $\dot{u}$ :速度、 $\rho^0$ :変形前の体積、 $\rho^c$ :変形後の体積、 $\rho$ :質量、 $b$ :物体力、 $c$ :減衰定数、 $\bar{t}$ :表面摩擦力、 $V$ :ブロックの体積、 $\Gamma$ :ブロックの表面積である。

式(1)の右辺第2項は不連続面の接触のポテンシャルエネルギーを表し、DDAの場合はペナルティを用い、二次形式で以下のように評価される。

$$\Pi_{PL}^{ij} = \frac{1}{2} k_N [(u^j - u^i) \cdot n]^2 - \frac{1}{2} k_T [u_T^j - u_T^i]^2 \quad (3)$$

ここに、 $k_N$ :法線方向のペナルティ係数、 $k_T$ :接線方向のペナルティ係数、 $(u^j - u^i) \cdot n$ :法線方向の貫入量、 $u_T$ :せん断方向のスベリ量、 $n$ :接触面の方向余弦である。

## (2) 数値積分

式(1)の運動方程式は、Newmarkの $\beta$ 、 $\gamma$ 法で、 $\beta=0.5$ 、 $\gamma=1.0$ とし、これを増分変位に対する連立方程式の式(4)を各時間刻みで解くことにより得られる。

$$\tilde{K} \cdot \Delta u = \tilde{F} \quad (4)$$

$$\tilde{K} = \frac{2}{\Delta t^2} M + \frac{1}{\Delta t} C + \frac{\rho^c}{\rho^0} [K_e + K_s] \quad (5)$$

$$\tilde{F} = \frac{2}{\Delta t} M \cdot \dot{u} + (\Delta F - \sum \int \sigma dv) - M \alpha(t) \quad (6)$$

ここに、 $\Delta u$ :増分変位、 $M$ :質量マトリックス、 $C$ :減衰マトリックス、 $\dot{u}$ :ブロック重心速度、 $u$ :ブロック重心の剛体変位、剛体回転、ひずみ、 $\rho^0$ :変形前の体積、 $\rho^c$ :変形後の体積、 $K_e$ :線形項の剛性マトリックス、 $K_s$ :剛体回転に伴う初期応力マトリックス、 $\alpha(t)$ :地震加速度の時刻歴である。

## (3) 連立方程式の誤差

式(4)で誤差を考慮した式は<sup>9)</sup>

$$(\tilde{K} + \delta\tilde{K})(\Delta u + \delta\Delta u) = \tilde{F} \quad (7)$$

この場合、

$$\|\tilde{K}^{-1}\| \cdot \|\delta\tilde{K}\| \leq 1 \quad (8)$$

と仮定すれば $\tilde{K}$ の逆行列が存在し、誤差 $\delta\tilde{K}$ が $\tilde{K}$ の値を超えない条件で成立し、次の誤差評価式が得られる。

ここに、 $\|\cdot\|$ :マトリックスの二乗ノルムである。

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|\tilde{K}^{-1} \delta\tilde{K}\|}{1 - \|\tilde{K}^{-1} \delta\tilde{K}\|} \leq \frac{\|\tilde{K}^{-1}\| \cdot \|\delta\tilde{K}\|}{1 - \|\tilde{K}^{-1}\| \cdot \|\delta\tilde{K}\|} \quad (9)$$

ここで条件数(condition number)  $Cond$ を次のように定義する。

$$C_{ond} = Cond[\tilde{K}] = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \quad (10)$$

ここに、 $\lambda_{max}$ :最大固有値、 $\lambda_{min}$ :最小固有値である。

したがって、式(9)は

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{C_{ond} \|\delta\tilde{K}\| / \|\tilde{K}\|}{1 - C_{ond} \|\delta\tilde{K}\| / \|\tilde{K}\|} \quad (11)$$

と表わされる。

次に得られた解の有効桁 $\rho$ は次式で表わされる。

$$\rho = \log_{10} \|x\| - \log_{10} \|\delta x\| \quad (12)$$

マトリックスが悪条件(ill condition)の場合、式(9)の右辺を

$$1 - \|\tilde{K}^{-1}\| \cdot \|\delta\tilde{K}\| \approx 1 \quad (13)$$

と仮定すると、式(12)は

$$\begin{aligned} \rho &= \log_{10} \frac{\|x\|}{\|\delta x\|} = \log_{10} \frac{1}{C_{ond} \|\delta\tilde{K}\| / \|\tilde{K}\|} \\ &= \log_{10} \frac{1}{\|\delta\tilde{K}\| / \|\tilde{K}\|} - \log_{10} C_{ond} \\ &\approx g - \log_{10} C_{ond} \end{aligned} \quad (14)$$

と表わすことができる。ここに、 $g$ は計算機の有効桁である。

式(14)に更にマトリックスの自由度による桁落ちの項を加えると、最終的に有効桁は以下のように表わせる。

$$\rho \approx g - \log_{10} C_{ond} - \log_{10} N d e g r e e \quad (15)$$

ここに、 $N d e g r e e$ :連立方程式の自由度である。

## (4) DDAにおける落石問題の剛性マトリックスの性質

三次元DDAの場合、式(5)の剛性マトリックスは具体的に次式で表わされる。

$$\tilde{K} = \left( \frac{2M}{\Delta t^2} + \frac{C}{\Delta t} \right) \iiint [T_i]^T [T_i] dx dy dz + V [E_i] + p [K_{ii}] \quad (16)$$

式(16)の右辺第1項はブロックの質量マトリックスおよび粘性減衰マトリックスで、ブロックの体積、断面二次モーメントを時間刻み $\Delta t$ の二乗および $\Delta t$ で除したものである。このオーダーは一般に $\Delta t$ を例えば0.001とすると、ブロックの体積に $10^6$ を乗じた値になる。

第2項は弾性係数にブロックの体積を乗じたものである。第3項はブロックの接触マトリックスで接触面積、貫入量にペナルティを乗じたものである。

地山と落石の連立方程式は次式で表わされる。

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta F_i \\ \Delta F_j \end{Bmatrix} \quad (17)$$

ここに、添え字 $i$ は地山、 $j$ は落石を表わすものとする。これらを分解すると、地山ブロックの変形は

$$\{\Delta u_i\} = [K_{ii}]^{-1} \left( \frac{2M}{\Delta t} \{\dot{u}\} + (\Delta F_i - \int \sigma dv) - \frac{pV_i}{A} \{E_k\} - [K_{ij}] \{\Delta u_j\} \right) \quad (18)$$

で表わされる。式(18)右辺括弧内の第1項は地山ブロックの速度、第2項は地山ブロックの変形による外力と内力の釣合、第3項は地山ブロックの接触変形による等価外力、第4項は落石ブロックの変形による接触外力である。同様に、落石ブロックの変形は次式で表わされる。

$$\{\Delta u_j\} = [K_{jj}]^{-1} \left( \frac{2M}{\Delta t} \{\dot{u}\} + (\Delta F_j - \int \sigma dv) - \frac{pV_j}{A} \{G_k\} - [K_{ij}] \{\Delta u_i\} \right) \quad (19)$$

式(19)右辺括弧内の第1項は落石ブロックの速度、第2項は落石ブロックの変形による外力と内力の釣合、第3項は落石ブロックの接触変形による等価外力、第4項は地山ブロックの変形による接触外力である。

式(16)では、大きな体積を持つ地山ブロックでは、質量マトリックスが卓越し、剛性マトリックスと接触マトリックスが桁落ちする。式(18)の地山ブロックの釣合式では、剛性マトリックスと接触マトリックスの桁落ちした逆行列を用いるため、正しい解が得られないか、振動を繰り返すことが多い。また、式(19)の落石ブロックでは、外力項に地山ブロックの変形が関係しているため、誤差が混入し、正しい答えが得られないことがある。

これらの概略の条件数は地山ブロックと落石ブロックの体積比で推定することができる。

$$Cond \approx \frac{V_i (\text{地山ブロックの体積})}{V_j (\text{落石ブロックの体積})} \quad (20)$$

島内ら<sup>9)</sup>の研究によれば二次元の場合、地山ブロックと落石ブロックの面積比が100以上の場合、収束が悪く正しい解が得られない場合があることが知られている。

これらの本質的な対策は、式(16)の剛性マトリックスの重ね合わせ時の桁落ちを極力少なくすることである。そのため、以下の対策が考えられる。

- 地山ブロックを細分化して落石ブロックの体積比を可能な限り1に近づける。
- 大きなペナルティ係数を使う。しかし、ペナルティ係数が弾性係数の1000倍を超えると別の桁落ちにより発散することが知られている。
- 地山ブロックの自重を零にして、地山ブロックの変形を出来る限り小さくする。
- 地山ブロックの変形を無視(剛体)し、落石ブロックのみを弾性体として解く。
- 接触機構の解析にAugmented Lagrangian法<sup>6)</sup>などを導入し、接触の不釣り合い力を外力として調整する。今回は、長大な斜面の落石を精度良く解くため、a)とd)

の対策を組み合わせ用いた。

### 3. 解析モデルと結果

前章で述べた課題と解決法を確認するため、著者らがこれまで二次元解析で実施した3地点の三次元解析を行った。

#### (1) Aサイト簡便モデル

本サイトは新第三期に堆積した泥岩斜面で2004年の中越地震で大規模な斜面崩壊が発生した<sup>7)</sup>。図-1は斜面の一部を簡便化し、寒色系が地山を模擬した固定ブロック、暖色系が崩落斜面を示している。当該斜面の崩落量は約50万m<sup>3</sup>と推定され、地表から約30m程度の深さに存在し

表-1 Aサイト簡便モデル解析パラメータ

項目	
弾性係数	2 GPa
ポアソン比	0.3
単位体積重量	22.0 kN/m <sup>3</sup>
摩擦角	30°
粘着力	0
ペナルティ係数 $k_n$	2 GPa/m
ペナルティ係数 $k_s$	0.2 GPa/m
時間刻み	0.0005 sec
粘性減衰係数 $c$	0.02
接触減衰係数 $\eta_p$	0.1
落石寸法(A-1),個数26	25m×20m×10m
落石寸法(A-2),個数75	5m×5m×5m
計算ステップ数	30000
計算時間(Intel Xeon)	A-1(10 min), A-2(30 min)

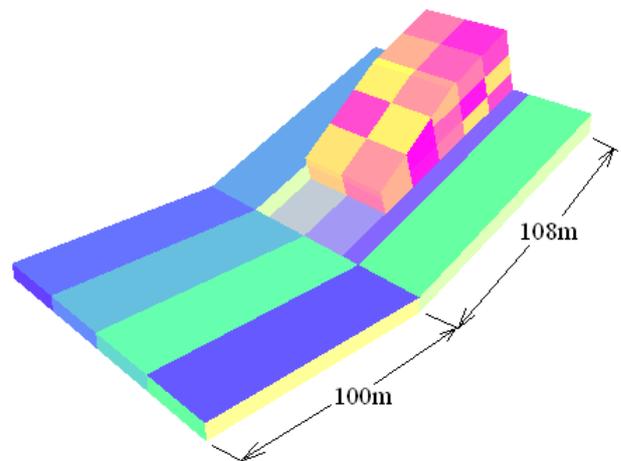


図-1 Aサイト簡便モデル(A-1, 個数26)

た砂岩層をすべり面として崩落している。斜面の勾配は約22度である。実際の崩落斜面のブロックの寸法は平均約5m×5m×5mが中心であった。ブロックサイズの崩落影響現象への影響をみるため、落石寸法を25m×20m×10m (A-1, 26個)と5m×5m×5m(A-2, 75個)の二つのモデルを比較した。表-1は計算に用いたパラメータを示す。図-2は簡便モデル(A-1)の結果である。図-3は簡便モデル(A-2)を示し、図-4はその計算結果である。

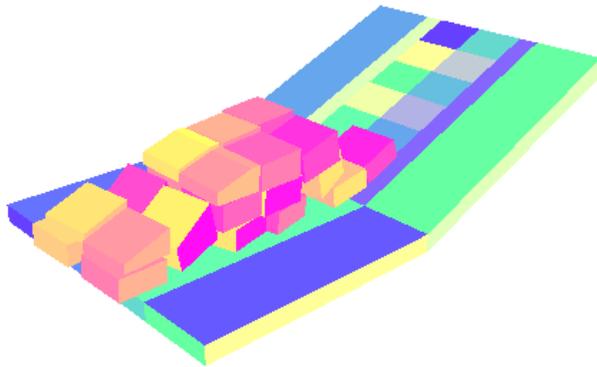


図-2 Aサイト簡便モデル(A-1)結果(15秒後)

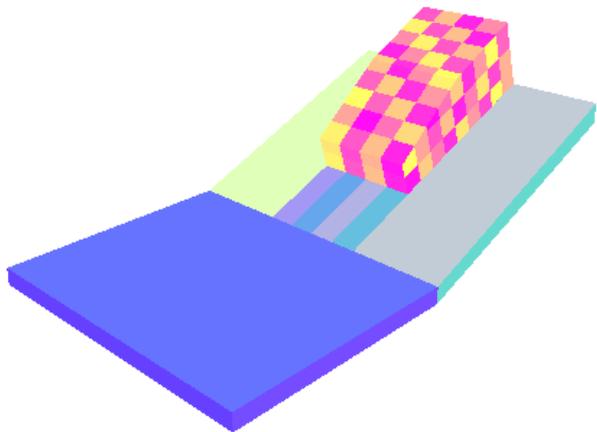


図-3 Aサイト簡便モデル(A-2, 個数75)

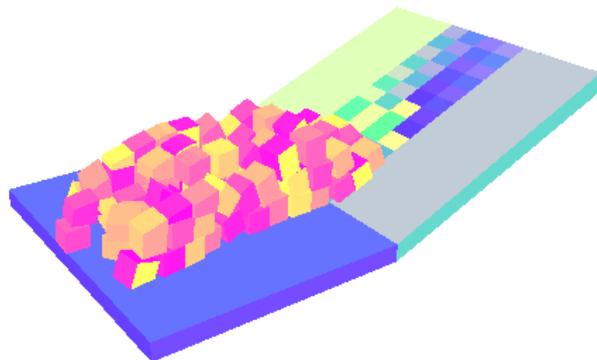


図-4 Aサイト簡便モデル(A-2)結果(15秒後)

これらと比較すると、落石の停止位置は落石寸法が実際に近いモデル(A-2)がややモデル(A-1)より短くなっており、その崩落形状も実際に近い。これらの計算時間は概ねブロックの個数に比例的である。

## (2) Bサイトモデル

図-5はBサイトの解析領域(青線部)と標高を示す。当該斜面は、溶結凝灰岩台地の縁部で降雨により約1万m<sup>3</sup>が崩落している。図中赤線は二次元解析を行った断面を示す<sup>1)</sup>。地山ブロックは接触検索の計算時間を節約する都合で7個に分割した。写真-1は崩落後の航空写真で平均寸法2.5m×2.5m×3mの落石が数10個斜面中央から端部にかけて分布している。表-2はBサイトモデルの解析パラメータを示す。

物性は概ねAサイトモデルと同じである。図-6はBサイトの三次元モデルを示す。斜面は上半部が比高約160mで傾斜が約40度の急こう配となっている。斜面下半部は傾斜が約10度前後の緩斜面となっている。落石個数は実際の状況に合うように斜面上部から2列で計72個とした。

図-7はBサイトモデルの解析結果(30秒後)を示す。落石の最終的な分布状況は概ね実際の整合性を説明できる。本モデルでの二次元解析<sup>8)</sup>との比較では、落石の到達距離では二次元解析の結果が三次元解析の結果より側方運動無視のため約10%程度長くなることが分かった。

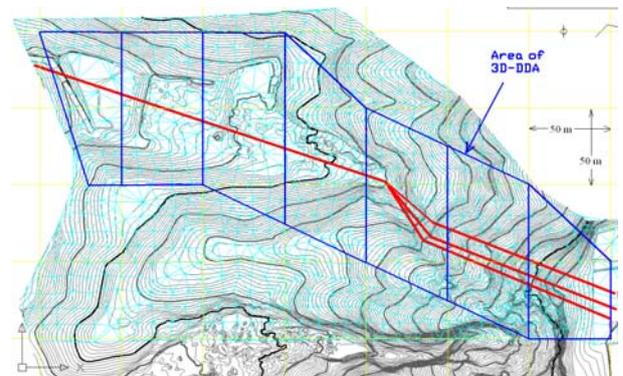


図-5 Bサイト解析領域と標高



写真-1 Bサイト航空写真

表-2 Bサイトモデル解析パラメータ

項目	
弾性係数	2 GPa
ポアソン比	0.3
単位体積重量	22.0 kN/m <sup>3</sup>
摩擦角	30°
粘着力	0
ペナルティ係数 $k_n$	2 GPa/m
ペナルティ係数 $k_s$	0.2 GPa/m
時間刻み	0.0005 sec
粘性減衰係数 $c$	0.02
接触減衰係数 $\eta_p$	0.1
落石寸法	2.5m×2.5m×3m
落石個数	72
計算ステップ数	60000
計算時間(Intel Xeon)	90 min

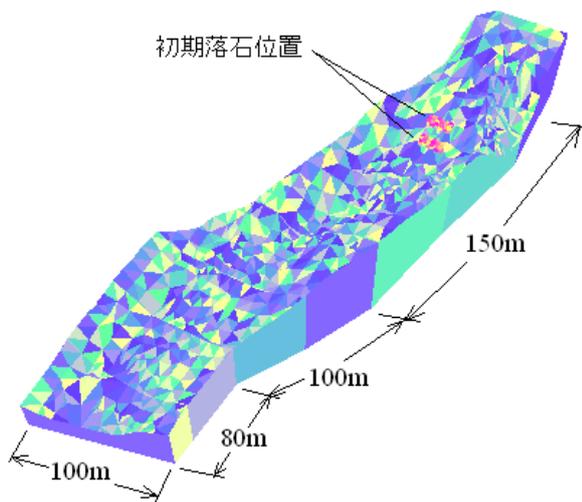


図-6 Bサイトモデル

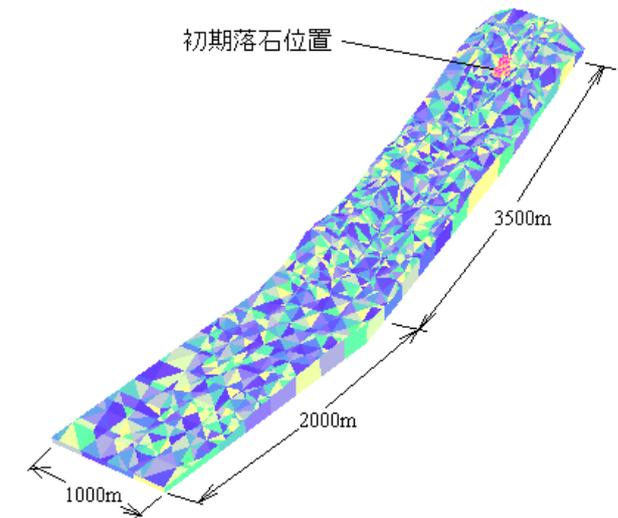


図-8 Cサイトモデル

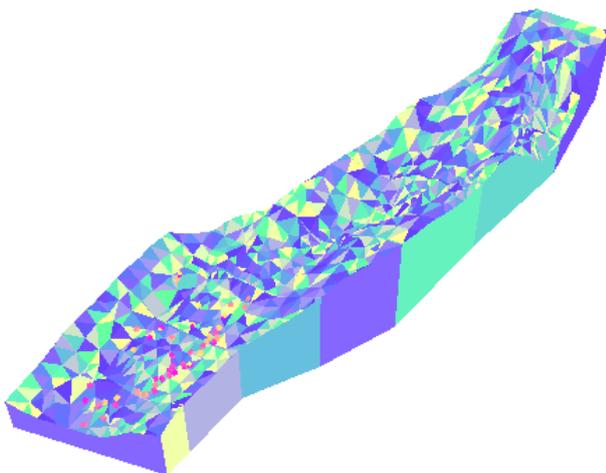


図-7 Bサイトモデル解析結果(30秒後)

### (3) Cサイトモデル

図-8にCサイトモデルを示す。モデル化した斜面の全長は約5500m、幅は1000m、比高は約1300mである。寒色系の地山ブロックは接触検索の計算時間を節約するため84個の平面で250m×250mのブロックに分割している。落石寸法は20m×20m×20mで斜面上部(暖色系)から200個(150万m<sup>3</sup>)落下させている。実際に想定される落石のサイズは5m×5m×5m程度が中心とされている。しかし、計算精度や計算時間の都合からその4倍(体積で64倍)となっている。本サイトの上部斜面は水平距離で1000m程度、傾斜が約40度の急こう配で、中間部分は水平距離で2000m程度、30度から20度程度、下部は水平距離で2000m程度が10度以下の緩傾斜となっている。

表-3にCサイトモデルの解析パラメータを示す。計算ステップは40万で80秒間の計算を行った。

表-3 Cサイトモデル解析パラメータ

項目	
弾性係数	2 GPa
ポアソン比	0.2
単位体積重量	25.0 kN/m <sup>3</sup>
摩擦角	30°
粘着力	0
ペナルティ係数 $k_n$	2 GPa/m
ペナルティ係数 $k_s$	0.2 GPa/m
時間刻み	0.0002 sec
粘性減衰係数 $c$	0.005
接触減衰係数 $\eta_p$	0.1
落石寸法	20m×20m×20m
落石個数	200
計算ステップ数	400000
計算時間(Intel Xeon)	20 hour

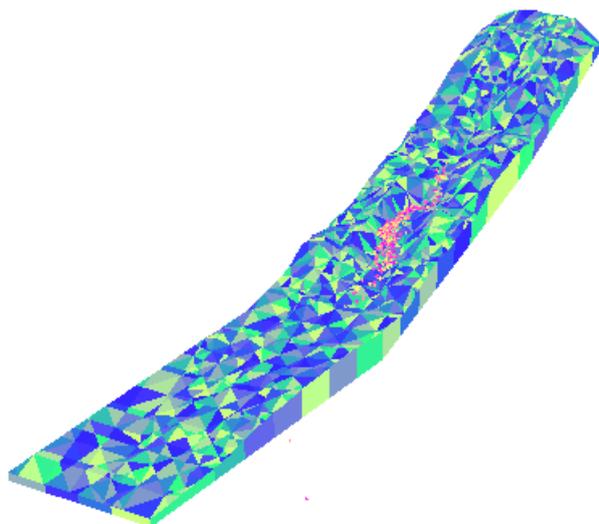


図-9 Cサイトモデル解析結果(80秒後)

図-9はCサイトモデルの解析結果(80秒後)を示す。落石の先端は斜面下部の緩傾斜部に達している。しかし、その大部分は斜面中央部の谷地形の部分に堆積している。また、二次元解析との比較では、落石の先端が500m程度二次元解析の到達距離が長くなっている。

#### 4. 結論と今後の課題

本研究では、三次元不連続変形法を実際の問題に適用する際の問題点を分析、整理し、その幾つかの対策を検証した。今回は特に、落石解析における計算精度と計算時間の向上を重点的に検討した。これらの対策として、地山ブロックの自由度を全固定(剛体)、落石ブロックを弾性体とし、地山と落石ブロックの大きな体積比が原因となる空間領域での連立方程式の桁落ちを少なくするとともに、複雑な形状の地山ブロックの体積積分を省略して、

計算速度を既存のコードと比較して10倍以上向上させた。このことにより、実行可能な範囲で、解析に必要な各種のパラメータ解析が可能となった。

今後の課題として、斜面を剛体としているため、落石に伴うエネルギー損失を過少に評価していること、不規則な落石形状と現実的なサイズの落石個数と数値安定性との関係などを検証する必要がある。

#### 参考文献

- 1) Shi, G. H. and Goodman, R. E. :Two dimensional discontinuous deformation analysis. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol. 9, pp. 541-556, 1985.
- 2) Shi, G. H. :Three dimensional discontinuous deformation analyses. *Proceedings of Fourth International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation*, pp. 1-21, 2001.
- 3) 佐々木猛, 佐々木勝司, 吉中龍之進, 大西有三: 不連続変形法(DDA)による斜面落石解析のパラメータ検討, 第 38 回地盤工学研究発表会講演論文集, pp.2155-2156, 2003.
- 4) 佐々木猛, 佐々木勝司, 片田良之, 鈴木哲也, 大西有三, 吉中龍之進: 不連続変形法(DDA)による斜面崩落と落石パターンの検討, 第 8 回計算工学講演会論文集, pp.167-170, 2003.
- 5) Wilkinson, J. H.: The algebraic eigenvalue problem, *Clarendon Press*, 1965.
- 6) Beyabanaki, S. A. R. et al : New point-to-face contact algorithm for 3-D contact problems using the augmented Lagrangian method in 3-D DDA, *International Journal of Geomechanics and Geoengineering*, Vol. 4, No. 3, pp.221-236, 2009.
- 7) 佐々木猛, 萩原育夫, 佐々木勝司, 堀川滋雄, 吉中龍之進, 大西有三: 不連続変形法による地震時の斜面崩落解析, 土木学会第 35 回岩盤力学に関するシンポジウム, pp.87-92, 2006.
- 8) 佐々木猛, 萩原育夫, 三木茂, 大西有三, 西山哲, 小山倫史: 三次元不連続変形法(3D-DDA)による落石モデルの検討, 土木学会, 第 40 回岩盤力学シンポジウム, pp. 288-293, 2011.
- 9) 島内哲哉, 鄭惟, 中村公一, 佐々木猛, 西山哲, 大西有三: DDAの落石問題における解析パラメータの設定法に関する研究, 土木学会, 第40回岩盤力学シンポジウム, pp. 294-298, 2011.

## THE PRECISION AND MODELING OF ROCK FALL BY 3D DISCONTINUOUS DEFORMATION ANALYSIS

Takeshi SASAKI, Ikuo HAGIWARA, Sigeru MIKI, Yuzo OHNISHI,  
Satoshi NISHIYAMA and Tomofumi KOYAMA

The authors are improved the three dimensional discontinuous deformation analyses (3D-DDA) considering the precision of rock fall problems based on 3D-DDA code developed by G. H. Shi (2001). The numerical instability on the linear algebraic equation in the space domain is caused by the large volume ratio between the base blocks and the falling rock blocks, which is improved by introducing the rigid block option for the base blocks. The rigid block option of the base blocks can be avoid the numerical integration of the base blocks and saves calculation times for 80 to 90% in a step. As a result, the wide region and the many numbers of rock models analyses are possible by 3D-DDA.