

理論解を用いた異方性円柱に対する 圧裂試験の変位解析

堤 隆^{1*}・岩下 寛²

¹鹿児島工業高等専門学校 土木工学科 (〒899-5193 鹿児島県霧島市隼人町真孝1460-1)

²鹿児島工業高等専門学校専攻科 土木工学専攻 (〒899-5193 鹿児島県霧島市隼人町真孝1460-1)

*E-mail: tsutsumi@kagoshima-ct.ac.jp

コンクリートなどの脆性材料の引張強度は円柱供試体の直径軸上に対向する集中荷重を載荷させる圧裂試験によって求められる。これは、等方性材料の場合は載荷部近傍を除いた載荷軸上には集中荷重と直角方向に様な引張応力が生じることによる。しかし、硬い岩などの異方性材料の場合は、様な引張を示さないばかりか異方性比や弾性主軸の傾きによって異なる引張応力の分布が理論解を用いた解析によって示された。本稿では、理論解を用いた平面ひずみ状態での円柱形供試体に対する圧裂試験によって発生する変位の解析を行い、平面応力状態で行われた既往の解析結果との比較を行う。

Key Words : *elasticity, orthotropy, tensile stress, diametral compression test, plane strain condition*

1. 緒言

コンクリートや硬い岩石など脆性材料の引張強度を求める試験方法として、円柱形試験片を平行な平板によって上下から加圧する圧裂試験が広く用いられてきた。これは、試験片の作成やチャックによる試験片のつかみや偏心荷重によるわずかな曲げなどに細心の注意を払う必要がある純粋引張試験に比べれば簡単に試験を行うことができるからである。

等方性弾性解析によれば、直径軸上に対向する集中荷重を載荷すると載荷部近傍を除いた載荷軸上には直角方向に様な引張応力が発生する¹⁾。脆性材料は破壊する前の塑性変形が小さく破壊は弾性範囲内で生じることから弾性理論で力学挙動を説明でき、かつ脆性材料の引張強度は一般に低いので載荷軸上に発生する様な引張応力によって破壊する。このことがコンクリートなどの等方性と考えられる脆性材料に対して圧裂試験によって引張強度を求める理論的な根拠となる。

しかしながら、直交異方性材料に対して二次元問題で平面応力状態での円周に対して2%、4%、8%の載荷面積としたLemmonらによる有限要素解析²⁾、あるいは理論解を用いて集中荷重の再現性を可能にしたExadaktylosによる解析³⁾、著者らによる解析⁴⁾では載荷軸上に発生する引張応力は様な分布を示さないだけでなく、同じ材料であっても載荷する方向によって異なった分布となることが

示された。さらに、円柱供試体のように十分な奥行きを持つ平面ひずみ状態での理論解を用いた応力解析では同じ載荷条件で平面応力状態で解析した場合にくらべて大きな引張応力が発生することが示された⁵⁾。

本論文では、複素平面上で定義されたLekhnitskiiの解⁶⁾に不足する式を補った理論解⁷⁾を用いて円柱供試体に対する解析に適切と考えられる平面ひずみ状態で、圧裂試験時に発生する変位の解析方法を示す。さらに、数値計算例を示し、平面応力状態での解析結果と比較を行う。なお、本論文における異方性は方向による弾性係数あるいは変形係数の違いを表し、強度異方性を意味するものではない。

2. 基礎方程式

本論文では、図-1に示すような弾性主軸と載荷軸とのなす角が φ 、弾性主軸方向の弾性係数がそれぞれ E_1 、 E_2 、半径 a の直交異方性円柱供試体の直径軸上に対向する集中荷重 P が作用する問題を対象とする。

載荷軸を x 、載荷軸に対する面内の直角方向を y とすれば、円柱試験片の境界周縁における x 軸から左回りの外荷重合力の法線方向 n に対する x 方向成分および y 方向成分 X_n 、 Y_n は応力成分 σ_x 、 σ_y および τ_{xy} と次の関係にある。

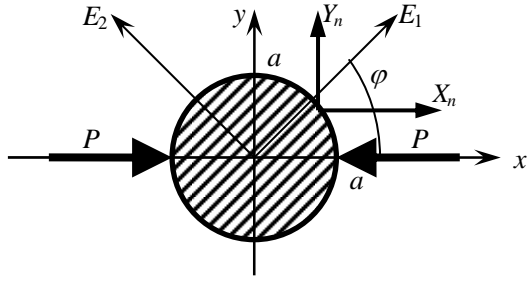


図-1 供試体の載荷軸と弾性主軸の方向

$$\left. \begin{aligned} X_n &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y), \\ Y_n &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、

$$\cos(n, x) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}. \quad (2)$$

が成立する。ただし、 s は微小要素の境界上の長さを表す。これらの成分 X_n, Y_n が与えられるとき、応力、変位を求めるための複素関数 $\Phi_k(z_k)$ の満足すべき条件は次のように表される⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} 2\operatorname{Re}[\mu_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 \Phi_2(z_2)] &= \int_0^s X_n ds, \\ 2\operatorname{Re}[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)] &= -\int_0^s Y_n ds. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

なお、応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ はおよび x 方向および y 方向の変位成分 u_x, u_y は次式により表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\operatorname{Re}[\mu_1^2 \Phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2'(z_2)], \\ \sigma_y &= 2\operatorname{Re}[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)], \\ \tau_{xy} &= -2\operatorname{Re}[\mu_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \Phi_2'(z_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} u_x &= 2\operatorname{Re}[p_1 \Phi_1(z_1) + p_2 \Phi_2(z_2)], \\ u_y &= 2\operatorname{Re}[q_1 \Phi_1(z_1) + q_2 \Phi_2(z_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに、 Re は括弧内の複素関数の実部を、複素関数に付く'は z に関する一階の微分を表す。 a'_{ij} ($i, j=1, 2, 3, 6$)を

図-2 (a)に示すような十分な奥行きがある平面ひずみ状態での弾性コンプライアンスとすると、次式のような関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a'_{11} \sigma_x + a'_{12} \sigma_y + a'_{13} \sigma_z, \\ \varepsilon_y &= a'_{12} \sigma_x + a'_{22} \sigma_y + a'_{23} \sigma_z, \\ \varepsilon_z &= a'_{13} \sigma_x + a'_{23} \sigma_y + a'_{33} \sigma_z, \\ \gamma_{xy} &= a'_{66} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに ε, γ はそれぞれ添字方向の垂直ひずみ、せん断ひずみを表す。式(4)中の複素パラメータ μ_1, μ_2 は次式の特微方程式の複素根として求められる。

$$a'_{11} \mu^4 - 2a'_{16} \mu^3 + (2a'_{21} + a'_{66}) \mu^2 - 2a'_{26} \mu + a'_{22} = 0. \quad (7)$$

図-2 (b)に示すような奥行きのない平面応力状態下で弾性主軸と座標軸が一致するとき($\phi=0$)の弾性コンプライアンス a^0_{ij} ($i, j=1, 2, 6$)は以下のように表される。

$$\left. \begin{aligned} a^0_{11} &= (1 - \nu_{13} \nu_{31}) / E_1, \\ a^0_{22} &= (1 - \nu_{23} \nu_{32}) / E_2, \\ a^0_{12} &= -(\nu_{12} + \nu_{23} \nu_{32}) / E_1, \\ a^0_{66} &= 1/G, \quad a^0_{16} = a^0_{26} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

また、 a^0_{33} は奥行き方向の弾性係数である。座標軸と弾性主軸に任意の傾き ϕ がある場合、平面応力状態での弾性コンプライアンス a_{ij} ($i, j=1, 2, 6$)は以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= a^0_{11} \cos^4 \phi + (2a^0_{12} + a^0_{66}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi \\ &\quad + a^0_{22} \sin^4 \phi \\ &\quad + (a^0_{16} \cos^2 \phi + a^0_{26} \sin^2 \phi) \sin 2\phi, \\ a_{22} &= a^0_{11} \sin^4 \phi + (2a^0_{12} + a^0_{66}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi \\ &\quad + a^0_{22} \cos^4 \phi \\ &\quad - (a^0_{16} \sin^2 \phi + a^0_{26} \cos^2 \phi) \sin 2\phi, \\ a_{12} &= a^0_{12} + (a^0_{11} + a^0_{22} - 2a^0_{12} - a^0_{66}) \\ &\quad \times \sin^2 \phi \cos^2 \phi \\ &\quad + \frac{1}{2}(a^0_{26} - a^0_{16}) \sin 2\phi \cos 2\phi, \\ a_{66} &= a^0_{66} + 4(a^0_{11} + a^0_{22} - 2a^0_{12} - a^0_{66}) \\ &\quad \times \sin^2 \phi \cos^2 \phi \\ &\quad + 2(a^0_{26} - a^0_{16}) \sin 2\phi \cos 2\phi, \\ a_{16} &= \left[a^0_{22} \sin^2 \phi - a^0_{11} \cos^2 \phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(2a^0_{12} + a^0_{66}) \cos 2\phi \right] \\ &\quad \times \sin 2\phi + a^0_{16} \cos^2 \phi (\cos^2 \phi - 3\sin^2 \phi) \\ &\quad + a^0_{26} \sin^2 \phi (3\cos^2 \phi - \sin^2 \phi), \\ a_{26} &= \left[a^0_{22} \cos^2 \phi - a^0_{11} \sin^2 \phi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(2a^0_{12} + a^0_{66}) \cos 2\phi \right] \\ &\quad \times \sin 2\phi + a^0_{16} \sin^2 \phi (3\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\ &\quad + a^0_{26} \cos^2 \phi (\cos^2 \phi - 3\sin^2 \phi). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

さらに、これらを用いて式(6)中の平面ひずみ状態下の

弾性コンプライアンス a'_{ij} は以下の式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}^0} \quad (i, j = 1, 2, 6), \\ a'_{33} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

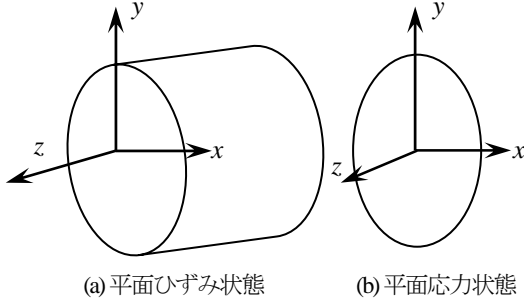


図-2 平面ひずみ状態と平面応力状態

本論文では z 方向に奥行きのある円柱形供試体を扱うので平面ひずみ状態の下でモデル化を行う。

3. 問題の定式化

面外方向に弾性主軸の傾きを持たない直交異方性円柱の直径方向に集中荷重 P が作用する問題の定式化を行う。外部境界上の x, y 方向の合応力は次式のように項数 M のフーリエ級数に展開される。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^s X_n ds &= \beta_0 + \sum_{m=1}^M (\beta_m e^{im\theta} + \bar{\beta}_m e^{-im\theta}), \\ -\int_0^s Y_n ds &= \alpha_0 + \sum_{m=1}^M (\alpha_m e^{im\theta} + \bar{\alpha}_m e^{-im\theta}). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここに上付きのバーは複素共役を表す。 x 軸上に対向する集中荷重 P が作用する場合、 α_m, β_m は以下のようになる。

$$\alpha_m = 0, \beta_m = -\frac{iP}{2m\pi} \{1 - (-1)^m\} \quad (12)$$

図-3 に示すような長軸 a 、短軸 b の直交異方性楕円板の複素応力関数は次式のような級数で展開される⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= A_0 + A_1 z_1 + \sum_{m=1}^M A_m P_{1m}(z_1), \\ \Phi_2(z_2) &= B_0 + B_1 z_2 + \sum_{m=1}^M B_m P_{2m}(z_2). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここに、 $P_{km}(z_k)$ ($k=1, 2$) は z_k の m 次のべき級数で、次式で表

される。

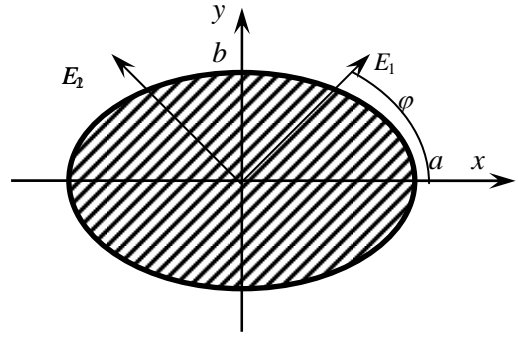


図-3 解が表す楕円体

$$\left. \begin{aligned} P_{km}(z_k) &= -\frac{1}{(a - i\mu_k b)^m} \\ &\times \left\{ \left(z_k + \sqrt{z_k^2 - a^2 - \mu_k^2 b^2} \right)^2 \right. \\ &\left. + \left(z_k - \sqrt{z_k^2 - a^2 - \mu_k^2 b^2} \right)^2 \right\} \quad (14) \\ &\quad (k=1, 2). \end{aligned} \right\}$$

この問題では円柱供試体を対象としているので計算では $a=b$ とおけばよい。複素変数 z_k およびべき級数 $P_{km}(z_k)$ は円柱境界上で以下の式になる。

$$\left. \begin{aligned} z_k &= \frac{1}{2} \left\{ (a - \mu_k b) e^{i\theta} + (a + i\mu_k b) e^{-i\theta} \right\}, \\ P_{km} &= -\left(e^{im\theta} + t_k^m e^{-im\theta} \right), \\ t_k &= \frac{a + i\mu_k b}{a - i\mu_k b}. \quad (k=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

複素関数 $\Phi_k(z_k)$ を用いると、合応力は式(3)で表わされるので。

式(3)に式(15)を代入して境界上の合応力を与える式をつくり、式(11)と $e^{im\theta}, e^{-im\theta}$ ($1 \leq m \leq M$) の項同士の係数を比較して次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} A_1 + B_1 + \bar{A}_1 + \bar{B}_1 &= \frac{1}{a} (\alpha_1 + \bar{\alpha}_1), \\ \mu_1 A_1 + \mu_2 B_1 + \bar{\mu}_1 \bar{A}_1 + \bar{\mu}_2 \bar{B}_1 \\ &= \frac{1}{ib} (\bar{\alpha}_1 - \alpha_1) = \frac{1}{a} (\beta_1 + \bar{\beta}_1), \\ \mu_1^2 A_1 + \mu_2^2 B_1 + \bar{\mu}_1^2 \bar{A}_1 + \bar{\mu}_2^2 \bar{B}_1 \\ &= \frac{1}{ib} (\bar{\beta}_1 - \beta_1). \quad (m=1) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_m + B_m + \bar{t}_1^m \bar{A}_m + \bar{t}_2^m \bar{B}_m &= -\alpha_m, \\
 \mu_1 A_m + \mu_2 B_m + \bar{\mu}_1 \bar{t}_1^m \bar{A}_m + \bar{\mu}_2 \bar{t}_2^m \bar{B}_m &= -\beta_m, \\
 t_1^m A_m + t_2^m B_m + \bar{A}_m + \bar{B}_m &= -\bar{\alpha}_m, \\
 \mu_1 t_1^m A_m + \mu_2 t_2^m B_m + \bar{\mu}_1 \bar{A}_m + \bar{\mu}_2 \bar{B}_m &= -\bar{\beta}_m.
 \end{aligned} \right\} (17)$$

$(m \geq 2)$

$m=1$ の場合は A_1 と B_1 のそれぞれ実部と虚部の合わせて4つの未知数に対して式が3つであるためにこれを解くことができない。そこで、剛体回転を0とする条件を入れることで次式が導かれる⁵⁾。

$$\begin{aligned}
 (q_1 - \mu_1 p_1) A_1 + (q_2 - \mu_2 p_2) B_1 \\
 + (\bar{q}_1 - \bar{\mu}_1 \bar{p}_1) \bar{A}_1 + (\bar{q}_2 - \bar{\mu}_2 \bar{p}_2) \bar{B}_1 = 0.
 \end{aligned} \quad (18)$$

ただし、

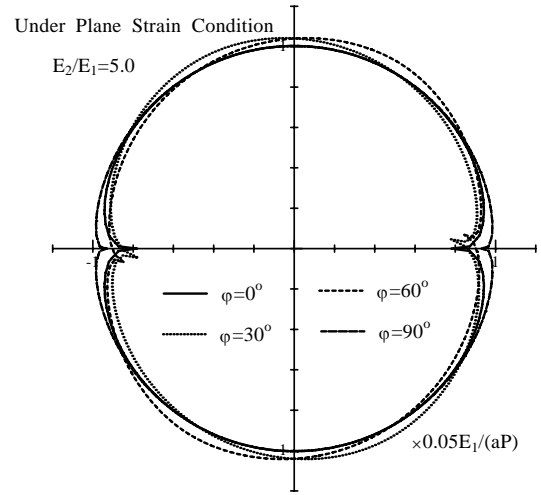
$$\left. \begin{aligned}
 p_1 &= a'_{11} \mu_1^2 + a'_{12}, & p_2 &= a'_{11} \mu_2^2 + a'_{12}, \\
 q_1 &= (a'_{12} \mu_1^2 + a'_{22}) / \mu_1, \\
 q_2 &= (a'_{12} \mu_2^2 + a'_{22}) / \mu_2.
 \end{aligned} \right\} (19)$$

式(16)に式(18)を加えることによって、 A_1 、 B_1 が完全に導かれることになる。

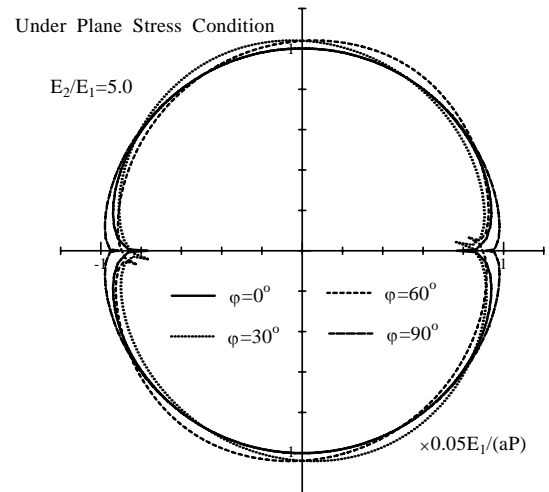
4. 数値計算例

図-4は $E_2/E_1=5.0$ の直交異方性円柱の直径方向に対向する集中荷重 P を載荷したときの変形の様子を表したものである。(a)は平面ひずみ状態での解析、(b)は平面応力状態での解析であり、いずれも弾性主軸と載荷方向のなす角が $\varphi=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ について示した。(a)(b)ともに変形量を $0.05E_1/(Pa)$ 倍して基準化した。平面ひずみ状態、平面応力状態ともに載荷方向と弾性主軸が一致する $\varphi=0^\circ, 90^\circ$ で載荷点での変形方向が載荷方向に一致している。 $\varphi=90^\circ$ の場合は載荷方向の弾性係数が $\varphi=0^\circ$ の場合より大きいので、 x 方向の変位は小さくなっている。

$\varphi=30^\circ$ のときは(a)(b)ともに x 方向への変位は $\varphi=0^\circ$ のときとほぼ同じであるが、弾性係数が小さくなる方向に変形している。 $\varphi=60^\circ$ のときは(a)(b)ともに x 方向への変位は $\varphi=0^\circ, 30^\circ$ の場合にくらべて減少しているものの、弾性係数が小さくなる方向への変形が大きくなっている。弾性主軸と載荷方向が一致する場合、 y 方向の膨張は見られないが、載荷軸と弾性主軸が異なる $\varphi=30^\circ, 60^\circ$ では y 方向への膨張が見られる。



(a) 平面ひずみ状態



(b) 平面応力状態

図-4 集中荷重による変形の様子

図-5は平面ひずみ状態および平面応力状態における異方性比 E_2/E_1 と載荷点での x 方向の変位 u_x を弾性係数 E_1 、半径 a 、荷重 P で基準化したものとの関係を示す。載荷軸と弾性主軸の傾きは $\varphi=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ とした。いずれも平面応力状態の方が平面ひずみ状態よりも変位が大きくなっている。 $\varphi=0^\circ, 45^\circ$ では異方性比が大きくなるにしたがって変位も大きくなっているが、 $\varphi=90^\circ$ では逆に異方性比が大きくなるにしたがって変位は小さくなっている。

図-6は平面ひずみ状態および平面応力状態における載荷軸と弾性主軸との傾き φ と載荷点での x 方向の変位 u_x を弾性係数 E_1 、半径 a 、荷重 P で基準化したものとの関係を示す。異方性比 E_2/E_1 はそれぞれ2.0, 3.0, 4.0, 5.0とした。すべての異方性比で平面応力状態の方が平面ひずみ状態よりも大きな変位発生していることがわかる。また、異方性比が大きくなるにしたがって $\varphi=90^\circ$ での変位と $\varphi=0^\circ$ での変位の差が大きくなっていることもわかる。

$E_2/E_1=2.0$ では φ が大きくなるにしたがって変位は小さくなってきているが、 $E_2/E_1=3.0$ では $\varphi=22^\circ$ 付近で最大値が見られるようになり、異方性比が大きくなるほど最大値は明瞭に表れるようになる。

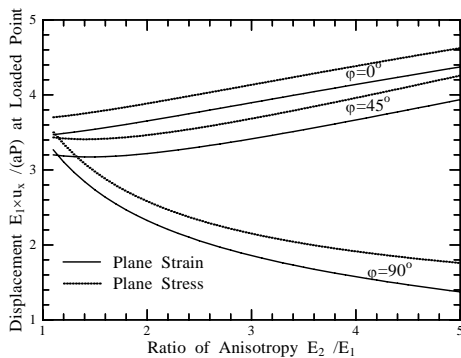


図-5 異方性比と載荷点での載荷方向の変位

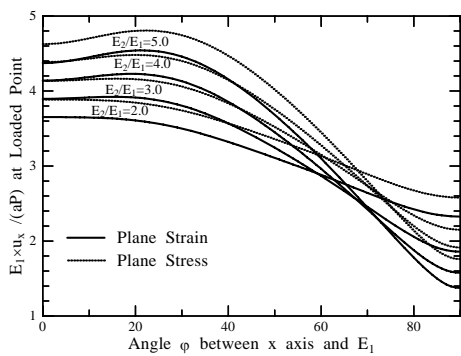


図-6 弾性主軸の傾きと載荷点での載荷方向の変位

図-7は平面ひずみ状態において載荷軸上に発生する x 方向の変位 u_x の様子を表したものである。横軸は中心からの距離を半径 a で基準化したものであり、横軸は u_x を弾性係数 E_1 、半径 a 、集中荷重 P で基準化した。載荷軸と弾性主軸の傾きは $\varphi=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ で計算を行った。いずれも中心では変位が0となり中心から離れるにしたがって変位は大きくなる。さらに、載荷点付近で著しく大きくなっている様子もわかる。

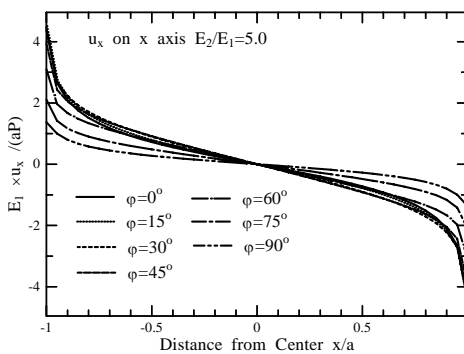


図-7 載荷軸上に発生する載荷方向の変位

図-8は載荷軸上に発生する y 方向の変位 u_y の様子を表したものである。横軸は中心からの距離を半径 a で基準化したものであり、横軸は u_y を弾性係数 E_1 、半径 a 、集中荷重 P で基準化した。弾性主軸と載荷軸が一致する $\varphi=0^\circ, 90^\circ$ では載荷方向に対して垂直の方向には変位が発生していない。 $\varphi=15^\circ, 30^\circ$ では中心から離れると弾性係数が大きくなる方向に変位が発生するが、それぞれ x/a が約0.9、約0.8のところで変位は0になり、それより外側で弾性係数が小さな方向に変位が生じている。 $\varphi=45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ では中心から離れるにしたがって弾性係数の小さな方向への変位が増加している。

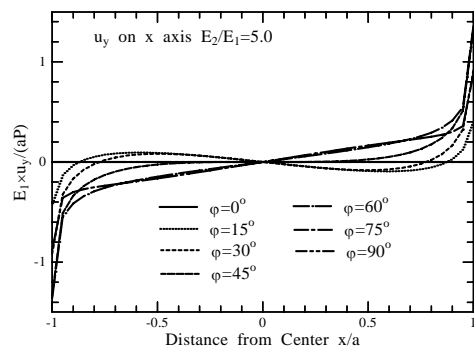


図-8 載荷軸上に発生する垂直方向の変位

5. 結言

直交異方性材料への圧裂試験に対し、理論解を用いた解析がExadaktylosらによって、有限要素解析による解析がLemmonらによって発表された。これらは平面応力状態の下で行われたものであるから、薄い供試体片に対する試験に適用が限られていた。

本論文では、複素平面上で定義されたLekhnitskiiの理論解に不足した式を補い平面ひずみ状態でこの問題のモデル化を行った。このことによって、直交異方性材料について円柱形供試体を用いた圧裂試験において生じる変位の数値解析が可能となった。さらに、有限要素法では不可能であった集中応力の再現性も可能にした。

数値計算例では、同じ異方性比の円柱形供試体に圧裂試験を行った場合であっても、生じる変位は平面応力状態と同様に載荷軸と弾性主軸のなす角によって異なることが示された。

参考文献

- 1) 森口繁一：2次元弾性論，p.40，岩波書店，1957。
- 2) Lemmon, R. K. and Blacketter, D. M. : Stress Analysis of an Orthotropic Material under Diametral Compression, *Experimental Mechanics*. 36, pp.

- 204-211, 1996.
- 3) Exadaktylos, G. E. and Kaklis, K.N. : Applications of an explicit solution for the transversely isotropic circular disc compressed diametrically, *Int. J. of Rock Mech. and Mining Sci.*, 38, pp.227-243, 2001.
 - 4) Tsutsumi, T. and Hirashima, K. : Analysis of Orthotropic Circular Disks and Rings under Diametrical Loading, *Structural Eng. and Mech.*, 9(1), pp. 37-50, 2000.
 - 5) 堤 隆, 上堀内亮太, 岩下 寛: 異方性供試体に対する圧裂試験によって生じる引張応力の理論解を用いた解析, 第 38 回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, CD-ROM, 2009.
 - 6) Lekhnitskii, S.G. : *Anisotropic Plate*, p. 141, Gordon & Breach, 1968.
 - 7) 川久保昌平, 堤 隆, 平島健一 : 任意分布の荷重を受ける異方性だ円板の応力, 変位場, 日本機械学会論文集(A 編), 62(599), pp.1626-1633, 1996.

ANALYSIS FOR DISPLACEMENT OCCURRED UNDER DIAMETRAL COMPRESSION TEST USING THEORITICAL ORTHOTROPIC SOLUTION

Takashi TSUTSUMI and Hiroshi IWASHITA

In this study, the solution for orthotropic disk under plane strain condition is induced. The solution is induced with complex stress functions. These stress functions were induced by Lekhnitskii and expanded by one of authors before. For the diametral compression test, the finite element method has difficulties to represent the concentrated force. On the contrary, the method shown in this study can exactly represent the concentrated force. Some numerical results are shown and compared with results obtained under plane stress condition, and the differences between the displacement occurred under plane strain condition and those occurred under plane stress condition increases as the orthotropy ratio increases for some cases.