

地山物性の空間変動を考慮した 境界要素法の地下水流動解析への 適用性に関する検討

熊坂博夫

清水建設株式会社 技術研究所 (〒135-8530 東京都江東区越中島 3-4-17)

h.kumasaka@mac.com

数値解析手法の高度化に伴いより複雑なモデルによる予測解析が求められるようになってきている。このような要求の一つとして地山の不均質性を考慮する解析がある。この不均質性を考慮するためのモデル化において内部領域の要素分割を必要とする解析手法では、解析を行なうに当たり様々な課題が予想される。そこで、内部領域の要素分割を行わず物性の空間分布を考慮できる二重相反境界要素法を用いることが考えられるが、物性分布が複雑な場合にその適用性が課題となることが指摘されている。そこで、本論文では地下水流動解析を対象としてこの手法の適用性を検討した。その結果、地層処分などの広域な領域において透水係数が緩やかに変動する場合に対して十分適用可能であることを示した。

Key Words : *heterogeneity, numerical analysis, dual reciprocity boundary element method, groundwater flow analysis, geological disposal waste.*

1. はじめに

コンピュータにおけるハードの進歩は著しく、処理速度の飛躍的向上と大きな記憶容量の利用が可能となったことにより、大規模な解析も旧来のメインフレームやスーパーコンピュータから EWS や PC など小型コンピュータを用いて計算することが可能となっている。

一方、工学分野における数値解析の汎用ソフトも多数普及してきており、誰でも比較的容易に利用できる環境になってきている。そのため、解析対象の現象や解析目的に応じた解析手法の選択が可能となってきた。多くの分野において、従来はこの解析手法として主に有限要素法 (FEM) が用いられてきた。

岩盤・地盤工学の分野では、岩盤や地盤を連続体として取り扱う場合には前述の FEM を中心に有限差分法 (FDM) や境界要素法 (BEM) が用いられてきた。また、近年では岩盤や地盤の持つ不連続性や流動性を考慮した個別要素法 (DEM)¹⁾、不連続変形法 (DDA)²⁾あるいは粒子法 (MPS, HSP など)³⁾などの

研究・開発と実務への適用が進められており、解析手法も多様化してきている。

一方、岩盤や地盤は、均質とみなされる地層内であっても本来物性は一定でなく、ばらつき、変動あるいは構造的と呼ばれる分布特性を有している。著者⁴⁾はトンネル掘削時の周辺地山の応力や変形挙動に対して地山の不均質性が及ぼす影響について数値実験による検討を進めている。この検討では、不均質性は、均質な場合に比べ、その物性の空間分布特性が力学挙動に様々な影響を及ぼすことを報告している。このため、より現実に近い挙動を予測する際には、解析対象に対しこの不均質性を考慮することが重要と考えられる。

この物性の空間分布特性に起因する不均質性を考慮した解析では、解析対象の領域内を要素分割して個々の要素に物性データを与えて計算する FEM や FDM を用いる場合、この要素分割等のデータ作成に当たってはこれまで以上に注意が必要となる。

複雑な形状に対する要素分割のデータ作成作業は、現在は CAD などを利用して比較的容易に行うことが可能となっている。しかし、解析対象領域

内の物性分布を考慮する必要が生じるとともに解析精度を十分確保したいという従来の欲求もあり、要素分割・要素データ作成はこれまで以上に難しい作業となるように思われる。加えて、三次元解析ではその目的や精度および記憶容量などにおいてソフトとハードの両面の制約も考慮したモデルの要素分割を行なうことが求められるため、さらに困難な作業となるように思われる。

このような課題に対し FEM では、解析対象としている空間スケールよりも小さな物性の周期的な変動を考慮した均質化法⁵⁾やユーザーによる要素分割を必要としないメッシュフリー・メッシュレス法⁶⁾が提案、研究がなされている。しかし、後者においては、内部領域の積分（バックグラウンドセルによる積分）を行う場合に複雑な形状や不均質な物性分布を考慮することが、要素を明示的にデータとして与える従来の方法に比べ、その困難さを増させているように感じられる。

以上より、解析対象における領域内部の要素分割を必要としない不均質性を考慮した解析手法が必要になる場合もあると考えられる。そこで、この課題を解決する一つの方法として、領域内の要素分割を用いない二重相反境界要素法を適用することが考えられる。ただし、この手法は不均質性の分布特性が複雑な場合に、その適用性に課題があることが指摘されている⁷⁾。そこで、本論文では、定常浸透流問題（ポテンシャル問題）を対象とし、その適用性を検討したので報告する。

2. 二重相反境界要素法を用いた不均質地山中の定常浸透流解析の概要

(1) 境界積分方程式の導出

境界要素法⁸⁾は、一般には、解析領域の物性が均質な場合の基本解を用いている。このため、物性の異なる領域を持つ場合、各領域内で一定の物性となるように領域を細分化することで取り扱われてきている。あるいは、領域内の不均質性を考慮する場合、従来の境界積分方程式への定式化において、FEM, FDM と同様に離散化した内部領域に対する領域積分を行う必要があった。これに対し、Nadini ら⁹⁾は、二重相反境界要素法 (DRBEM: Dual reciprocity Boundary Element Method) を用いてこの領域積分を境界積分に置換する先駆的な研究を報告している。ここでは、定式化の概要を以下に示す。

地下浸透流問題において透水係数の変動を考慮した支配方程式は次式で表される。

$$\nabla \cdot (K \nabla \phi) = 0. \quad (1)$$

ここに、 $K = K(\mathbf{x})$ は透水係数、 $\phi = \phi(\mathbf{x})$ は全水頭（ポテンシャル）、 ∇ はナブラである。上式を展開して整理すると次式が得られる。

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{K} \nabla K \cdot \nabla \phi. \quad (2)$$

上式の右辺を $b(\mathbf{x})$ とおけば、次式のポアソン方程式が得られる。

$$\nabla^2 \phi = b(\mathbf{x}). \quad (3. a)$$

$$b(\mathbf{x}) = -\frac{1}{K} \nabla K \cdot \nabla \phi. \quad (3. b)$$

このポアソン方程式を満たす特解を $\bar{\phi}$ とすると、式 (3. a) は次式と表すことができる。

$$\nabla^2 \bar{\phi} = b(\mathbf{x}). \quad (4. a)$$

すなわち、次式となる。

$$\nabla^2 (\phi - \bar{\phi}) = 0. \quad (4. b)$$

よって、 $\bar{\phi} = \phi - \bar{\phi}$ と置くことにより、 $\bar{\phi}$ に対する新たなラプラス方程式とみなすことができ、従来の境界要素法と同様の定式化により境界積分方程式を導出し、解くことができる。

しかしながら、一般的な分布関数 $b(\mathbf{x})$ に対して、この特解 $\bar{\phi}$ を具体的に求めることは難しい。このため、本手法では、まず任意の位置 \mathbf{x} の $b(\mathbf{x})$ を解析対象領域を離散化した境界節点 (1 ~ N) と領域内節点 (1 ~ L) の各節点 \mathbf{x}_j において、係数 α_j とスカラーの近似関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$ を用いた線形和として次式で表す。

$$b(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j). \quad (5)$$

上式の近似関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$ の特解を利用することを考える。すなわち、式 (4. a) の特解 $\bar{\phi}$ も同様に係数 α_j と非同次項を近似関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$ とする特解 $\hat{\phi}_j = \hat{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$ の線形和で表すことができる。

$$\nabla^2 \hat{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j). \quad (6)$$

上式を式 (5) に代入すれば次式が得られる。

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \nabla^2 \hat{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j). \quad (7)$$

よって、式 (3. a) を式 (4. b) と表現したのと同様に次式を得ることができる。

$$\nabla^2 \left\{ \phi(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \hat{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) \right\} = 0. \quad (8)$$

上式から、境界積分方程式は次式と表される。

$$\begin{aligned} c_i \phi + \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma \\ - \sum_{j=1}^{N+L} \left(c_i \hat{\phi}_j + \int_{\Gamma} \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial n} \phi^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{\phi}_j \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma \right) \alpha_j \\ = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

ここに、 c_i は ϕ の境界要素および内部節点の幾何学的条件により定められる定数、 Γ は領域境界、 n は境界の法線方向、 ϕ^* はラプラス方程式の基本解であり、二次元の基本解は次式で与えられる。

$$\phi^* = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r}. \quad (10)$$

式 (9) の各項をベクトルとマトリクスで表現すると次式のようになる。

$$\mathbf{H}\phi - \mathbf{G}\mathbf{q} - (\mathbf{H}\hat{\Phi} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\boldsymbol{\alpha} = 0. \quad (11. a)$$

ここに、 ϕ , $\boldsymbol{\alpha}$, \mathbf{q} は各節点 i の ϕ_i と α_i および境界点 i の $\partial\phi/\partial n$ によるベクトルであり、マトリクス \mathbf{H} , \mathbf{G} , $\hat{\Phi}$, $\hat{\mathbf{Q}}$ の各成分は次式のようになる。

$$H_{ij} = c_i \delta_{ij} + \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma_j. \quad (11. b)$$

$$G_{i,j} = \int_{\Gamma_j} \phi^* d\Gamma_j. \quad (11. c)$$

$$\hat{\Phi}_{i,j} = \hat{\phi}_{i,j} = \hat{\phi}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j). \quad (11. d)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_{i,j} = \frac{\partial \hat{\phi}_{i,j}}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \hat{\phi}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j). \quad (11. e)$$

ここに、 δ_{ij} はクロネッカのデルタである。

係数ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ は式 (6) をマトリクスとベクトルで表示すれば次式で表される。

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{b}. \quad (12)$$

上式は式 (3. a) または式 (3. b) より、ベクトル \mathbf{b} は領域の $\phi(\mathbf{x})$ で表される。そこで、 $\phi(\mathbf{x})$ を式 (6) と同様に各点の係数 β_i と近似関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$ を用いた線形和として表現する。

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N+L} \beta_j \cdot f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j). \quad (13)$$

したがって、式 (3. b) に代入し次式を得る。

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}_i) = -\frac{1}{K(\mathbf{x}_i)} \nabla K(\mathbf{x}_i) \cdot \nabla \left\{ \sum_{j=1}^{N+L} \beta_j \cdot f(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \right\}, \quad (14)$$

上式をベクトルとマトリクスで表示すると次式となる。

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}_K \boldsymbol{\beta} = \mathbf{F}_K \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\phi}. \quad (15. a)$$

ここに、 \mathbf{F}_K は次式のマトリクスとなる。

$$\mathbf{F}_K = \left[\sum_{j=1}^{N+L} -\frac{1}{K(\mathbf{x}_i)} \nabla K(\mathbf{x}_i) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \right]. \quad (15. b)$$

したがって、式 (12) は次式に書き直すことができる。

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}_K \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\phi}. \quad (16)$$

式 (11. a) に代入し次式が得られる。

$$\left\{ \mathbf{H} - (\mathbf{H}\hat{\Phi} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}_K \mathbf{F}^{-1} \right\} \boldsymbol{\phi} - \mathbf{G}\mathbf{q} = 0. \quad (17)$$

上式は境界要素と内部節点の ϕ と境界要素の $\partial\phi/\partial n$ によってつくられる連立方程式となる。

(2) 近似関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$ と特解 $\hat{\phi}$ について

近似関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$ を一意的に定めることは難しく、本手法が提案されてからしばらくの間は、 r の多項式や \log 関数などが用いられていたが、近年、Chen ら¹⁰⁾ により Wendland の CS-RBFs (compactly supported radial basis functions) を用いることが提案され、これを用いた報告が多数なされている。また、田中ら¹¹⁾ もこの関数を用いることで良い結果が得られることを報告している。そこで、本論文も同様に C2 クラスの関数として以下の式を用いることとした。

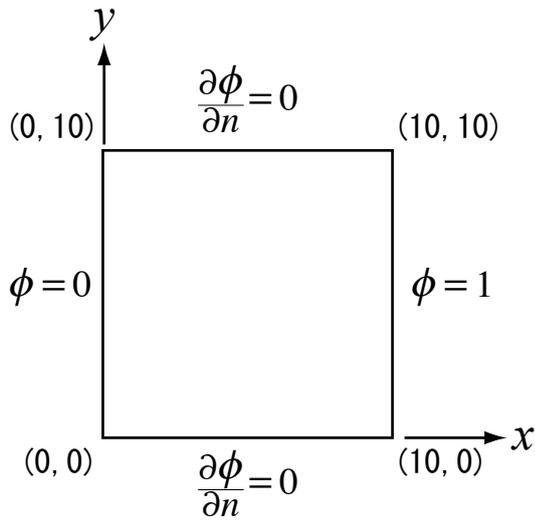


図-1 解析モデルと境界条件

$$f(x, x_j) = \begin{cases} (1 - r/a)^3 (3r/a + 1), & r \leq a, \\ 0, & r \geq a. \end{cases} \quad (18. a)$$

$$\hat{\phi}(x, x_j) = \begin{cases} \frac{1}{4}r^2 - \frac{3}{8} \cdot \frac{r^4}{a^2} + \frac{8}{25} \cdot \frac{r^5}{a^3} - \frac{1}{12} \frac{r^6}{a^4}, & r \leq a, \\ 0, & r \geq a. \end{cases} \quad (18. b)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \hat{\phi}(x, x_j) = \begin{cases} \left(r_1 \frac{\partial x_1}{\partial n} + r_2 \frac{\partial x_2}{\partial n} \right) \cdot \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \frac{8}{5} \cdot \left(\frac{r}{a} \right)^3 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r}{a} \right)^4 \right\}, & r \leq a, \\ \left(r_1 \frac{\partial x_1}{\partial n} + r_2 \frac{\partial x_2}{\partial n} \right) \times \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{r}{a} \right)^2, & r \geq a. \end{cases} \quad (18. c)$$

3. 定常浸透流（定常ポテンシャル）解析への適用性の検討

(1) 透水係数が周期性を持つ場合の検討

a) 解析モデルと検討条件

x 方向のみを考慮した一次元問題で透水係数 $K(x)$ が周期性を有する場合として次式を用いる。

$$K(x) = 2 + \sin(x). \quad (19. a)$$

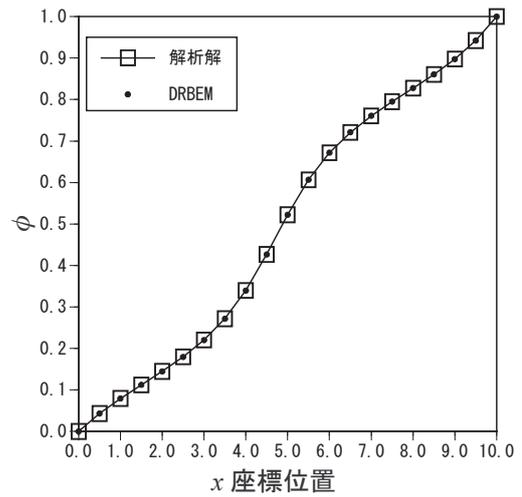


図-2 二重相反境界要素法による解と解析解の比較

DRBEM の解析モデルを図-1 に示す。このときの境界条件を次式で与える。

$$\phi(x) = 0 \text{ at } x = 0, \phi(x) = 1 \text{ at } x = 10. \quad (19. b)$$

DRBEM の解析モデルは 20×20 に境界と内部に節点を配置して計算する。

b) 解析結果

一次元問題となるため、式 (3. a) は常微分方程式となる。この常微分方程式の解析解は次式となる。

$$\phi(x) = C_1 \left\{ \arctan \left(\frac{2 \tan(x/2) + 1}{\sqrt{3}} \right) - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}. \quad (20. a)$$

ここに、 C_1 は次式で与えられる係数である。

$$C_1 = \frac{1}{\left\{ \arctan \left(\frac{2 \cdot \tan 5 + 1}{\sqrt{3}} \right) - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}}. \quad (20. b)$$

DRBEM の解析モデルにおける y 軸方向中央 ($y=0.5$) の位置の x 方向の全水頭（ポテンシャル） ϕ の分布と解析解の分布の比較を図-2 に示す。

図に示されるように両者は良い一致を示していることがわかる。

(2) 二次元定常浸透流解析（二次元定常ポテンシャル問題）において透水係数が周期的に変動する場合について

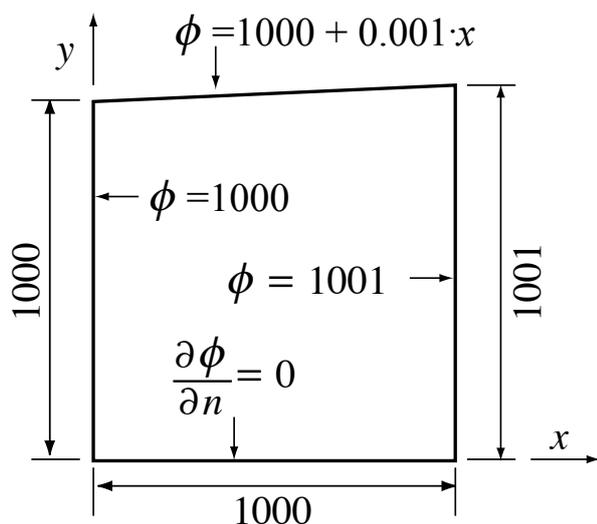


図-3 解析モデルと境界条件

a) 解析モデルと検討条件

地層処分の地下水流動解析のように比較的広い範囲を対象とする。この領域に対して x, y 方向に周期性を考慮した解析モデルを図-3に示す。

透水係数 $K(x)$ が周期性を有する場合として次式を用いる。

$$K(x) = 10^{-7} \left[7 + \sin\left(\frac{2\pi \cdot x}{L_x} + 50\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot y}{L_y} + 50\right) \right] \quad (21. a)$$

$$L_x = L_y = 400. \quad (21. b)$$

側方を静水圧条件（ポテンシャル：一定）、底盤を不透水境界（フラックス：0）、上部境界面を水面（ポテンシャル：規定）とした。このときの境界条件を図-3に示す。

解析モデルは 40×40 に境界と内部に節点を配置して計算している。

このモデルに対する解析解を得ることが難しいため、同じ解析モデルを用いてFDM¹²⁾による計算を行った。物性の変化は要素中心の座標に対して式(21. a), (21. b)を用いて個々の要素に対して与えた。

b) 解析結果

$y=500\text{m}$ における水平距離 x とポテンシャル ϕ のDRBEMとFDMによる解析結果の比較を図-4に示す。図に示されるように両者は良い一致を示していることがわかる。

DRBEMとFDMの解析結果による解析領域におけるポテンシャル ϕ のコンター分布と流速ベクトルをそれぞれ図-5に示す。

一般に透水係数を領域内で一定とするとポテンシャル ϕ の分布は y 軸に平行となるが、周期性を有

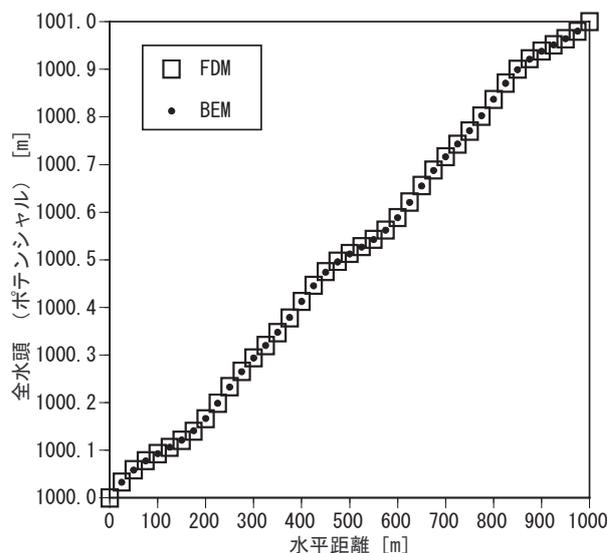
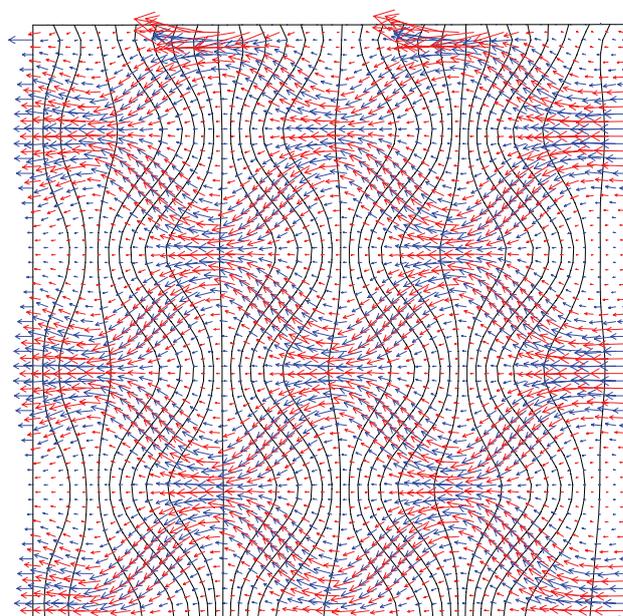


図-4 $y=500\text{m}$ における水平距離 x とポテンシャル ϕ の解析結果との比較



(青矢印がDRBEM, 赤矢印がFDM)

図-5 解析領域全体におけるDRBEMとFDMの解析結果から得られたポテンシャル ϕ のコンター分布と流速ベクトルの比較

する透水係数を考慮すると図に示されるようにポテンシャル ϕ の分布も周期性をもって変動していることがわかる。このポテンシャル ϕ のコンター分布は図-4と同様にDRBEMとFDMで差は見られずよく一致している。

次に、流速ベクトルはDRBEMでは内部節点上、FDMは要素中心で表示している。ポテンシャル ϕ の分布の変動に合わせて、流速の方向と大きさも周期的に変動していることがわかる。また、この両者

のベクトルの大きさと方向は整合していることがわかる。

4. おわりに

本論文では地下水流動解析を対象として二重相反境界要素法の適用性を検討した。その結果、地層処分などの広域な領域を対象とした解析において、透水係数が緩やかに変動する場合には十分適用可能であることを示した。

参考文献

- 1) Cundall,P.A.: A Computer Model for Simulating Progressive Large-Scale Movements in Blocy Systems, *Proceedings of the Symposium of the International Society for Rock Mechanics*,vol. 1, Paper No. II-8, 1971.
- 2) 例えば, 日本計算工学会編, 大西有三, 佐々木猛, Gen-Hua Shi: 不連続性岩盤解析実用化研究会: 不連続変形法 (DDA), 計算力学レクチャーシリーズ 6, 丸善, 2005.
- 3) 例えば, 日本計算工学会編, 越塚誠一: 粒子法, 計算力学レクチャーシリーズ 5, 丸善, 2005.
- 4) 例えば, 熊坂博夫: 不均質な弾性地山中のトンネル掘削における吹付けコンクリートの応力分布について, 土木学会第 60 回年次学術講演会概要集, 3-059, pp. 117-118, 2006.
- 5) 例えば, 日本計算工学会編, 寺田賢二郎, 菊池昇: 均質化法入門, 計算力学レクチャーシリーズ 1, 丸善, 2003.
- 6) 例えば, 日本計算工学会編, 鈴木克幸, 長嶋利夫, 萩原世也: メッシュフリー解析法, 計算力学レクチャーシリーズ 4, 丸善, 2006.
- 7) 落合芳博, 瀬戸聡: 三重相反境界要素法による遠心力を伴う不均質材の弾性解析, 日本機械学会論文集 (A 編), 72 巻 722 号, 論文 No. 06-0184, 2006. 10.
- 8) C.A. ブレビア (著), 神谷紀生, 田中正隆, 田中喜久昭 (訳): 境界要素法入門, 培風館, 1980.
- 9) Nadini,D. Brebbia,C.A. : A new approach to free vibration analysis using boundary elements, *In Boundary Elements Methods in Engineering, Computational Mechanics Publications*,Springer-Verag, pp.312-326,1982.
- 10) C.S. Chen, C.A. Brebbia, H.Power : Dual reciprocity method using compactly supported radial basis function, *Commun. Numer. Meth. Engng*, 15, pp.137-150, 1999.
- 11) 例えば, 田中正隆, 松本敏郎, 須田裕輔: 傾斜機能材料の定常熱伝導問題に対する DRM 境界要素法 (2 次元問題での検討), 日本機械学会論文集 (A 編), 67 巻 662 号, 2001. 10.
- 12) Itasca Consulting Group, Inc.:*FLAC User's Guide*, 2000.

Consideration of the applicability of the boundary element method (BEM) to groundwater flow analysis while varying the properties of ground in space.

Hiroo KUMASAKA

When developing models to reflect the heterogeneity of ground, analysis methods that involve the development of meshes including FEM are likely to have several difficulties. One conceivable solution is the use of dual reciprocity boundary element method (DRBEM) that enable the consideration of spatial distribution of properties in internal regions. It has, however, been pointed out that in the case of highly complex distributions of properties, DRBEM may not be applicable. Then, the applicability of DRBEM to groundwater flow analysis was examined. As a result, the method proved fully applicable in the case where the permeability varied slowly in a wide area used for geological disposal waste.