

RBSMによる 3 次元簡易斜面安定解析法

3-DIMENSIONAL SIMPLIFIED SLOPE STABILITY ANALYSIS BY USING RBSM

竹内則雄*・濱崎英作**・草深守人*

Norio TAKEUCHI, Eisaku HAMASAKI and Morito KUSABUKA

In this paper, it is to use the column by method of slices (columns) for the three-dimensional element of RBSM, and the numerical method for the three-dimensional discrete limit analysis is proposed. According to this method, more effective slope-protection work can be constructed, since it is possible to easily know the qualitative fluctuation of the slope shown in the movement of the column. In this study, the shape of slip surface becomes a quadrangle, when the column was used, and this plane is defined in isoparametric element used by finite element method. The distribution of local safety factor was equivalent to the conventional method in order to verify this modeling, when actual three-dimensional slope was analyzed, and it was possible to grasp the qualitative movement of the column.

Key Words : slope stability, RBSM, 3-dimension

1. はじめに

斜面の安定性を検討する場合、簡便法やBishop法などの分割法による 2 次元斜面安定解析が広く用いられてきた。しかし近年では、コンピュータの普及に伴って 3 次元斜面安定解析を行うケースも徐々に増えてきている。これは、3 次元安定解析を行うことによって、局所的な安全率の分布を理解することができ、部分的な施工対策などより経済的な設計や、より効果的な安全対策が可能になるためである。

3 次元安定解析法としては、分割法を 3 次元に拡張したHovland法や、それを修正した方法が用いられている。これらの方法は、3 次元斜面をカラム柱の集まりに分割し、カラム柱毎に計算した滑動力と抵抗力を累積し安全率を計算するといった、基本的には極限平衡法に基づく方法である。このため、カラム柱毎の安全率を求めることができ、斜面全体の安全率分布を知ることができる[1]。これらの方法では斜面のすべり方向を仮定し、その方向に斜面全体、すなわち全てのカラム柱が移動するものとして安全率を求めており、それぞれのカラム柱が最も滑りやすい方向に移動した場合の安全率とは異なるし、また、斜面全体の動きをこの方法から知ることができない。

一方、著者らは、RBSM[2]を用いて簡便的に斜面安定解析を行う方法を提案した[3]。これは、2 次元斜面に対するものであったが、カラム柱を 1 つの要素と考えることで 3 次元問題の解析に適用することは容易である。この方法によれば、カラム柱の動き、すなわち斜面の変動を定性的に知ることができるため、より効果的な斜面对策工の検討を行うことができる。

本論文では、RBSMを 3 次元簡易斜面安定解析に適用する方法を述べるとともに、実際の 3 次元斜面安定解析を行い、得られる解の特徴についても言及する。

* 正会員 工博 法政大学 工学部 土木工学科

**正会員 (株)アドバンテクノロジー

2. RBSMによるモデル化

Hovland法などの分割法による方法では、図1に示すように、3次元斜面をカラム柱の集まりで表し、極限平衡法を適用して各カラム柱のすべり面上の安全率を求める。

いま、このカラムをRBSMの三次元要素と考えると離散化極限解析を行えば、すべり面上の表面力が求められるため、これを用いて安全率を求めることも可能である。斜面の変形解析を行うのであれば、地層や地下水面等を考慮してこのカラム柱をさらに分割し、適切な変形係数等の地盤定数を入力する必要がある。しかし、この方法では、解析時間がかかることはもちろんのこと、適切な地盤定数や地層状態の調査等の処理のため簡便性が失われる。

本論文では分割法と同程度の簡便さで解析を行うことを目的とするため、カラム柱を1つの要素と考え、図2のように自由度を考える。RBSMでは回転自由度を考慮するのが一般的であるが、ここではカラム柱の変形を無視し、カラム柱の並進運動のみとりあげるという考え方から、回転変位は考慮しない。

3. RBSMの定式化

(1) カラム柱側面

RBSMでは、2要素間の相対変位を用いて、要素間に蓄えられるエネルギーを評価し、剛性行列を誘導する。本手法では、分割法と同じ考え方に基づき要素分割を行うため隣接要素関係は単純になる。図3は x 方向の隣接要素関係を示した図で、この場合、相対変位 δ は次のように求めることができる。

$$\delta = B_x u \quad (1)$$

$$\delta = \left\{ \delta_n \quad \delta_{sx} \quad \delta_{sy} \right\}^T \quad u = \left\{ u_I \quad v_I \quad w_I \mid u_{II} \quad v_{II} \quad w_{II} \right\}^T$$

$$B_x = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

ここで、下付のI, IIがついた u, v, w は、それぞれ、カラム柱Iとカラム柱IIの x, y, z 方向の変位である。同様にして、図4に示すような y 方向の隣接要素における相対変位を求める次のようになる。

$$\delta = B_y u \quad (2)$$

$$\text{ただし } B_y = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

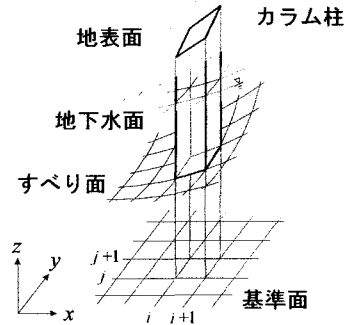


図-1 分割法におけるカラム柱

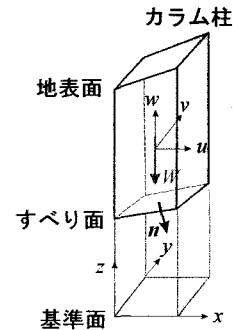


図-2 カラム柱の自由度

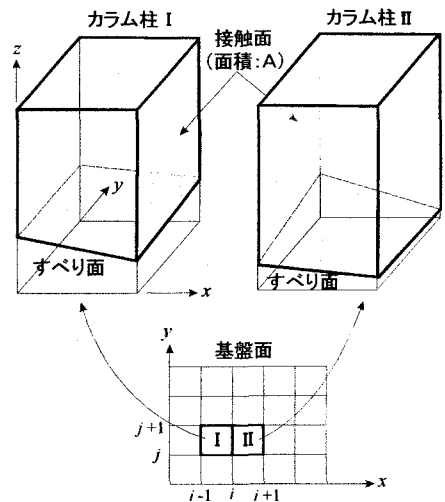


図-3 カラム柱間の接触面 (x 方向)

一方、カラム柱側面間の表面力 σ は、以下のようにペナルティ関数 λ を用いて求める。

$$\sigma = D_{\text{side}} \delta \quad (3)$$

$$\sigma = \left\{ \sigma_n \quad \tau_{sx} \quad \tau_{sy} \right\}^T, \quad D_{\text{side}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

したがって、カラム柱側面に蓄えられるエネルギーは次のようになる。

$$V_{\text{side}} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \int_A \mathbf{B}_x^T D_{\text{side}} \mathbf{B}_x dA \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \int_A \mathbf{B}_y^T D_{\text{side}} \mathbf{B}_y dA \mathbf{u} \quad (4)$$

(2) すべり面

図5に示すように、あるカラム柱におけるすべり面が

$$z = z(x, y) \quad (5)$$

で与えられるものとする。このとき、法線ベクトル $\mathbf{n}$ は次のように表すことができる。

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \quad (6)$$

同様に、 x および y 方向の接線ベクトルを求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{s}_x &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}} \left(\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{k} \right) \\ \mathbf{s}_y &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{k} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで、カラム柱の変位ベクトルは

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (8)$$

で与えられる。このとき、基盤部の動きはないものと仮定してすべり面上の相対変位を求めると

$$\delta_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad \delta_{sx} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}_x, \quad \delta_{sy} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}_y \quad (9)$$

となる。したがって、以下の関係が得られる。

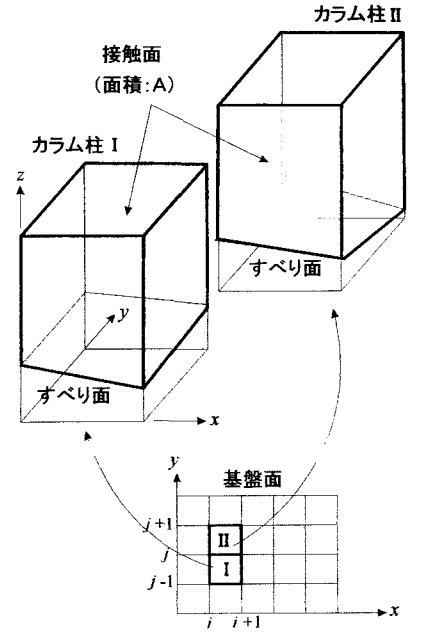


図-4 カラム柱間の接触面 (y 方向)

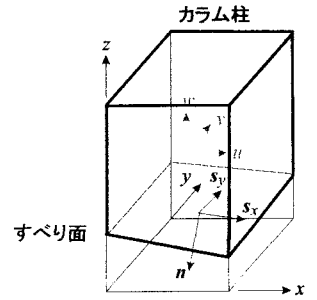


図-5 すべり面の法線ベクトル

$$\delta = Bu \quad (10)$$

$$B = \begin{bmatrix} -(\frac{\partial z}{\partial x})/L & -(\frac{\partial z}{\partial y})/L & 1/L \\ 1/L_x & 0 & (\frac{\partial z}{\partial x})/L_x \\ 0 & 1/L_y & (\frac{\partial z}{\partial y})/L_y \end{bmatrix}, \quad L = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}, \quad L_x = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}, \quad L_y = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

いま、すべり面上の相対変位と表面力の関係を

$$\sigma = D\delta \quad \text{ただし, } D = \begin{bmatrix} \lambda_n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{sx} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{sy} \end{bmatrix} \quad (11)$$

とすれば、すべり面上のエネルギーは

$$V_{\text{slip}} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \mathbf{u} \quad (12)$$

と評価される。したがって、系全体のエネルギーは次のようになる。

$$V = V_{\text{side}} + V_{\text{slip}} \quad (13)$$

以上関係から剛性行列を誘導することで、RBSMによる三次元離散化解析が可能となる。

4. 四辺形要素によるすべり面の定義

前節で述べたように、すべり面の式 $z = z(x, y)$ が求められれば、RBSMを適用して三次元離散化解析が可能となる。しかし、カラム柱を要素に用いる場合、すべり面となる矩形領域に対する面の式を4点の座標から求めることができない。このため、矩形領域の各辺の中点を結ぶベクトルから面の傾きを定義する方法や、矩形領域を三角形領域に分割して面を定義する方法が用いられてきた。これらの方法は、分割を細かくすることによって精度を向上させることが可能であるが、展開に曖昧さが残る。

一方、本論文ではすべり面を双一次アイソパラメトリック四辺形要素を用いて定義する。図6はこの要素の座標変換の関係を示したもので、自然座標系と物理座標系の間に次の関係が成立している。

$$x(\xi, \eta) = \sum_{\alpha=1}^4 N_{\alpha}(\xi, \eta) x_{\alpha}, \quad y(\xi, \eta) = \sum_{\alpha=1}^4 N_{\alpha}(\xi, \eta) y_{\alpha} \quad (14)$$

ここで、 N_{α} は形状関数である。アイソパラメトリック要素では座標変換と同じ形状関数を用いて物理量を補間する。ここでは、物理量として z 座標を考え、

$$z(x, y) = z(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \sum_{\alpha=1}^4 N_{\alpha}(\xi, \eta) z_{\alpha} \quad (15)$$

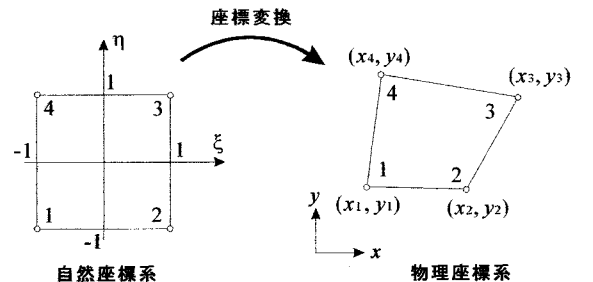


図-6 双一次アイソパラメトリック四辺形要素

のように考え面の式を定義する．このとき面傾きは

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

と計算することができる．ここで， $\mathbf{J}$ はヤコビアン行列である．具体的な計算は省略するが，この式(14)～(16)を式(6)に代入すれば矩形領域の面の法線ベクトル等を求めることができる．

この関係を式(10)，さらに式(12)に適用するとすべり面における積分が生ずるが，本論文では数値積分を用い積分点毎に勾配を求める．なお，積分点を中央の1点にすると従来法の中点を結ぶ方法と同一の式となる．

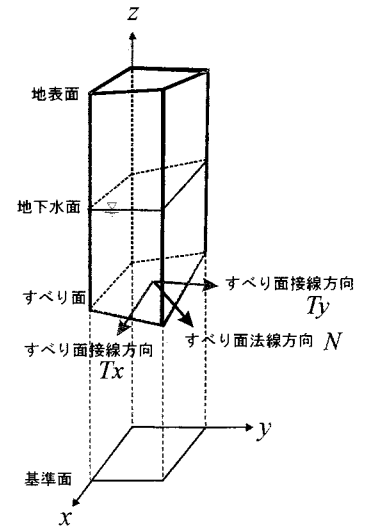
5. 斜面全体の安全率

RBSMによる離散化解析を行うと，各カラム柱のすべり面上において，図7に示す表面力が求められる．本論文では，この表面力を用いて，式(17)で示す安全率を求める．

$$F_s = \frac{\sum \{\tan \phi (N - U) + C \cdot A\}}{\sum T} = \frac{R}{D} \quad (17)$$

$$\text{ただし, } \sum T = \sqrt{(\sum T_x)^2 + (\sum T_y)^2}$$

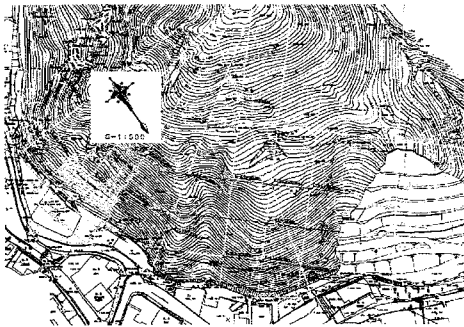
である．また， ϕ は地盤の内部摩擦角， C は粘着力（せん断強度）， U は間隙水圧， A はすべり面の面積を表している．式(17)の分子は，滑りに対する抵抗力を，また分母は滑動力を表している．



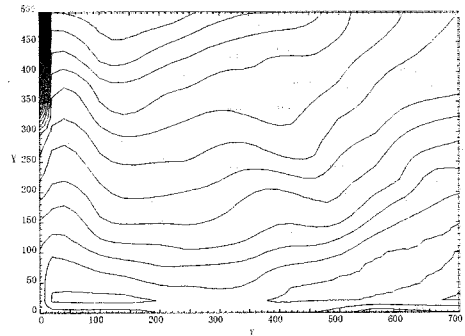
図－7 すべり面上の表面力

6. 三次元斜面安定解析例

具体的な三次元斜面安定解析を行う．図8は解析対象地区で点線の範囲がすべり面を形成すると考えRBSMによる離散化解析を行った．



図－8 解析対象斜面



図－9 解析対象地区の平面図

カラム柱の x, y 方向分割幅は20mであり、解析に用いた材料定数は、湿潤単位体積重量1.8tf/m³、粘着力4.5tf/m²、内部摩擦角20.237度である。図9は斜面の平面図、図10はすべり面における鳥瞰図で、すべり面は比較的フラットな形状をしている。

図11は、各カラム柱の局所的な安全率のコンターをプロットしたもので、三次元解析を行うとこのような面的な広がりから安定対策を行えるという利点がある。図(a)はRBSMによる結果、(b)は従来のHovland法を用いた分割法による結果である。両者は類似の傾向を示しているが、これはRBSMが弾性解析であるためと思われる。

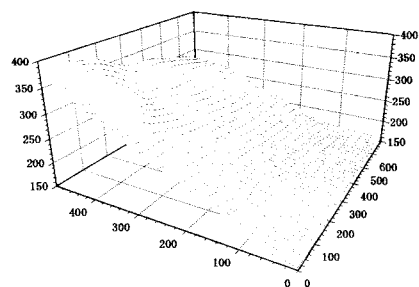
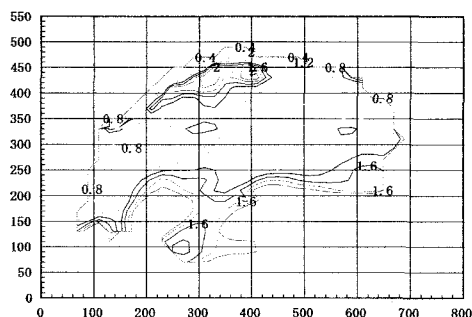
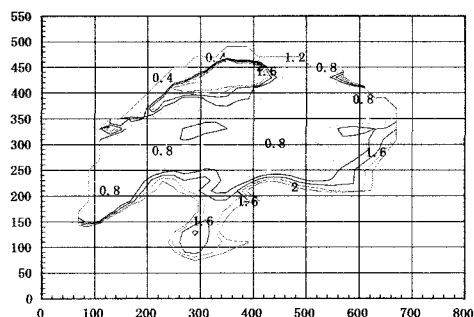


図-10 すべり面の鳥瞰図



(a) RBSMによる解析結果



(b) Hovland法による解析結果

図-11 各カラム柱の安全率

図12は、カラム柱の並行変位をベクトルで表した図である。変形係数を均一としているため、定性的ではあるが、斜面の動きを理解することができる。図から、本例では左右2つのすべりが混在しており、それぞれ、別個に検討が必要であることがわかる。

7. まとめ

従来法のデータをそのまま利用して簡便的にRBSMによる三次元斜面安定解析を行う方法を提案した。この方法では変位モードが得られるため、例えばアンカーの打設方向や、法枠の設置箇所など、より適切な施工対策を検討することが可能になるものと考えられる。

参考文献

- [1] 竹内則雄、濱崎英作・草深守人、“すべり面を有限要素で近似した3次元斜面安定解析法”，地盤工学会第38回地盤工学研究発表会講演集，pp.3-4，2003
- [2] Kawai, T. : “New element models in discrete structural analysis”, 日本造船学会論文集, No. 141, pp. 187-193, 1977
- [3] 竹内則雄：地盤力学における離散化極限解析，培風館，1991

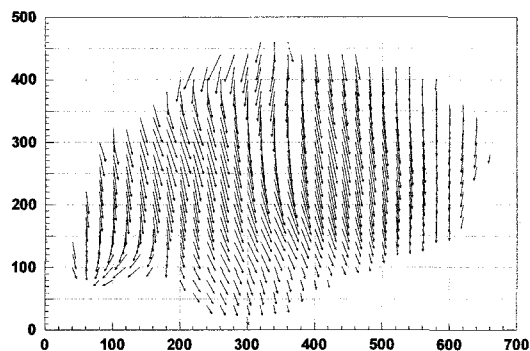


図-12 カラム柱の変位分布（並行変位成分）