第 40 回岩盤力学に関するシンポジウム講演集
（社）土木学会　2011 年 1 月　講演番号 71

不連続性岩盤の強度評価のマルチスケール極限荷重解析

鄭慈恵[1*]・京谷孝史[1]

[1]東北大学大学院　工学研究科　土木工学専攻（〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）
E-mail: jhjung@mm.civil.tohoku.ac.jp

トンネルや斜面などの岩盤構造物の設計には岩盤全体の強度が必要となるが，不連続面のある岩盤の強度を求めるのは簡単ではない．そこで本研究では均質化理論に基づいて，供試体試験で求めた岩石の材料定数から不連続面のある岩盤の破壊強度を求める数値解析手法を提案する．主双対剛塑性有限要素法 (Primal Dual Rigid Plastic Finite Element Method:PDRPFEM)[2)]をマルチスケール解析に組み込むことで岩盤全体の強度を求める新たな手法を構築し，その後試験に行われた実験の結果との比較を通じて解析手法の妥当性を検討する．

Key Words : *multi-scale analysis, primal-dual rigid-plastic finite element analysis, continuum weak model*

1.　はじめに

岩盤は節理，断層，層理などの大規模の不連続面だけでなく片理，葉理などの肉眼で見えない微細亀裂の不連続面が存在し，このような無数の不連続面は岩盤の強度に影響を与える．本研究では，均質化理論に基づき，規則的な不連続面のある微視構造の極限荷重解析から岩盤全体の破壊強度を求める方法を提案する．また，提案された手法を実際に行った試験の結果との比較を通し，その妥当性を検討する．

2.　マルチスケール解析の構造

(1)　マルチスケール境界値問題

図–1 上に示すように，材料の内部に亀裂が規則的に分布する非均質な構造体の境界値問題を想定する．構造体 Ω は境界 $\partial\Omega_u$ で固定支持され，境界 $\partial\Omega_t$ に表面力 $\bar{t}_i^\epsilon$ が，Ω 全体には体積力 f_i^ϵ が作用している．こうした構造体 Ω の全体構造のマクロ境界値問題は，以下の方程式群で記述される．

（静的可容応力場）

$$\frac{\partial \Sigma_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} + F_i = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{1}$$

$$F_i(\boldsymbol{x}) = \langle f_i^\epsilon \rangle \tag{2}$$

$$\Sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \qquad \text{on } \partial\Omega_t \tag{3}$$

（運動学的可容変位場）

$$E_{ij}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^0(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^0(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right) \qquad \text{in } \Omega \tag{4}$$

$$u_i^0 = \bar{u}_i \qquad \text{on } \partial\Omega_u \tag{5}$$

ここで，$u_i^0(\boldsymbol{x})$ はマクロ変位，$E_{ij}(\boldsymbol{x})$ はマクロひずみ，$\Sigma_{ij}(\boldsymbol{x})$ はマクロ応力を示す．また，式中の $\langle f_i^\epsilon \rangle$ は，以下に示すユニットセル内での平均演算を示す．

$$\langle f_i^\epsilon \rangle = \frac{1}{|Y|}\int_Y f_i^\epsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} \tag{6}$$

ここで注目すべきことは，式 (1)-(4) のマクロ境界値問題にマクロ応力とマクロひずみの構成関係式が無いことである．これは，マクロ応力とマクロひずみの構成関係が後述するマクロ境界値問題とミクロ境界値問題の連成によりユニットセルの応答の結果として与えられるためである．一方微視構造の境界値問題は，以下の方程式群で記述される．

（静的可容応力場）

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\epsilon}{\partial x_j} + f_i^\epsilon = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{7}$$

$$\sigma_{ij}^\epsilon n_j = \bar{t}_i^\epsilon \qquad \text{on } \partial\Omega_t \tag{8}$$

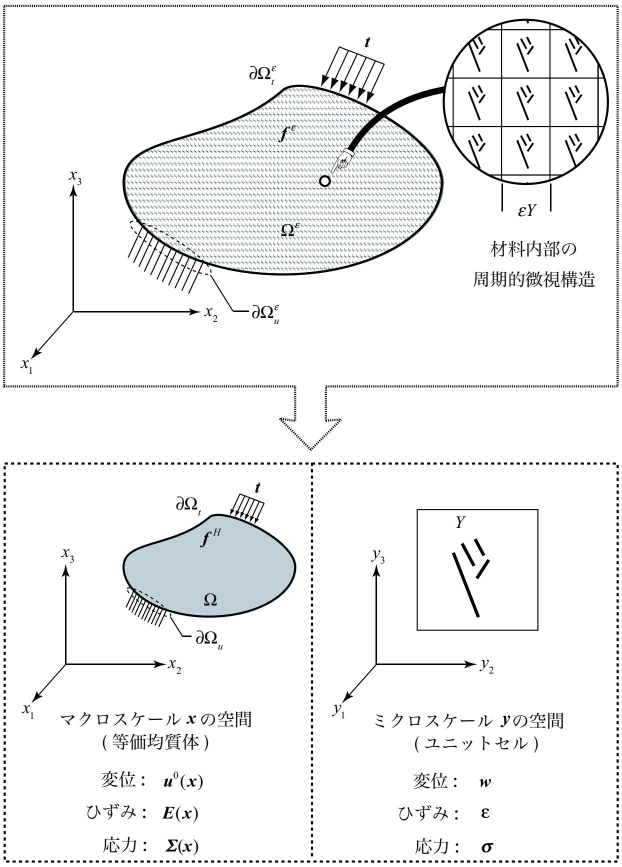
（運動学的可容変位場）

$$\varepsilon_{ij}^\epsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^\epsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\epsilon}{\partial x_i}\right) \qquad \text{in } \Omega \tag{9}$$

$$u_i^\epsilon = \bar{u}_i \qquad \text{on } \partial\Omega_u \tag{10}$$

（構成式）

$$\sigma_{ij}^\epsilon = F_{ij}(\varepsilon_{kl}^\epsilon) \tag{11}$$



図–1 2つのスケール変数の導入による全体構造と微視構造の分離

ユニットセル内の変位場 $w_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は, 以下で記述される.

$$w_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = E_{ij}(\boldsymbol{x})y_j + u_i^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{12}$$

ここで，右辺第１項 $E_{ij}(\boldsymbol{x})y_j$ は，強制的に一様ひずみ $E_{ij}(\boldsymbol{x})$ が与えられた際のユニットセルの一様変形を示し，第２項 $u_i^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は，ユニットセルの周期構造を反映した周期変位（擾乱変位）を表す．ただし，この周期変位 $u_i^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ には，ユニットセルを単位周期とする周期構造の反映として，$\boldsymbol{y}$ に関する周期性

$$u_i^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = u_i^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+Y) \qquad \text{on} \ \ \partial Y \tag{13}$$

が境界条件として課される．

(2) ミクロスケールの極限荷重解析の定式化

前述のマクロスケールで与えられたマクロひずみから得られたミクロ応力から極限荷重解析を行うことで微視構造の破壊強度を求めることができる．ここでは極限解析の定式化を行う．

極限解析ではある荷重系を所与の条件として,「与えられた荷重系が何倍の大きさ（荷重係数）になると塑性崩壊が生じるか」という問題が取り扱われる．この塑性崩壊を材料の破壊と定義し，極限解析をミクロ境界値問題に適用すると,「与えられたマクロひずみが何倍の大きさ（荷重係数）になると微視構造のユニットセル Y で塑性崩壊（破壊）が生じるか」という問題を取り扱うことになる．つまり，荷重係数 α におけるマクロひずみ αE_{ij} を所与の条件とし，微視構造が破壊に至る極限状態でのミクロ応力 σ_{ij}^* を求め，荷重係数の最適解 α^* を得るということである．この極限解析には上界法と下界法があり，この研究では上界法と下界法の両方を使う主双対内点法を用いる．前節で述べたミクロ境界値問題の運動学的可容変位場式（(12)）より，マクロひずみ E_{ij} が一定の条件下でユニットセル内の速度場 $\dot{w}_i$ は次式で得られる．

$$\begin{aligned} \dot{w}_i &= (\dot{E}_{ik}(\boldsymbol{x})y_k) + \dot{u}_i^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ &= \dot{C}(\dot{E}^0_{ik}(\boldsymbol{x})y_k) + \dot{u}_i^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{aligned} \tag{14}$$

したがって，ユニットセル内の塑性ひずみ速度場 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ は以下のように得られる．

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{w}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \dot{w}_j}{\partial y_i}\right) \\ &= \dot{E}_{ij} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial y_i}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

この式を書き直すと

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \dot{\boldsymbol{E}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\dot{\boldsymbol{u}}) \\ &= \dot{C}\dot{\boldsymbol{E}}^0 + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\dot{\boldsymbol{u}}) \qquad \text{in} \ \ Y \end{aligned} \tag{16}$$

のようになるが，このことからユニットセル内の塑性ひずみは，一様変形によるマクロひずみ $\dot{\boldsymbol{E}}$ と周期境界条件の擾乱変位による周期ひずみ $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\dot{\boldsymbol{u}})$ で構成されていることが分かる．式 (16) の $\dot{\boldsymbol{E}}^0$ はマクロスケールから引き継いだマクロひずみ速度の初期値で，$\dot{C}$ はそのマクロひずみ速度の大きさを表す定数である．以上述べたようにマクロひずみは微視構造の極限解析を行う際に影響を与える．それを踏まえて主双対内点法の目的関数および制約条件を整理すると以下の式 (18)-(24) で記述される．式 (18)-(20) は下界定理の制約条件であり，上から順に応力の架空弾性応力 $\boldsymbol{\sigma}^e$ と残差応力 $\boldsymbol{\sigma}^r$ の和表現，残差応力 $\boldsymbol{\sigma}^r$ の自己つり合い式ならびに非負のスラック変数を用いた降伏条件式である．式 (21)-(23) は上界定理の制約条件であり，上から順に塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ と架空弾性応力 $\boldsymbol{\sigma}^e$ が成す，大きさが１に正規化された外部消散仕事率，$\boldsymbol{B}$ マトリックスを用いた塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ と節点速度 $\dot{\boldsymbol{u}}$ の変形の離散化式，および関連流れ則である．式 (24) は，双対ギャップ（相補性条件）であり，これらの条件を満たしながら双対ギャップが零となる最適解 α^* を求める．

$$maximize \qquad \alpha \tag{17}$$

subject to

$$\boldsymbol{\sigma} = \alpha\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{r}} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{B}'^{T}\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{N}^{T}(\alpha\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0} \tag{20}$$

$$1 - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{e}} = 0 \tag{21}$$

$$\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{u}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{p}} = -\frac{\dot{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{0}}}{\dot{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{0}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{e}}} \tag{22}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{p}} - \sum_{i} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0} \tag{23}$$

$$\sum_{i} \lambda_i s_i = 0 \tag{24}$$

以上のような手法を用いて様々な方向のマクロひずみから得られるマクロ破壊応力 Σ^{*} から巨視的破壊基準を求め，マクロスケールの強度評価を行った．

3. 解析手法の強度評価の検証

ここでは，開発手法において重要な役割を担う微視構造における極限解析アルゴリズムを検証する．本手法の新規性は，微視構造の破壊強度を考慮するため，周期境界を持つユニットセルに対し主双対極限解析を導入したことである．そこで，ユニットセルの境界値問題に着目して，マクロひずみを任意に与えた際のユニットセルの性能について検証を行う．

(1) 健全な構造モデルを用いた場合

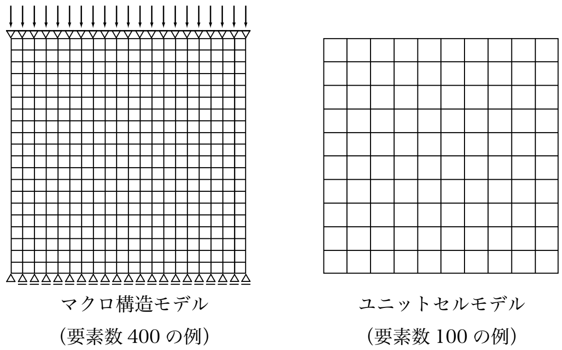
まず，不連続面を持たない健全なマクロ構造モデルおよびユニットセルモデルにおいて得られる破壊強度の検証を行う．この時，材料物性値は**表–1** のようで，ユニットセル解析では次のマクロひずみを与えた．

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

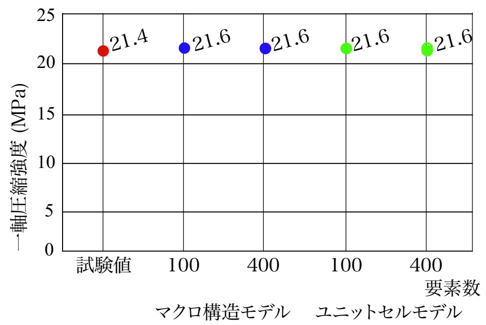
検証の方法は **図–2(a)** に示すような要素分割数が 100 と 400 のマクロ構造モデルとユニットセルモデルを用いて解析を行い，**表–1** に示した一軸圧縮強さと比較する．**図–2(b)** に解析結果を示す．図から，実験値，マクロ構造に対する極限解析結果，ユニットセルから得られるマクロ応力ともに非常に近い値を示しているのが分かる．したがって，本解析手法は健全な材料においては，要素分割数に依存せずマクロ構造に対してもユニットセルに対しても十分に正しい結果が得られると言える．

表–1 健全なモデルの解析に用いた基質部の材料物性値

一軸圧縮強さ	21.4 MPa
ヤング率	3650 MPa
ポアソン比	0.16
粘着力	3.26 MPa
内部摩擦角	56.3 °



(a) 健全な構造モデル



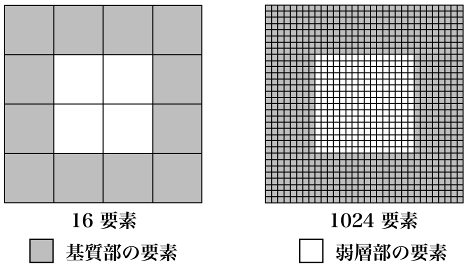
(b) 健全な構造モデルにおける解析結果

図–2 健全な構造モデルとその解析結果

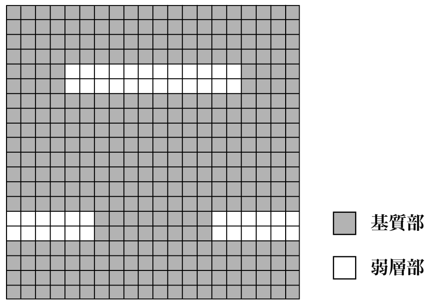
(2) 不連続面を有するモデルの要素分割依存性の検証

次に，弱層部を含んだ同じ構造を持つユニットセルにおいて，要素分割数が異なる場合についての計算手法の検証を行う．検証の方法は，大きさ 10mm×10mm の同じ構造を持つユニットセルに，要素分割数を $16, 64, 144, 256, 400, 576, 784, 1024$ と変えて解析を行い，得られる最大荷重係数 α の要素分割依存性を調べる．その際，基質部の材料物性値は**表–2** のようで，不連続面は，ヤング率が $E = 1.0$MPa，ポアソン比が $\nu = 0.0$ の柔らかい等方弾性体とした．これらのユニットセルは，要素分割数を除いて解析条件は同じである．なお，解析では次のマクロひずみを与えた．**図–3** はユニットセルモデルの要素数が 16 と 1024 の場合を示している．

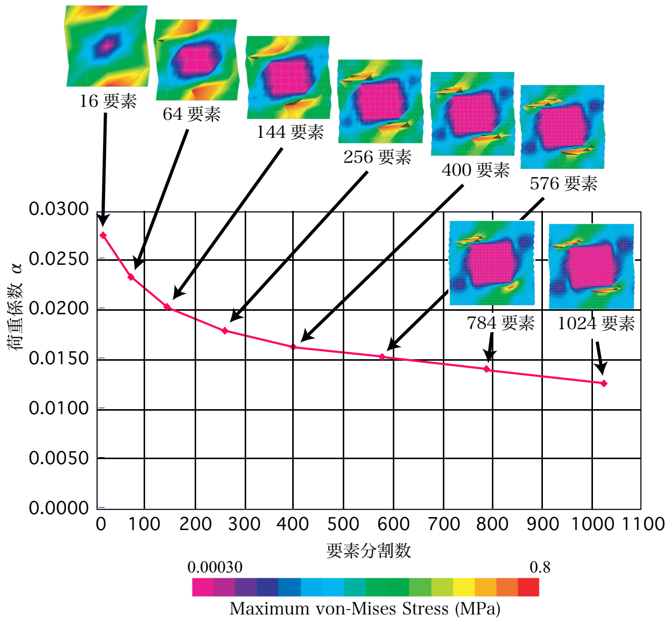
$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$



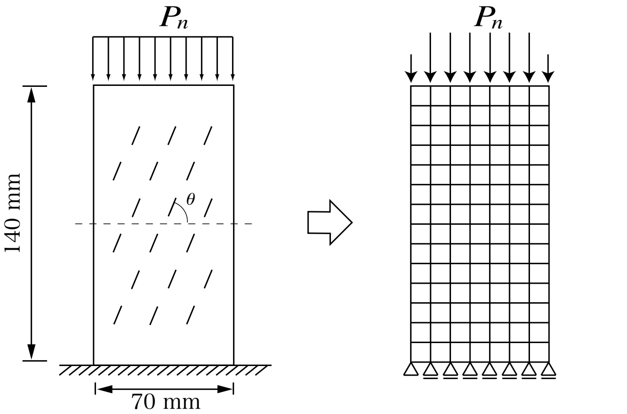
図–3 要素分割数が異なるユニットセルモデル



図–5 石膏供試体の解析に用いたユニットセルモデル



図–4 要素分割数が異なるユニットセルモデルの解析結果



(a) 不連続面を配置した石膏供試体の一軸圧縮試験 **(b)** 一軸圧縮試験を表現した有限要素モデル

図–6 一軸圧縮試験とそれをモデル化した有限要素モデル

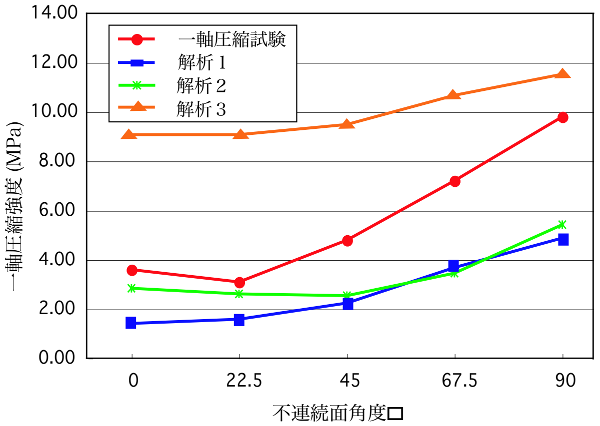
表–2 一軸圧縮試験の解析に用いた基質部の材料物性値

一軸圧縮強さ	13.6 MPa
ヤング率	3040 MPa
ポアソン比	0.12
粘着力	2.82 MPa
内部摩擦角	45 °

図–4 には，要素分割数と解析から得られた最大の荷重係数 α の関係，およびユニットセルの最大 von-Mises 応力分布を示す．図から，要素分割数が 200 を超えると荷重係数の収束傾向がなだらかになっているのが確認できる．得に，要素分割数が 400 を超えると荷重係数は収束してからまた要素数が増えることにつれて収束が悪くなることが分かる．また von-Mises 応力分布を見ると，要素分割数が大きくなるにつれ基質部の要素の応力負担が小さくなっている傾向が見て取れるが，これも要素分割数が 400 前後からほぼ変化していない．このことから微視構造に対する極限解析は要素数 400 を基準として解析を行うと解析の適用性を保ちながら時間的に合理的で解析できると言える．

(3) 不連続面を有する石膏供試体の強度特性評価

次は本手法を用いて得られる巨視的強度特性を検証するために，一軸圧縮試験の数値シミュレーションを行い，試験結果との比較・検討を行う．解析では，**図–5** に示すような不連続面（弱層モデル）を組み込んだユニットセルを用いた．このとき，ユニットセルの不連続面には小早川・京谷[3]が提案した弱層モデルを用いた．このモデルは，不連続面を含んだ岩盤を，亀裂のかみ合わせによる効果を持つ弱層を含んだ岩盤と置き換えて考えたモデルである まず，**図–6(a)** に示すような規則的な不連続面を有する石膏供試体の一軸圧縮試験の数値シミュレーションを行う．この試験は，不連続面の角度 θ の違いによる一軸圧縮強さ P_n の変化を調べる目的



図–7 不連続面の角度による一軸圧縮強さの変化

で行われた．基質部に**表–2** の材料物性値を持つユニットセルから得られた巨視的破壊基準を用いて，一軸圧縮試験をモデル化した**図–6(b)** の有限要素モデルに対し極限荷重解析を行う．

図–7 に試験結果と数値解析結果を示す．ここで，本手法の特徴である微視構造に対する極限解析の影響を見るために，不連続面をかみ合わせを考慮しない弱いままの弱層とした解析 1，およびかみ合わせにより剛性上昇する弱層モデルを組み込んだ解析 2 と解析 3 を行った． 解析 2 は徐々に剛性が増加する弱層モデル，解析 3 は解析 2 より剛性の上昇率が強くなる弱層モデルを想定した．**図–7** の試験結果は不連続面の角度が大きくなるのにつれて，一軸圧縮強さが増加するが，すべての数値解析の結果から試験と一致した傾向を表しているのが見取れる．ただし解析 2 は，不連続面の角度が 0 ° と 22.5 ° の場合には試験に近い強度が得られたが，その以外は解析 1 と同じのように過少評価された．一方弱層の剛性上昇率が強くなる解析 3 は試験結果より強度が過大評価されたことが分かる．

4. おわりに

本研究では不連続性岩盤に対する強度特性評価法として，岩盤の内部微視構造を構成するユニットセルに対する極限解析法の定式化を行い，それを組み込んだ岩盤の強度評価法を提案した．そして，解析例を通してその適用性を検証することで，微視構造に対して極限解析を行うことで不連続性材料の強度評価が可能になると考えられる．

参考文献

1) 京谷孝史，寺田賢二郎，欧陽立珠: 岩盤の力学特性と不連続面画像情報による岩盤の変形強度特性評価土木学会論文集，Vol. III-48,No 631,pp.131-150,1999.
2) 小林俊一: 主双対内点法による混合型剛塑性有限要素法の開発, 応用力学論文集，Vol. 6,pp.95-106,2003.
3) 小早川博亮，京谷孝史: 亀裂に対する連続体弱層モデルを用いた均質化法による岩盤の強度特性評価，土木学会論文集 C, Vol. 63, No 2,pp.428-440,2007.

STRENGTH EVALUATION OF DISCONTINUUM ROCK MASS BY MULTISCALE PRIMAL-DUAL LIMIT LOAD ANALYSIS

Ja Hyea JUNG, Takashi KYOYA

A numerical method for strength evaluation of discontinuous rock mass is proposed based on the multi-scale analysis. Discontinuities are treated in the micro-scale problem of the multi-scale analysis. Each of discontinuities is idealized a thin layer that is composed of nonlinear hardening material, and is modeled by an ordinary solid type finite elements. Strength of the rock mass is evaluated by limit average stress at which the unit cell collapses. The limit value of stress is predicted by a limit load FE analysis based on the primal-dual formulation. Proposed numerical method is well simulated the feature of strength characteristic of the cracked rock mass.