

亀裂サイズがべき分布に従う場合における亀裂サイズと トレース長との関係について

Relationship between power-law distributed size and trace length of disc-shaped fractures

重野 喜政

Yoshimasa SHIGENO

A log-log plot of cumulative fracture trace length distribution often shows line state. This indicates trace length distribution is a power-law distribution. And it also can be derived that the fracture size distribution is a power-law using intersect probability of a disk-shaped fracture and a sampling plane. So with the relation of a size distribution and a trace length distribution, a power number of fracture size can be estimated from the slope of regression line for a log-log plotted cumulative trace length. The relation of a power number and a regression line slope is shown in this paper. A trace length distribution is often affected by sampling plane size. This affection on estimating a power number from trace length distribution is investigated using trace sampling simulation.

Key Words: rock mass, fracture, DFN, trace length, power-law distribution

1. はじめに

高レベル放射性廃棄物地層処分における天然バリアの性能評価を中心に、岩盤亀裂を確率論的にモデル化することによって亀裂の影響を取り入れた浸透流解析が多く行われている。亀裂を確率論的にモデル化する場合、亀裂サイズ分布は、トレースサンプリング面やスキャンラインで得られるトレース長分布に基づきモデル化する。トレース長分布は、降順の累積分布を両対数軸上に表すと直線性を示す場合がある。このような場合、亀裂とサンプリング面との交差確率から、亀裂サイズ分布がべき分布になることを示すことが出来る。本論文では、その導出について述べる。また、この関係を用いると、直線の勾配から亀裂サイズ分布のべき乗数を推定することが出来る。しかしながら、トレース面の大きさによってトレースが偏差を受けるため、推定値には誤差が含まれる。本論文では、様々なべき乗数に対する推定値の誤差に対する解析的検討を行う。

2. トレース長累積分布とべき分布

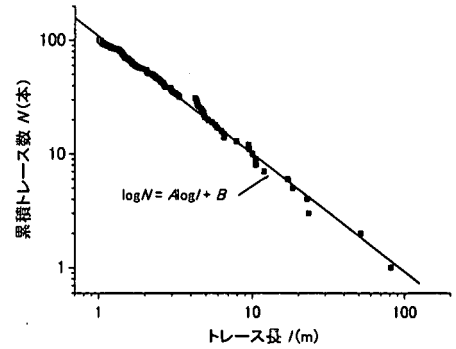
トレース長を降順に並べ、その累積数とトレース長を両対数軸上に示すと、図1に示すように直線関係が見られることが多い。これは、以下に示すように、トレース長がべき分布であることを示すものである。

降順のトレース数累積分布を総数 N で割ると、1.0 から累積分布関数 $F(l)$ を引いた関数になる。 $F(l)$ を微分すると

トレース長分布が求めることが出来、トレース長分布がべき分布となることが容易に確認できる。

$$\begin{aligned}
 \log N &= A \log l + B \\
 N &= 10^B \cdot l^A \\
 1 - F(l) &= \frac{10^B}{N} l^A \\
 f(l) &= \frac{dF(l)}{dl} = \frac{1}{C} l^{A-1}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

N : 降順に累積したトレース数
 l : トレース長
 A, B : 直線近似した場合の傾きと切片
 C : 正規化乗数



図－１ 累積トレース分布の例

ただし、このことはトレース長分布がべき分布になることを示しているのにすぎなく、亀裂サイズ分布がべき分布になることを示しているものではない。トレース長の累積分布から亀裂サイズ分布を求めるためには、両者の関係を調べなければならない。

３．亀裂のトレース長分布とサイズ分布の関係

トレース長分布と亀裂サイズ分布の関係は、Kulatilake¹⁾がエリアサンプリングの場合において、無限に広がるサンプリング面上での関係を導いている。尚、亀裂形状は円盤であり、亀裂サイズと亀裂の方向、亀裂の中心位置は独立であると仮定しており、本論文においてもそれに倣うことにする。

簡潔化のため亀裂の方向は、サンプリングエリアと直交する方向で一定であると仮定し、亀裂サイズも直径 D で一定であるとする。直径 D とトレース長 l の幾何学的関係から、亀裂とサンプリング面が交差するという条件下でのトレース長分布 $f(l|D, l)$ は、次式で表される。

$$f(l|D, l) = \frac{l}{D(D^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{2}$$

亀裂とサンプリング面の交差確率は、亀裂の直径 D に比例するため、亀裂の直径が分布関数 $g(D)$ に従う場合、トレース長分布 $f(l)$ は式(2)より次式で表される。

$$f(l) = \frac{1}{C} \int_1^{\infty} D \cdot \frac{l}{D(D^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot g(D) dD = \frac{1}{C} \int_1^{\infty} \frac{l}{(D^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot g(D) dD \tag{3}$$

ここに、 C は正規化定数である。方向が固定されていない場合は、亀裂のすべての方向に関して、積分することになるが、亀裂の方向と直径分布は独立であると仮定しているため、方向に関する積分は定数となり、確率密度関数の正規化定数の中に含まれることになる。

スキャンラインサンプリングの場合も、Kulatilake¹⁾と同様の考え方によって、関係式を導くことが出来る。異なる点は、亀裂とスキャンラインの交差確率が、亀裂の面積 $\pi(D/2)^2$ に比例する点である。従って、スキャンラインサンプリングにおけるトレース長分布と亀裂直径分布の関係式は、式(3)より、次式のようになる。

$$f(l) = \frac{1}{C} \int_1^{\infty} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \cdot \frac{l}{D(D^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot g(D) dD = \frac{1}{C'} \int_1^{\infty} \frac{D l}{(D^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot g(D) dD \tag{4}$$

ここに、 C' は正規化定数である。亀裂の方向が一定でない場合も、エリアサンプリングの場合と同じである。

亀裂直径分布がべき分布に従う場合におけるトレース長分布を求める。始めに、スキャンラインサンプリングにおける式(4)を用いる。 $g(D)$ にべき乗数 a のべき分布関数 $g(D) = \alpha D^{-a}$ ($D \geq D_{\min}$ $a \geq 1$) を代入して整理すると次式を得る。

$$f(l) = \frac{1}{C} \int_l^{\infty} \frac{Dl}{(D^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot g(D) dD = \frac{1}{C} \int_l^{\infty} \frac{l}{(D^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot D^{1-a} dD \quad (D \geq D_{\min}) \quad (5)$$

べき乗数が 3 又は、4 の場合、積分を次式のように展開することが出来る²⁾。

$$a = 3$$

$$f(l) = \frac{l}{C} \int_l^{\infty} \frac{1}{D^2 (D^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}} dD = \frac{l}{C} \left[\frac{(D^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}}{l^2 D} \right]_l^{\infty} = \frac{1}{C} l^{-1} \quad (l \geq D_{\min}) \quad (6)$$

$$a = 4$$

$$f(l) = \frac{l}{C} \int_l^{\infty} \frac{1}{D^3 (D^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}} dD = \frac{l}{C} \left[\frac{(D^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}}{2l^2 D^2} + \frac{1}{2l^3} \sec^{-1} \left| \frac{D}{l} \right| \right]_l^{\infty} = \frac{\pi}{4C} l^{-2} \quad (l \geq D_{\min})$$

式(6)より、べき乗数が 3 又は、4 の場合、亀裂サイズ分布がべき分布ならば、トレース長分布もべき分布になることがわかる。同様にエリアサンプリングの場合は、Piggott³⁾が導いたように、トレース長分布は、 a を亀裂サイズ分布のべき乗数、 C を正規化定数として、次式で表されることが確認できる。

$$f(l) = \frac{1}{C} l^{1-a} \quad (7)$$

両対数軸上のトレース長累積分布の傾きは、トレース長分布のべき乗数を 1 次上げた値になることから、両対数軸上のトレース長累積分布の傾き A と亀裂サイズ分布のべき乗数 a の関係は次式のように表されることになる。

$$\text{スキャンラインサンプリング} \quad a = |A| + 3$$

$$\text{エリアサンプリング} \quad a = |A| + 2 \quad (8)$$

シミュレーションによって、式(8)の成立を確認する。亀裂サイズ分布のべき乗数は 4.0、亀裂の方向分布は一様分布、サンプリング面は 100m×100m とする。スキャンラインは、サンプリング面の中央に設ける。トレースサンプリング数はスキャンラインの場合 100、エリアの場合 2000 とする。結果を図 2 に示す。縦軸は、サンプル数で正規化している。回帰直線の傾きは、スキャンラインの場合 -1.04、エリアの場合 -2.00 であり、式(8)が成立していることがわかる。式(8)は、トレース長累積分布から亀裂サイズ分布の推定を行うのに有用である。ただし、次節で述べるように、トレース長がサンプリング時に偏差を受けるため、推定値には誤差が含まれることに留意する必要がある。

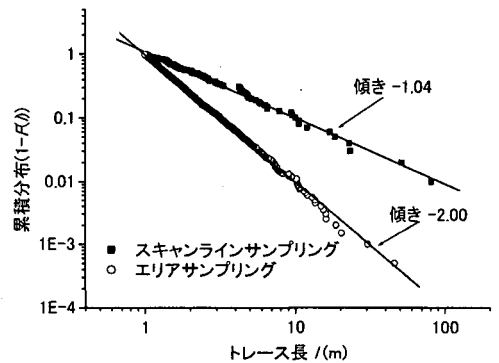


図-2 トレースサンプリングのシミュレーション結果(べき乗数 4.0)

4. 亀裂サイズ分布のべき乗数に対する推定誤差

式(6)(7)は、サンプリング面の広さが無限であることを仮定することによって成立する式であるが、実際のサンプリング面の広さは有限である。このため、長いトレースは偏差を受け、図 3 に示すように、両対数軸上のトレース長累積分布は、直線から乖離する。乖離したデータも含めた直線回帰を行うと、べき乗数を大きく見積もることになり、大きなサイズの亀裂を過小評価することになる。有限なサンプリング面上におけるトレースの偏差を調べる

ことは、亀裂サイズ分布の推定をする上で重要であると言える。

長いトレースが直線から乖離するのは、truncation によってトレース長が短くなるためであると考えられる。truncation の影響を調べるために、トレースサンプリングをシミュレーションし、得られるトレース長を用いて亀裂サイズ分布のべき乗数を推定した場合の推定誤差を調べる。尚、推定誤差は次式で定義する。

$$\text{推定誤差} = |\text{べき乗数の真値} - \text{推定値}| \quad (9)$$

サンプリング面の広さは、岩盤部まで掘削した掘削面における調査を想定し 100m×100m とする。スキャンラインはサンプリング面の中央にとる。亀裂サイズ分布のべき乗数は、既往の研究(井尻ら⁴⁾)を参考にして 3.0~4.0 とし、0.1 の増分で変化させた 11 ケースについて調べる。トレース長の最小値には、サンプリング面よりも十分小さな値として 1m を用いる。この設定により、半径が 0.5m 以下の亀裂は、トレース長分布に寄与しなくなるので、亀裂半径の最小値を 0.5m とする。亀裂方向は、方向分布の影響を取り除くため、一様分布とする。亀裂密度は、スキャンラインでの密度が 1 本/m になるように定める。亀裂を発生させる領域は、水平方向 200m、鉛直方向 100m の直方体とし、サンプリング面は中央部に設ける。亀裂サイズ分布のべき乗数は、両対数軸上のトレース長累積分布における傾きを用いて推定する。試行数は各べき乗数において 5 ケースとし、平均と分散を求める。

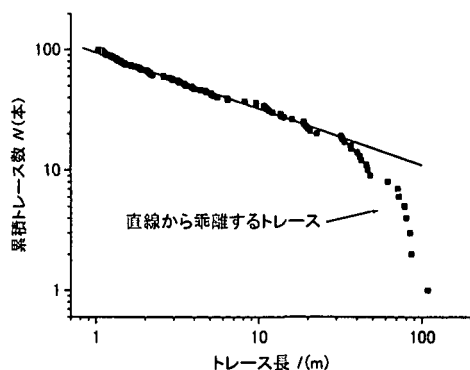


図-3 直線から乖離するトレース分布の例

(1) スキャンラインサンプリング

推定誤差の平均を、各べき乗数に対してプロットし、図 4 に示す。truncation による影響を調べるため、truncation データを除いて回帰分析した結果も併せて示す。尚、スキャンラインサンプリングでは、べき乗数 3.0 の場合は直線にならないため、べき乗数を 3.1 からにする。

べき乗数が小さいほど誤差が大きく、べき乗数 3.1 の場合、誤差は 0.45 となる。べき乗数と比較すると、誤差は無視できない大きさである。truncation データを除いた場合は、全体的に誤差が小さくなっており、推定値の精度が上がっている。べき乗数が 3.8 以上では、truncation データの有無による差はほとんどないが、これは、図 5 に示すように全トレースに対する truncation データの割合が少ないことによる。truncation による影響は、この結果が示すように確かに存在するが、べき乗数が 3.1 の場合、truncation データを除いても誤差が 0.3 あり、truncation データを除くだけでは誤差は解消しない。

誤差の主な原因は、トレース長分布のスケールとサンプリングエリアの大きさの関係にある。N=100 とし、両対数軸上のトレース長累積分布が直線になるとして、最長トレースの長さを計算する。両対数軸上のトレース長累積分布が直線の場合、 a を亀裂サイズ分布のべき乗数とすると、最長トレース長は次式で計算される。

$$l_{\max} = 10^{\frac{\log N}{a-3}} = 10^{\frac{2}{a-3}} \quad (10)$$

べき乗数が 4 の場合、 $l_{\max}$ は 100m でありサンプリングエリアの大きさと同じである。従って、 $l_{\max}$ 近傍の長いトレース長が十分観測可能であり、両対数軸上のトレース長累積分布はほぼ直線となる。一方、べき乗数が小さくなるに従い $l_{\max}$ は大きくなり、べき乗数 3.6 でサンプリングエリアの大きさより 1 オーダー大きくなる。 $l_{\max}$ 近傍のトレースは、サンプリングエリアの大きさと同程度のトレース長として観測され、両対数軸上のトレース長累積分布は直線から乖離する。べき乗数が 3 に近いほどトレース長の大きな部分で直線からの乖離が大きくなり、直線回帰により求めたべき乗数の推定値は精度が悪くなる。

先に述べたように、両対数軸上のトレース長累積分布における直線からの乖離は、truncation データを除くだけで

は補正できない。両対数軸上のトレース長累積分布に対する直線回帰を行う場合は、直線部のみを取り出す必要がある。しかし、どこで分布を打ち切るか恣意的になり、値がばらつく可能性が高い。

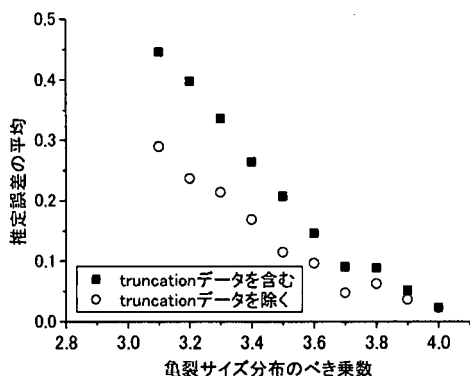


図-4 べき乗数の推定誤差(スキャンライン)

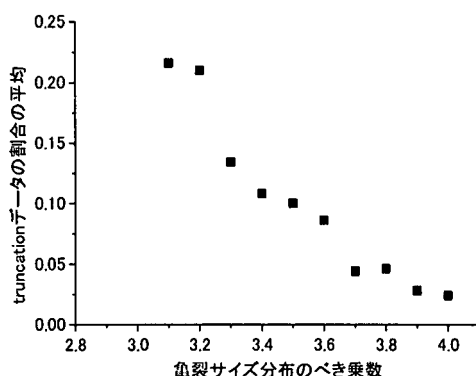


図-5 truncation データの割合(スキャンライン)

(2) エリアサンプリング

スキャンラインサンプリングと同様に、エリアサンプリングを模擬し、両対数軸上のトレース長累積分布から亀裂サイズ分布のべき乗数を推定した結果を図6に示す。べき乗数が小さいほど推定誤差が大きくなる傾向はあるが、問題になるほどの大きさではなく、高い精度が得られている。

エリアサンプリングでは、亀裂サイズ分布のべき乗数が3.0~4.0の時、両対数軸上のトレース長累積分布に対する回帰直線の傾きの大きさが1.0~2.0となり、スキャンラインサンプリングの場合よりも大きくなる。このため、べき乗数が小さくても、 $l_{\max}$ 近傍のトレースがサンプリングエリアの大きさと比較して、測定可能なスケールとなる。スキャンラインにおけるトレース数が100の時、エリアサンプリングでのトレース数は3000~6000程度になることから、 $N=3000$ とすると、 $l_{\max}$ を求める計算式は次式のようにになる。

$$l_{\max} = 10^{\frac{\log 3000}{a-2}} = 10^{\frac{3.48}{a-2}} \quad (11)$$

$a=3.1$ の場合、 $l_{\max}=1460\text{m}$ でありサンプリング面よりもかなり大きくなるが、スキャンラインサンプリングと比較すると、サンプリング面の大きさとの差は遥かに小さい。また、 $a=3.7$ で $l_{\max}$ が約110mとなり、サンプリング面と同等のサイズとなる。このため、スキャンラインサンプリングよりも、両対数軸上のトレース長累積分布は直線性が高くなり、回帰直線によるべき乗数推定の精度が上がっている。

エリアサンプリングは、スキャンラインサンプリングよりも多くのトレースを測定できる点で有利であるが、両対

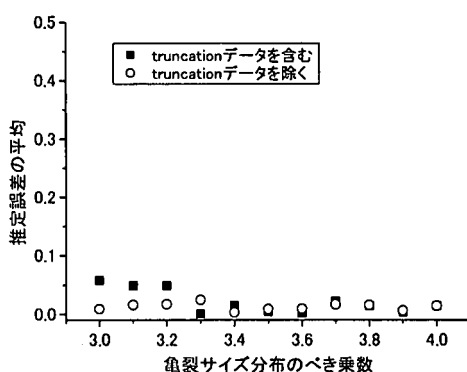


図-6 べき乗数の推定誤差
(エリアサンプリング 100m×100m)

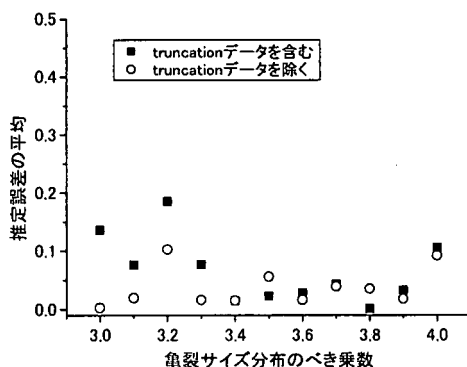


図-7 べき乗数の推定誤差
(エリアサンプリング 100m×10m)

数軸上のトレース長累積分布に対する回帰直線から、亀裂サイズ分布のべき乗数を推定する場合の精度高さの観点からも有利な方法であるといえる。

ただし、推定精度はサンプリングエリアの大きさによっても変化することに注意する必要がある。図7にサンプリングエリアの大きさが $100\text{m} \times 10\text{m}$ の場合における推定誤差を示す。サンプリングエリアが $100\text{m} \times 100\text{m}$ の場合と比較して誤差が大きくなっている。また、図8に示すように標準偏差も大きくなっている。このように、 l_{max} と比較してサンプリングエリアの大きさが小さくなると推定精度が悪化する。高レベル放射性廃棄物地層処分の場合には、坑道で求めたトレース長データから亀裂サイズ分布を推定することになると考えられる。坑道のような狭い領域における亀裂サイズ分布の推定精度に関しては、今後取り組まなければならない課題である。

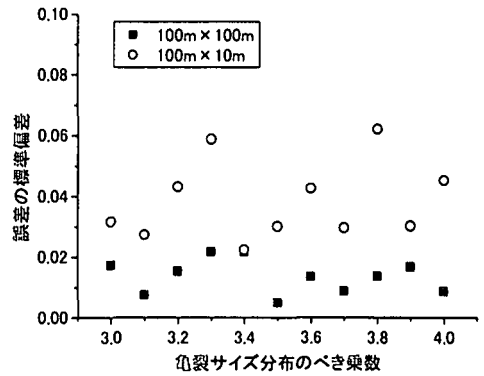


図-8 サンプリングエリアの大きさが異なる場合における推定誤差の標準偏差の差

5. まとめ

両対数軸上の降順トレース長累積分布が直線となる場合、亀裂サイズ分布がべき分布に従うことを示した。また、直線の傾きと亀裂サイズ分布のべき乗数との間には次の関係があることを示し、トレースサンプリングシミュレーションによってその成立を確認した。

① スキャンラインサンプリングの場合：亀裂サイズ分布のべき乗数 = |トレース長累積分布の直線の傾き| + 3

② エリアサンプリングの場合：亀裂サイズ分布のべき乗数 = |トレース長累積分布の直線の傾き| + 2

これらの関係は、サンプリング面が無限に広いことを前提としている。実際のサンプリング面は有限であり、長いトレースは直線から乖離する。このため、両対数軸上の降順トレース長累積分布に対する回帰直線からべき乗数を推定する場合、誤差を生じる。亀裂サイズ分布のべき乗数を 3.0~4.0 に設定し、亀裂サイズ分布のべき乗数に関する推定誤差を解析的に調べ、次の結果を得た。

① スキャンラインサンプリングにおける推定誤差は、エリアサンプリングの場合よりも大きい。

② 亀裂サイズ分布のべき乗数が小さいほど推定誤差が大きくなる。

③ サンプリング面の大きさが、トレース長の分布スケールと比較して十分小さい場合、推定誤差が大きくなる。

両対数軸上に表した降順トレース長累積分布の回帰直線から亀裂サイズ分布のべき乗数を推定する場合は、以上の点に留意する必要がある。

参考文献

- 1) Kulatilake, P.H.S.W: Relation between discontinuity size and trace length, 27th U.S Symp. on Rock Mechanics, Tuscaloosa, AL, pp.130-133, 1986
- 2) スピーゲル, 数学公式・数表ハンドブック, マグロウヒル, 1984
- 3) Piggot, A.R.: Fractal relations for the diameter and trace length of disc-shaped fractures, J. Geophys. Res., 102(8), pp.18121-18125, 1997
- 4) 井尻, 澤田他: 割れ目ネットワークモデルの水理特性に及ぼす割れ目スケール効果の影響, 土木学会論文集, No.694, III-57, pp.179-194, 2001