

圧裂試験を用いた弾性主軸方向が既知の異方性岩石材料に対する異方性比の推定方法

堤 隆*

鹿児島工業高等専門学校 都市環境デザイン工学科 (〒899-5193 鹿児島県霧島市隼人町真孝1460-1)

*E-mail: tsutsumi@kagoshima-ct.ac.jp

著者は弾性主軸方向が既知の標準的な異方性脆性材料に対する圧裂試験を用いた異方性比の推定方法を提案した。しかしながら、岩はその種類によってポアソン比が大きく異なり、著者が提案した方法で異方性比を推定するには困難な岩種も存在する。本研究では、異方性弾性論の理論解を用いて、岩が取りうるポアソン比0.15から0.35までの値で、圧裂試験の際に供試体中心で載荷方向および面内でそれに直交する方向に生じるひずみを計算して、それらのひずみの比と異方性比の関係を図表に示す。この図表を用いれば、圧裂試験の際に供試体中心に2方向のひずみゲージを貼付して測定することによって異方性比を推定することが可能になる。

Key Words : elasticity, orthotropy ratio, tensile stress, Brazilian test, tensile strain, strain gage

1. 緒言

コンクリートや硬い岩石など脆性材料の引張強度を求める試験方法として、円柱形試験片を平行な平板によって上下から加圧する圧裂試験が広く用いられてきた。これは、試験片の作成やチャックによる試験片のつかみや偏心荷重によるわずかな曲げなどに細心の注意を払う必要がある純粋引張試験に比べれば簡便に試験を行うことができるからである。

等方性弾性解析によれば、直径軸上に対向する集中荷重を載荷すると載荷部近傍を除いた載荷軸上には直角方向に一樣な引張応力が発生する¹⁾。脆性材料は破壊する前の塑性変形が小さく破壊は弾性範囲内で生じることから弾性理論で力学挙動を説明でき、かつ脆性材料の引張強度は一般に低いので載荷軸上に発生する一樣な引張応力によって破壊する。このことがコンクリートなどの等方性と考えられる脆性材料に対して圧裂試験によって引張強度を求める理論的な根拠となる。

しかしながら、直交異方性材料に対して二次元問題で平面応力状態での円周に対して2%、4%、8%の載荷面積としたLemmonらによる有限要素解析²⁾、あるいは理論解を用いて集中荷重の再現性を可能にしたExadaktylosによる解析³⁾やClaessonによる解析⁴⁾、著者らによる解析⁵⁾では載荷軸上に発生する引張応力は一樣な分布を示さないだけでなく、同じ材料であっても載荷する方向によって

異なった分布となることが示された。したがって、圧裂試験によって異方性脆性材料の引張強さを求めようとする場合、材料の異方性比と弾性主軸の方向の情報が不可欠となる。

著者は先に目視等で弾性主軸の方向が判読できる一般的な脆性材料に対して、圧裂試験による異方性比を推定する図表を示した⁶⁾。しかしながら、岩石材料は岩種によってポアソン比が大きく異なり⁷⁾、ポアソン比が極端に大きいあるいは小さい岩では著者が示した図表の適用が困難である。

一方向の弾性係数とポアソン比は一軸圧縮試験で求めることが出来ることから、本論文では一軸圧縮試験で得られたこれらの値を用いて、圧裂試験によって異方性比を推定する方法を示す。具体的には、異方性弾性論の理論解を用いて、岩石材料が取りうるポアソン比0.15から0.35までの値について、ポアソン比の値ごとに圧裂試験の際に供試体中心で載荷方向および面内でそれに直交する方向に生じるひずみを計算して、それらのひずみの比と異方性比の関係を図表に示す。この図表と一軸圧縮試験で得られたポアソン比を用いることによって、直交異方性材料に対し実際の圧裂試験で供試体中心に2方向のひずみゲージを貼付して測定し、異方性比を推定することが可能になる。

なお、本論文における異方性は方向による弾性係数あるいは変形係数の違いを表し、強度異方性を意味するも

のではない。

2. 基礎方程式

本論文では、図-1に示すような直交異方性円柱供試体の直径方向に平行な板で加圧する圧裂試験を対象とする。従来は直径軸上に対向する集中荷重を載荷したモデル化が行われてきたが、本論文では図-2に示すような半径 a の円板の直径軸上に載荷幅 $\omega/2$ (rad)に直径方向の対向する荷重 P を均一に載荷させるモデルについても弾性厳密解を用いて定式化を行う。円柱試験片の境界周縁における x, y 方向の外荷重応力成分 X_n, Y_n は応力成分 σ_x, σ_y および τ_{xy} と次式の関係にある。

$$\left. \begin{aligned} X_n &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y), \\ Y_n &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 nl は円板表面に対する法線方向を表し、

$$\cos(n, x) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}. \quad (2)$$

が成立する。ただし、 s は微小要素の境界上の長さを表

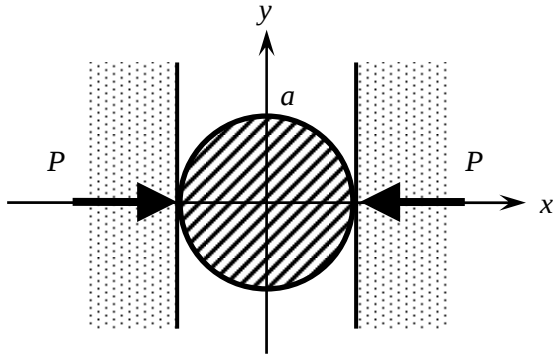


図-1 供試体の載荷軸と弾性主軸の方向

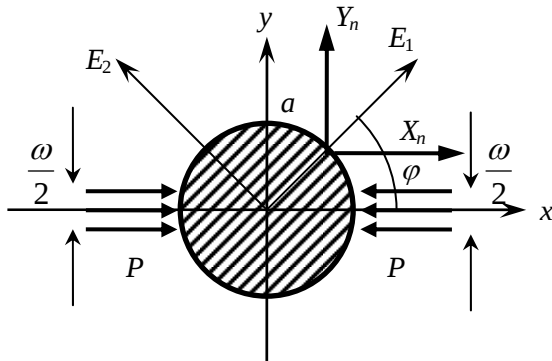


図-2 この研究でのモデル化

す。これらの成分 X_n, Y_n が与えられるとき、応力、変位を求めるための複素関数 $\Phi_k(z_k)$ の満足すべき条件は次のように表される⁸⁾。

$$\left. \begin{aligned} 2 \operatorname{Re}[\mu_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 \Phi_2(z_2)] &= \int_0^s X_n ds, \\ 2 \operatorname{Re}[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)] &= - \int_0^s Y_n ds. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

なお、応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は次式により表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re}[\mu_1^2 \Phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2'(z_2)], \\ \sigma_y &= 2 \operatorname{Re}[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)], \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re}[\mu_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \Phi_2'(z_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、 Re は括弧内の複素関数の実部を、複素関数に付く $'$ は z に関する一階の微分を表す。式(3)および式(4)中の複素パラメータ μ_1, μ_2 は次式の特微方程式の複素根として求められる。

$$\begin{aligned} a'_{11} \mu^4 - 2a'_{16} \mu^3 + (2a'_{21} + a'_{66}) \mu^2 \\ - 2a'_{26} \mu + a'_{22} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 a'_{ij} ($i, j=1, 2, 3, 6$)を平面応力状態での弾性コンプライアンスとすると、次式のような関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a'_{11} \sigma_x + a'_{12} \sigma_y + a'_{13} \sigma_z, \\ \varepsilon_y &= a'_{12} \sigma_x + a'_{22} \sigma_y + a'_{23} \sigma_z, \\ \varepsilon_z &= a'_{13} \sigma_x + a'_{23} \sigma_y + a'_{33} \sigma_z, \\ \gamma_{xy} &= a'_{66} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ε, γ はそれぞれ添字方向の垂直ひずみ、せん断ひずみを表す。この論文では供試体の端部にひずみゲージを貼付してひずみ量を計測することを想定しているので、解析は平面応力状態下で行われる。この状態で E_1 の方向と座標軸が一致するとき(i. e. $\varphi=0$)の弾性コンプライアンスを a'_i ($i, j=1, 2, 6$)で表すと、

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= 1/E_1, & a_{22} &= 1/E_2, \\ a_{12} &= -\nu_{12}/E_1, & a_{66} &= 1/G_{12}, \\ a_{16} &= a_{26} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

となり、これを用いて式(5)中の弾性コンプライアンスは次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
a'_{11} &= a_{11} \cos^4 \varphi + (2a_{12} + a_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\
&\quad + a_{22} \sin^4 \varphi \\
&\quad + (a_{16} \cos^2 \varphi + a_{26} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi, \\
a'_{22} &= a_{11} \sin^4 \varphi + (2a_{12} + a_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\
&\quad + a_{22} \cos^4 \varphi \\
&\quad - (a_{16} \sin^2 \varphi + a_{26} \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi, \\
a'_{12} &= a_{12} + (a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66}) \\
&\quad \times \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\
&\quad + \frac{1}{2} (a_{26} - a_{16}) \sin 2\varphi \cos 2\varphi, \\
a'_{66} &= a_{66} + 4(a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66}) \\
&\quad \times \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\
&\quad + 2(a_{26} - a_{16}) \sin 2\varphi \cos 2\varphi, \\
a'_{16} &= \left[a_{22} \sin^2 \varphi - a_{11} \cos^2 \varphi \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (2a_{12} + a_{66}) \cos 2\varphi \right] \\
&\quad \times \sin 2\varphi + a_{16} \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 3\sin^2 \varphi) \\
&\quad + a_{26} \sin^2 \varphi (3\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \\
a'_{26} &= \left[a_{22} \cos^2 \varphi - a_{11} \sin^2 \varphi \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (2a_{12} + a_{66}) \cos 2\varphi \right] \\
&\quad \times \sin 2\varphi + a_{16} \sin^2 \varphi (3\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \\
&\quad + a_{26} \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 3\sin^2 \varphi)
\end{aligned} \right\} \quad (8)$$

3. 問題の定式化

次に、直交異方性円柱の直径方向に集中荷重 P が作用する問題の定式化を行う。外部境界上の x, y 方向の合応力はフーリエ級数に展開されるが、本論文では次式のように項数 M で打ち切って表す。

$$\left. \begin{aligned}
\int_0^s X_n ds &= \beta_0 + \sum_{m=1}^M (\beta_m e^{im\theta} + \bar{\beta}_m e^{-im\theta}), \\
-\int_0^s Y_n ds &= \alpha_0 + \sum_{m=1}^M (\alpha_m e^{im\theta} + \bar{\alpha}_m e^{-im\theta})
\end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに、上付きのバーは複素共役を表す。本論文では、 x 軸上、すなわち載荷点を中心に円周長に対して載荷幅 $a/2\pi$ で対向する集中荷重 P が作用する場合について検討を行う。この場合、式(9)中の m 次の複素型フーリエ係数 α_m, β_m は式(10)のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
\alpha_m &= 0, \\
\beta_m &= -\frac{2iP}{\pi m^2 \omega} \left\{ 1 - (-1)^m \right\} \sin \frac{m\omega}{4}.
\end{aligned} \right\} \quad (10)$$

本論文では直交異方性楕円板の複素応力関数は式(9)と同様に次式のように展開された級数を項数 M で打ち切ったものを用いる。

$$\left. \begin{aligned}
\Phi_1(z_1) &= A_0 + A_1 z_1 + \sum_{m=2}^M A_m P_{1m}(z_1), \\
\Phi_2(z_2) &= B_0 + B_1 z_2 + \sum_{m=2}^M B_m P_{2m}(z_2).
\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここに、 $P_{km}(z_k)$ ($k=1, 2$)は z_k の m 次のべき級数で、次式で表される。

$$\begin{aligned}
P_{km}(z_k) &= -\frac{1}{(a - i\mu_k b)^m} \\
&\quad \times \left\{ \left(z_k + \sqrt{z_k^2 - a^2 - \mu_k^2 b^2} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(z_k - \sqrt{z_k^2 - a^2 - \mu_k^2 b^2} \right)^2 \right\} \quad (k=1, 2).
\end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 a, b は楕円板の長辺と短辺であり、この問題では円板を扱っているので $a=b$ とおく。複素変数 z_k およびべき級数 $P_{km}(z_k)$ は円柱境界上で以下の式になる。

$$\left. \begin{aligned}
z_k &= \frac{1}{2} \left\{ (a - \mu_k b) e^{i\theta} + (a + i\mu_k b) e^{-i\theta} \right\}, \\
P_{km} &= -\left(e^{im\theta} + t_k^m e^{-im\theta} \right), \\
t_k &= \frac{a + i\mu_k b}{a - i\mu_k b}. \quad (k=1, 2)
\end{aligned} \right\} \quad (13)$$

複素応力関数 $\Phi_k(z_k)$ を用いると、合応力は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned}
\int_0^s X_n ds &= \operatorname{Re} [\mu_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 \Phi_2(z_2)], \\
-\int_0^s Y_n ds &= \operatorname{Re} [\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)]
\end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式(13)に式(11)を代入して境界上の合応力を与える式を導き、さらに式(14)に代入して式(9)と $e^{im\theta}$ ($1 \leq m \leq M$)の項同士の係数を比較して次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
A_1 + B_1 + \bar{A}_1 + \bar{B}_1 \\
&= \frac{1}{a}(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1), \\
\mu_1 A_1 + \mu_2 B_1 + \bar{\mu}_1 \bar{A}_1 + \bar{\mu}_2 \bar{B}_1 \\
&= \frac{1}{ib}(\bar{\alpha}_1 - \alpha_1) = \frac{1}{a}(\beta_1 + \bar{\beta}_1), \\
\mu_1^2 A_1 + \mu_2^2 B_1 + \bar{\mu}_1^2 \bar{A}_1 + \bar{\mu}_2^2 \bar{B}_1 \\
&= \frac{1}{ib}(\bar{\beta}_1 - \beta_1)
\end{aligned} \right\} (m=1) \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned}
A_m + B_m + \bar{t}_1^m \bar{A}_m + \bar{t}_2^m \bar{B}_m &= -\alpha_m, \\
\mu_1 A_m + \mu_2 B_m + \bar{\mu}_1 \bar{t}_1^m \bar{A}_m + \bar{\mu}_2 \bar{t}_2^m \bar{B}_m \\
&= -\beta_m, \\
t_1^m A_m + t_2^m B_m + \bar{A}_m + \bar{B}_m &= -\bar{\alpha}_m, \\
\mu_1 t_1^m A_m + \mu_2 t_2^m B_m + \bar{\mu}_1 \bar{A}_m + \bar{\mu}_2 \bar{B}_m \\
&= -\bar{\beta}_m.
\end{aligned} \right\} (m \geq 2) \quad (16)$$

$m=1$ の場合は A_1, B_1 それぞれの実部と虚部のあわせて 4 つの未知数に対して式が 3 つであるためにこれを解くことができない．そこで，剛体回転を 0 とする条件を入れることで次式が導かれる⁹⁾．

$$(q_1 - \mu_1 p_1)A_1 + (q_2 - \mu_2 p_2)B_1 + (\bar{q}_1 - \bar{\mu}_1 \bar{p}_1)\bar{A}_1 + (\bar{q}_2 - \bar{\mu}_2 \bar{p}_2)\bar{B}_1 = 0. \quad (17)$$

式(15)に式(17)を加えることによって， A_1, B_1 が完全に導かれることになる．なお，この研究では式(10)の係数 α_m と β_m が十分収束するように $M=250$ とした．

4. 数値計算例

E_1 の方向と载荷軸が一致する(i. e. $\varphi=0$)円柱供試体断面の中心において，図-3に示すような面内で载荷方向に対して直角方向に発生するひずみ ε_0 に対する载荷軸方向に発生するひずみ ε_0 の比の絶対値 $|\varepsilon_0/\varepsilon_0|$ を図-4に示す⁹⁾．等方性，異方性比2.0, 3.0, 4.0, 5.0の場合について円周長に対する载荷面積は $\omega/2\pi=1\%$ から 8% までとし，ポアソン比は $\nu_{12}=0.20$ とした．異方性比が大きくなるにしたがって $|\varepsilon_0/\varepsilon_0|$ が大きくなっている様子が見て取れる．しかしながら，どの異方性比においても，この範囲では载荷面積 ω が $|\varepsilon_0/\varepsilon_0|$ にほとんど影響を与えていないことがわかる．

E_1 の方向と载荷軸とのなす角が $\varphi=0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$ について，载荷面積を円周長に対して $\omega/2\pi=1\%$ から 8% までとしたときの円柱供試体中心において面内で载荷方向に対して直角方向に発生するひずみ ε_0 に対する载荷軸方向

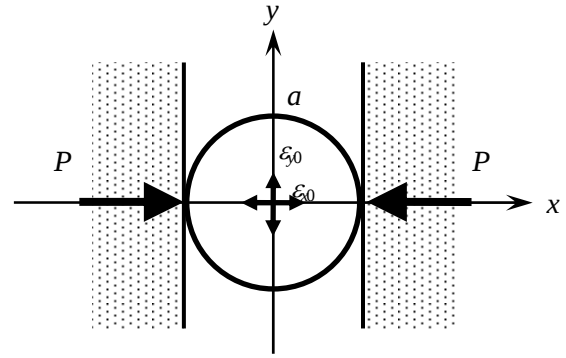


図-3 供試体中心に発生するひずみ

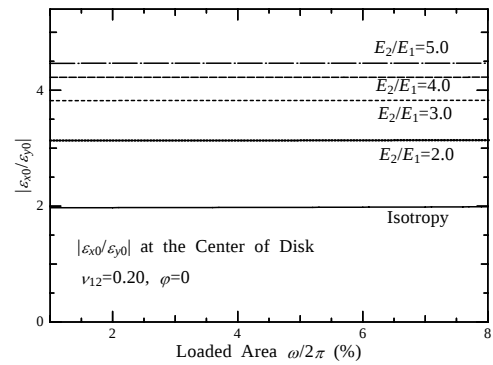


図-4 数種の異方性比の下での载荷面積と供試体中心で発生するひずみの比

に発生するひずみ ε_0 の比の絶対値 $|\varepsilon_0/\varepsilon_0|$ を図-5に示す⁹⁾．(a)は異方性比2.0, (b)は5.0の場合について示した．どちらの異方性比の場合においても，異方性比が同じであっても弾性主軸と载荷軸とのなす角が異なれば $|\varepsilon_0/\varepsilon_0|$ の値が異なることがわかる．たとえば，どちらの異方性比においても， $\varphi=0$ の場合に比べ $\varphi=\pi/6, \pi/3$ の場合の方が小さく， $\varphi=\pi/2$ の場合が最も大きい．その一方で $\varphi=\pi/6, \pi/3$ の場合を比較すると， $E_2/E_1=2.0$ では $\varphi=\pi/3$ の場合の方が $\varphi=\pi/6$ の場合より大きいのに対し， $E_2/E_1=5.0$ では $\varphi=\pi/6$ の方が $\varphi=\pi/3$ の場合より大きい．しかしながら，いずれの場合も弾性主軸と载荷軸が一致している場合と同様に，载荷幅は $|\varepsilon_0/\varepsilon_0|$ にほとんど影響を与えていないことがわかる．

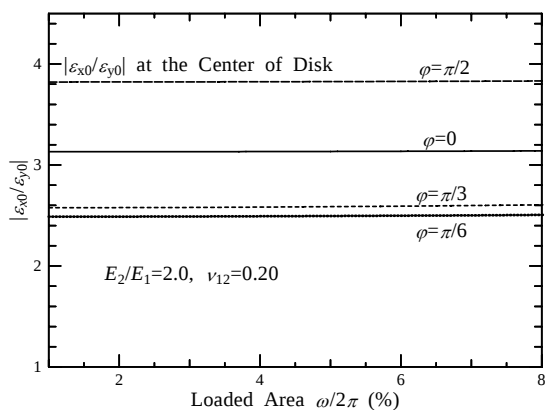
以上より，圧裂試験における载荷幅 ω は未知ではあるが，弾性主軸と载荷軸との傾き φ の値に関わらず载荷が 1% から 8% の範囲では円柱供試体の断面中心部での载荷方向のひずみとそれに対する直角方向のひずみの比の絶対値 $|\varepsilon_0/\varepsilon_0|$ はほぼ一定であることが示された．したがって，载荷幅 1% から 8% の間で任意の载荷幅について異方性比 E_2/E_1 と载荷方向に対して直角方向に発生するひずみ ε_0 に対する载荷軸方向に発生するひずみ ε_0 の比の絶対値 $|\varepsilon_0/\varepsilon_0|$ との関係あらかじめ計算して図表にまとめておけば，円柱供試体の断面中心でのひずみ量を計測することにより弾性主軸の方向が既知の異方性脆性材料に対する圧裂試験による異方性比の決定が可能となる．図-6は

載荷面積 $\omega/2\pi=2\%$ について、異方性比 E_2/E_1 とひずみの比 $|\varepsilon_x/\varepsilon_y|$ との関係を示したものである。ポアソン比は岩石材料が取りうる $\nu_{12}=0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35$ について求めた。載荷方向と E_1 の方向がなす角 φ は0のほか、 E_1 の方向に載荷することが困難な場合も想定して $\pi/2$ の場合についても図に示した。圧裂試験を行う際に、供試体断面中心に2方向ひずみゲージの1方向を載荷軸に沿って貼付すればもう1方向はこの方向に対して直角方向のひずみを測ることができるので、 $|\varepsilon_x/\varepsilon_y|$ を求めることができる。図-6のいずれの曲線も単調に増加しており $|\varepsilon_x/\varepsilon_y|$ と

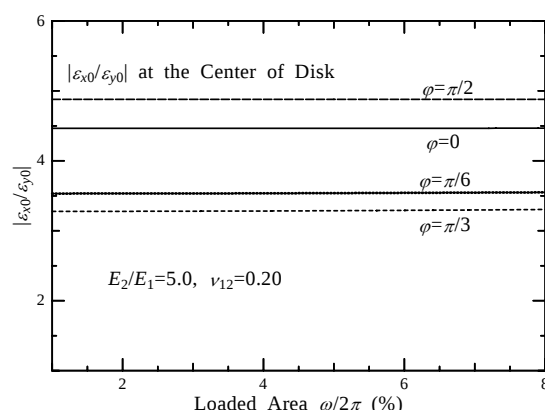
E_2/E_1 は1対1で対応しているの、図-6を用いれば $|\varepsilon_x/\varepsilon_y|$ の値から供試体の異方性比を求めることができる。

5. 結言

圧裂試験はその取り扱いが容易なため、脆性材料の引張強さを求める目的で広く用いられてきた。しかしながら、これは等方性の理論に基づいたもので岩盤材料などに多くみられる直交異方性材料では異方性比や弾性主軸の方向によって異なる応力の分布となることが

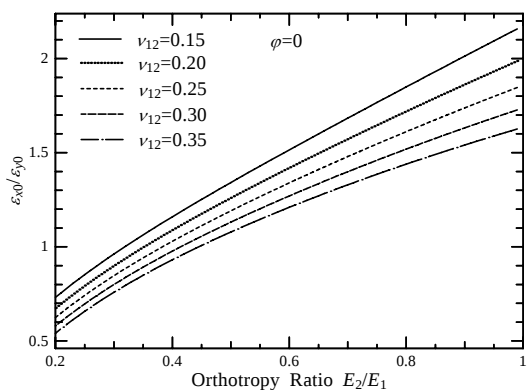
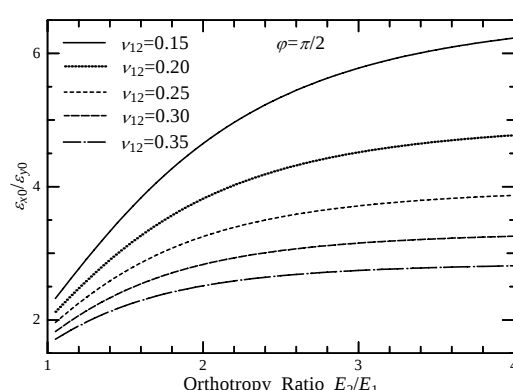
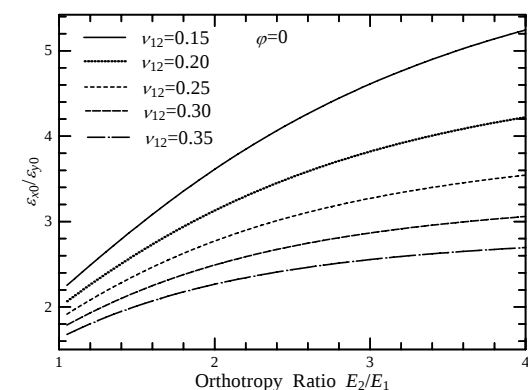


(a) $E_2/E_1=2.0$

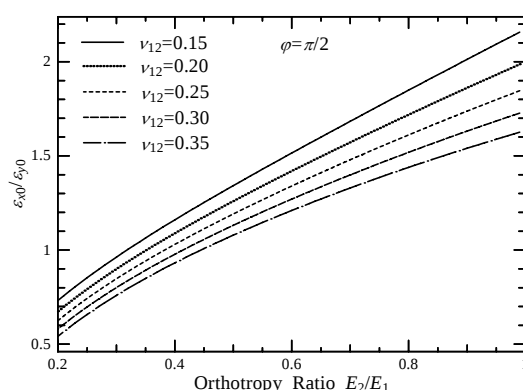


(b) $E_2/E_1=5.0$

図-5 数種の弾性主軸の下での載荷面積と供試体中心で発生するひずみの比



(a) $\varphi=0$



(b) $\varphi=\pi/2$

図-6 異方性比とひずみの比の関係

数値計算で示されてきた。したがって、直交異方性材料の引張強さを求めるためには異方性比と弾性主軸の傾きの情報が必要であった。

本論文では、岩石材料への適用を想定して、弾性主軸の方向が既知の材料に対する圧裂試験について、岩石が取りうる範囲の数種のポアソン比に対し供試体中心部に発生するひずみをあらかじめ弾性厳密解を用いて計算して図表にまとめ、試験結果より異方性比を求める手順について提示した。本論文により、圧裂試験を用いて岩石材料に対してより正確に異方性比を把握する手法の一つが確立されたものと考えられる。

参考文献

- 1) 森口繁一: 2次元弾性論, p.40, 岩波書店, 1957.
- 2) Lemmon, R. K. and Blacketter, D. M. : Stress Analysis of an Orthotropic Material under Diametral Compression, *Experimental Mechanics*, 36, pp. 204-211, 1996.
- 3) Exadaktylos, G. E. and Kaklis, K.N. : Applications of an explicit solution for the transversely isotropic circular disc compressed diametrically, *Int. J. of Rock Mech. and Mining Sci.*, 38, pp.227-243, 2001.
- 4) Claesson, J. and Boholi, B. : Brazilian test: stress field and tensile strength of anisotropic rock using an analytical solution, *Int. J. of Rock Mech. and Mining Sci.*, 39, pp.991-1004, 2002.
- 5) Tsutsumi, T. and Hirashima, K. : Analysis of Orthotropic Circular Disks and Rings under Diametrical Loading, *Structural Eng. and Mech.*, 9(1), pp. 37-50, 2000.
- 6) 堤 隆: 弾性主軸方向が確認できる材料に対する圧裂試験による縦弾性係数異方性の決定方法, 材料, (掲載決定), 2011.
- 7) Jianhong, Y., Wu, F. Q. and Sun, J. Z. : Estimation of the tensile elastic modulus using Brazilian disc by applying diametrically opposed concentrated loads, *Int. J. of Rock Mech. and Mining Sci.*, 46, pp.568-76, 2009.
- 8) Lekhnitskii, S.G. : *Anisotropic Plate*, p. 141, Gordon & Breach, 1968.
- 9) 川久保昌平, 堤 隆, 平島健一 : 任意分布の荷重を受ける異方性円板の応力, 変位場, 日本機械学会論文集 (A 編), 62(599), pp.1626-1633, 1996.

METHOD OF DETERMINATION FOR ORTHOTROPY RATIO OF ROCK MATERIAL KNOWN THE ORTHOTROPY DIRECTION WITH BRAZILIAN TEST

Takashi TSUTSUMI

In this paper, the method of determination for orthotropy ratio of orthotropic rock material in diametrical compression test is shown. For this method, strains are calculated on the direction of parallel and normal to compression at the center of cross section under several anisotropy ratios with theoretical solution. And the relationship between ratio of these strains and anisotropic ratio is shown by the graphical representation shown in this paper. Using this graphical representation, orthotropy ratio can be obtained with measuring strains occurred at center of cross section of specimen.