

非静水圧荷重下の円形トンネルの弾塑性解析に関する検討

A numerical simulation of deep circular tunnel subjected to non-hydrostatic loading

鳥取大学大学院 福田 毅* 古川 耕平*

鳥取大学工学部 西村 強** 木山 英郎**

Tsuyoshi FUKUDA, Kouhei FURUKAWA, Tsuyoshi NISHIMURA and Hideo KIYAMA

In this paper, a circular tunnel in a rock mass subjected to non-hydrostatic loading is analyzed. The tunnel problem is idealized by an axi-symmetric assumption (homogeneous and isotropic etc.), a combination of a two-dimensional finite element analysis and a Fourier series. The rock mass is assumed to behave as an elasto-plastic material that is characterized by a cohesive frictional strength. The numerical example for hydrostatic pressure is examined with a theoretical solution and extension of the method to non-hydrostatic state is also studied.

Key Words: tunnel, axi-symmetric assumption, Fourier series, elasto-plastic behavior.

1. はじめに

トンネル掘削は、その周辺地盤の応力状態に初期状態に比べて変化を生じさせる。これは、通常、トンネル掘削に伴う変位として観測される。トンネル掘削に伴う応力状態の変化や変位は、初期応力状態やトンネル周辺地盤の変形特性に依存するものとなる。数値解析は、このような応力-変形状態を表現する手段の一つとして利用されている。最近では3次元解析プログラムもかなり充実してきたが、依然としてトンネルに関する解析は、平面ひずみの仮定などを導入して2次元断面による解析が主流である。しかし、この条件は、切羽よりある程度の距離をもった断面において成立する条件であり、切羽付近の応力状態は、3次元である。2次元解析では、掘削面における段階的な応力解放などを行って、切羽付近の応力-変形状態を再現する工夫などを試みることになる。

さて、円筒形、線形弾性体など、軸対称の仮定を導入すれば、2次元解析と Fourier 級数の組み合わせにより3次元応力状態を表現できることが知られている。一方、線形弾性解析の積み重ねによる増分型弾塑性解析では、初期応力法、初期ひずみ法が一般的に手法として知られている。本解析では、初期ひずみ（塑性ひずみ）が周方向に Fourier 級数を利用した重ね合わせにより表現できるとの仮定を導入した。解析の一例として、非静水圧下の円形トンネルの弾塑性解析を試みた。

* 学生会員 鳥取大学大学院土木工学専攻

** 正 会 員 鳥取大学工学部土木工学科

2. 3次元数値解析法

2.1 応力成分と弾塑性挙動

次式は、直交座標系と円筒座標系の応力の変換式である。

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} \\ \tau_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos 2\theta}{2} & \frac{1-\cos 2\theta}{2} & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ \frac{1-\cos 2\theta}{2} & \frac{1+\cos 2\theta}{2} & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\frac{\sin 2\theta}{2} & \frac{\sin 2\theta}{2} & 0 & 0 & 0 & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (1)$$

この式より、円形トンネル周辺地盤の応力状態は Fourier 級数を用いて表現できることが理解できる。線形弾性体を仮定すれば、調和成分ごとの解の重ね合わせにより、一般的な状態、たとえば、非静水圧状態を表現することもできる（たとえば、亀岡¹⁾）。また、Labouse, V. と Gärber, R.²⁾ は、等方応力状態下の地盤内に掘削された円筒空洞の安定解析を行っている。彼らの解析は、岩盤を飽和多孔質体として、空洞の短期および長期的な安定性を検討している。しかし、非静水圧条件下において塑性域の発生を考えるとときには、非対称成分に対する塑性降伏条件の発生などに何らかの仮定を導入する必要がある。このような仮定の一つとして、Winnick, L.A. & Zienkiewicz, O.C.³⁾ は、塑性ひずみが周方向に Fourier 級数で表現するとの仮定を導入して、厚肉パイプの曲げ問題を解析している。本文でも、そのような仮定を導入するとともに、トンネル掘削問題への適用を行った。

応力増分 $d\sigma$ に対するひずみ増分 $d\epsilon$ を次の弾性成分と塑性成分に分解できるとする。

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad (2)$$

塑性成分 $d\epsilon^p$ は、

$$d\epsilon^p = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (3)$$

ここに、 λ は流動性パラメーター、 Q は塑性ポテンシャルである。地盤は、Mohr-Coulomb 則に従う材料であり、関連流れ則を用いた。

2.2 変位と荷重の周方向の表現

軸対称体を節点で連結された四辺形断面をもつリング要素の集合体として表現する。節点の変位は、3つの成分、すなわち、半径方向成分、周方向成分ならびにトンネル軸方向成分で表されるとする。これらの変位成分、形状関数 N および Fourier 級数を用いて、要素内の任意点の変位を次式で表す。

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{N}}(r, \theta, z) \mathbf{u} = \mathbf{N}(r, z) \cdot \mathbf{u}_0 + \sum_{l=1}^L \mathbf{N}(r, z) \cos l\theta \cdot \bar{\mathbf{u}}_l + \sum_{l=1}^L \mathbf{N}(r, z) \sin l\theta \cdot \bar{\mathbf{u}}_l \quad (4)$$

ここに、 $\mathbf{u}$ は節点の変位振幅である。一方、節点荷重 $\mathbf{f}$ についても、以下のように表す。

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_z \end{pmatrix} = \mathbf{f}_0 + \sum_{l=1}^L \bar{\mathbf{f}}_l \cos l\theta + \sum_{l=1}^L \bar{\mathbf{f}}_l \sin l\theta \quad (5)$$

ひずみは次のように書かれる。

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{u} = [\mathbf{B}^0, \mathbf{B}^1, \dots, \mathbf{B}^L] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_L \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここに,

$$\mathbf{u}_l = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_l \\ \mathbf{u}_l \end{Bmatrix} \quad (7)$$

節点変位—ひずみマトリックス $\mathbf{B}$ は次のようになる.

$$\mathbf{B}_i^l = [\bar{\mathbf{B}}_i^l, \mathbf{B}_i^l] \quad (8)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}_i^l &= \mathbf{B}_i^0 \cos l\theta - \hat{\mathbf{B}}_i \sin l\theta \\ \mathbf{B}_i^l &= \mathbf{B}_i^0 \sin l\theta + \hat{\mathbf{B}}_i \cos l\theta \end{aligned} \quad (9)$$

$$\mathbf{B}_i^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{N_i}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial r} - \frac{N_i}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (10) \quad \hat{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{r} \quad (11)$$

剛性マトリックスは次のように誘導できる.

$$\mathbf{K}_{ij}^{lm} = \int_V \mathbf{B}_i^{lT} \mathbf{D} \mathbf{B}_j^m dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_A \mathbf{B}_i^{lT} \mathbf{D} \mathbf{B}_j^m r dr dz \quad (12)$$

ここに, $\mathbf{D}$ は弾性マトリックスであり, (r, z) 平面内で定義される. ここで,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin l\theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos l\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin l\theta \cos m\theta d\theta = 0 \quad (l, m = 1, 2, \dots) \\ \int_0^{2\pi} \sin l\theta \sin m\theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos l\theta \cos m\theta d\theta = 0 \quad (l \neq m) \\ \int_0^{2\pi} \sin l\theta \sin m\theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos l\theta \cos m\theta d\theta = \pi \quad (l = m) \end{aligned} \quad (13)$$

なる関係を用いれば,

$$\mathbf{K}_{ij}^{lm} = 0 \quad l \neq m \quad (14)$$

であり、全体剛性マトリックスは次式となる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{00} & 0 \\ & \mathbf{K}^{ll} \\ 0 & \mathbf{K}^{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^0 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^l \\ \vdots \\ \mathbf{u}^L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^0 \\ \vdots \\ \mathbf{f}^l \\ \vdots \\ \mathbf{f}^L \end{Bmatrix} = 0 \quad (15)$$

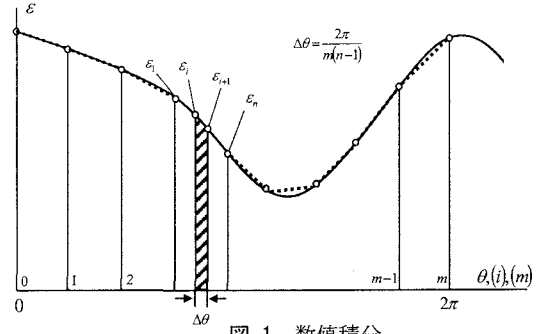


図-1 数値積分

各調和成分に関する荷重項は次式となる。

$$\mathbf{f}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i^0 = \int_0^{2\pi} F_0 r d\theta = 2\pi r F_i^0 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_i^l = \int_0^{2\pi} \bar{F}_i^l \cos^2 l\theta d\theta = \pi r \bar{F}_i^l \\ \mathbf{f}_i^l = \int_0^{2\pi} \bar{F}_i^l \sin^2 l\theta d\theta = \pi r \bar{F}_i^l \end{Bmatrix} \quad (16)$$

ここで、塑性ひずみが次式のように Fourier 級数を用いて表示されるとの仮定を導入する。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_0^0 + \sum_{l=1}^L \boldsymbol{\varepsilon}_0^{-l} \cos l\theta + \sum_{l=1}^L \boldsymbol{\varepsilon}_0^{=l} \sin l\theta \quad (17)$$

上式の各項の振幅は、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_0^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\varepsilon}(\theta) d\theta \\ \boldsymbol{\varepsilon}_0^{-l} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\varepsilon}(\theta) \cos l\theta d\theta \\ \boldsymbol{\varepsilon}_0^{=l} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\varepsilon}(\theta) \sin l\theta d\theta \end{aligned} \quad (18)$$

図-1 を参照して、これらの振幅は、次式の数値積分で求めることができる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_0^0 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}}{2} \right) \Delta\theta \\ \boldsymbol{\varepsilon}_0^{-l} &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}}{2} \right) \Delta\theta \cos l\theta_i \\ \boldsymbol{\varepsilon}_0^{=l} &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}}{2} \right) \Delta\theta \sin l\theta_i \end{aligned} \quad (19)$$

ここに、m は、応力状態が塑性降伏条件を満足しているか否か検査する断面数を、n は一区間の積分次数を表す。(19) 式で求められる塑性ひずみを初期ひずみにみなして、節点荷重項を次式で求める。

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i^0 = -2\pi \int_A r \mathbf{B}^{0T} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0^0 dA \\ \vdots \\ \mathbf{f}_i^l = -\pi \int_A r \bar{\mathbf{B}}^{lT} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0^{-l} dA \\ \mathbf{f}_i^l = -\pi \int_A r \bar{\mathbf{B}}^{lT} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0^{=l} dA \end{Bmatrix} \quad (20)$$

非静水圧荷重条件下では、地盤の塑性化は周方向に様に発生しない。たとえば、鉛直方向が最大主応力方

向であれば、側壁中央から発生・進展していく。このような過程を表現するため、周方向に設けた複数の断面で応力状態が塑性状態に至ったか否か検査を行うことになる。

3. 非静水圧荷重下の円形トンネルの解析

完全弾塑性体を仮定した岩盤中に掘削される円形トンネルを解析モデルとして考える。図-2は、 z 軸方向に単位幅のリング要素の断面を表しており、この z 軸はトンネル掘削方向に一致する。なお、 z 軸方向には、変位を拘束して平面ひずみ条件を与えている。初期応力状態を円筒座標系内で次のように表現する。

$$\begin{aligned}\sigma_r^0 &= \frac{\sigma_v + \sigma_h}{2} + \frac{\sigma_v - \sigma_h}{2} \cos 2\theta \\ \sigma_\theta^0 &= \frac{\sigma_v + \sigma_h}{2} - \frac{\sigma_v - \sigma_h}{2} \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta}^0 &= \frac{\sigma_v - \sigma_h}{2} \sin 2\theta \\ \sigma_z &= \sigma_h = k_0 \sigma_v\end{aligned}\quad (2.1)$$

ここに、 σ_v 、 σ_h および σ_z は、主応力であり、 σ_v は鉛直応力、 σ_h 、 σ_z は水平方向の応力である。 σ_z は、トンネル軸 z に平行である。

掘削過程は、掘削表面 $r=r_1$ において内空方向へ荷重を段階的に作用させて表現している。各段階での増分荷重は、図に示すように荷重振幅 p_0 (たとえば、 $p_0=(\sigma_v+\sigma_h)/2$) の $1/10$ に設定している。表-1 は、本解析で用いる諸定数をまとめている。

図-3 は、 $\sigma_v=\sigma_h$ ($=2.0$ MPa) とした場合の解析結果と理論解⁴⁾ との比較を示している。一方、図-4 は表-1 に示す初期応力を与えたときの素掘りの状態におけるトンネルの変形を表している。この解析では、降伏条件を $\theta=0^\circ\sim 180^\circ$ 間の 10° ごとの断面で検査するとともに、各調和成分に対する塑性ひずみの振幅を式 (1.9) によって決定している。そして、2. に記述した手順により求めた変位振幅を式 (4) に用いて、トンネルの内空表面での変形を表現している。

4. まとめ

本解析では、初期ひずみ (塑性ひずみ) が周方向に Fourier 級数を利用した重ね合わせにより表現できるとの仮定を導入した。解析の一例として、非静水圧下の円形トンネルの弾塑性解析を試みた。多くの仮定を要する解析ではあるが、2 次元解析の範囲内で効率的に 3 次元的な考察ができる。切羽付近など 3 次元的な考察を必要とする部分の基礎的な検討に役立てて生きたいと考えている。

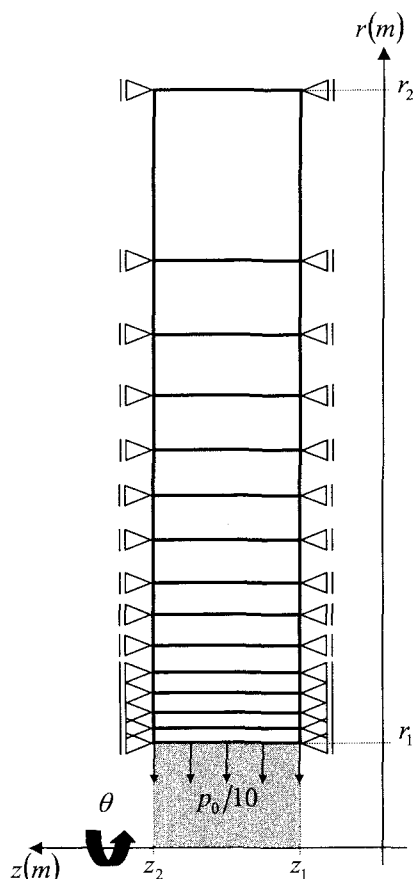


図-2 要素分割

表-1 解析定数

Young's modulus: 2.0 GPa
Poisson ration: 0.3
Angle of internal friction: 30 (deg.)
Cohesion: 1.0 MPa
Initial stress: $\sigma_v = 2.0$ MPa
$\sigma_h, \sigma_z = 1.0$ MPa
Tunnel radius : $r_1 = a = 5$ (m)

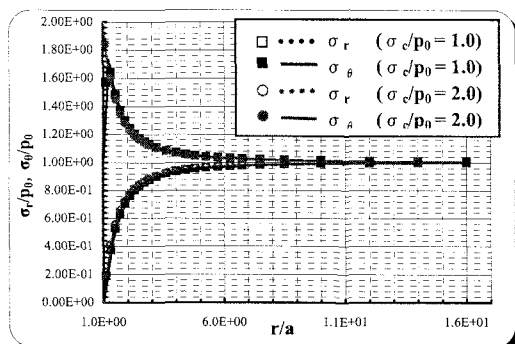
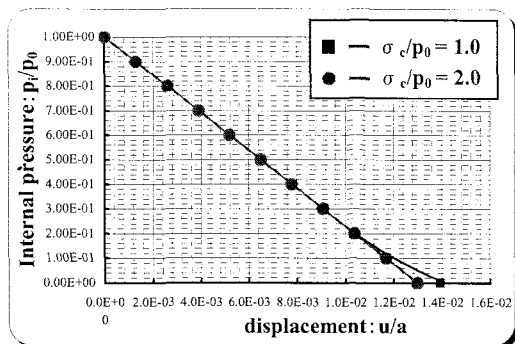


図-3 解析の比較 ($\sigma_v = \sigma_h$)

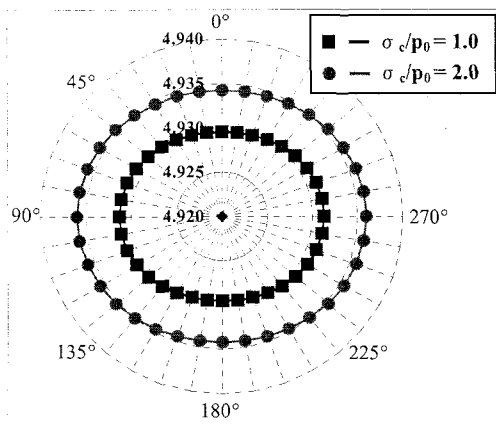


図-4 トンネルの変形($k_0=0.5$)

参考文献

- 1) 亀岡美友, 1980, : ボアホール底面上の応力の解放による岩盤応力測定に関する研究, 京都大学学位請求論文, 23-41.
- 2) Labiouse, V. & Gärber, R., 2002, Influence of the in situ pore water pressure on the stability of deep galleries in saturated porous media, Proceedings of the 15th Int. Conf. on Soil Mechanics and Geotechnical Eng. ICSMGE, Istanbul, 1359-1364.
- 3) Winnick, L. A., & Zienkiewicz, O. C., 1979, Plastic (or visco-plastic) Behavior of Axi-symmetric Bodies Subjected to Non-symmetric Loading – Semi Analytical Finite Element Solution -, Int., Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.14, 1399-1412.
- 4) 古川耕平, 福田 毅, 三上 浩, 木山 英郎, 西村 強, 2003, ひずみ軟化特性を考慮した円形トンネルの変形解析, 土木学会中国支部第 55 回研究発表会講演集, 259-260.