

亀裂ネットワークの通水時における亀裂密度について

PERCOLATION FRACTURE DENSITY OF FRACTURE NETWORKS FOLLOWING A POWER LAW SIZE DISTRIBUTION

重野 喜政

Yoshimasa SHIGENO

The relationship between connectivity and density is investigated numerically for a 3D disk shaped fracture system following a power law length distribution. By using percolation threshold evaluated from third moment of fracture size distribution, only the exponent number and the ratio of block size to minimum fracture size are found to be parameters of percolation fracture density. The empirical formula for percolation density is proposed using this result.

Key Words : fracture network, percolation threshold, power law distribution

1. はじめに

近年岩盤の浸透流問題や物質拡散問題に亀裂ネットワークモデルが用いられるようになってきた。亀裂ネットワークモデルは、流路のクリティカルパスを表現しうることから、高レベル放射性廃棄物処分や廃棄物処分のような汚染物質の漏出時間や漏出点が問われる問題への適用に有効であると考えられている。しかしながら、亀裂の連結によって形成されるネットワークは大変複雑であるため、その特性が十分に解明されているとは言えない。

そのような特性の1つに、亀裂ネットワークの通水時における亀裂密度がある。ここで通水するとは、注目している区間が亀裂によって連結された状態を指し、通水時の亀裂密度とは、モデルの亀裂密度を増加させていった時、通水していない状態から通水している状態に遷移した時点の亀裂密度を指すことにする。

通水時の亀裂密度は、亀裂ネットワークモデルによるモデル化において、モデルが通水するかどうかを事前に判別する指標となる。通水時の亀裂密度が、亀裂の幾何学的特性に関するパラメーターから容易に推定できるならば、その結果に応じた解析手法や調査手法を選択することが可能になり大変有用である。そこで本論文では、亀裂の幾何学的分布のパラメータから、通水時の亀裂密度を求める推定式の定式化を試みる。

通水時の亀裂密度に関する研究は、数多くなされている。2次元の線要素や3次元の四角形を用いた研究では、

Robinson (1982,84)の研究がよく知られている。Robinsonは、大きさが一定もしくは、わずかに変動する要素を用い、浸透閾値を求めている。要素の大きさがランダムに変化する3次元要素を用いた研究では、BourとDavy(1998)の研究がある。Bourらは、1辺の長さがべき分布に従う正方形で、直交する3方向に方向を固定した平面を用いて解析的検討を行い、浸透閾値を求めている。しかしながら、実際の亀裂ネットワークモデルで扱う亀裂の幾何学的特性は、①亀裂形状は円盤であるとする、②亀裂の大きさ、方向、中心位置は、ある確率分布に従い、ランダムに変化する、という条件を仮定することが多く、このような条件下における通水時の特性が必要である。しかも、対象とする領域の大きさは様々であるので、領域の大きさに依存しない特性を求めることが重要である。

以下、上記条件に従う亀裂ネットワークの通水時における亀裂密度をシミュレーションによって求め、亀裂分布に関するパラメータから通水時の亀裂密度を求める推定式を提案する。

2. シミュレーションの手法と条件

シミュレーションによって通水時の亀裂密度を求める方法について述べる。亀裂を発生させる領域としてある大きさのブロックを設定する。亀裂の方向、中心位置、半径をそれぞれの分布関数に従う乱数から発生し、ブロック内に亀裂を1枚ずつ追加していく。新しく追加した亀裂は、次のいずれかの振る舞いをし、ネットワークの性質を変化させる。①既存の亀裂と交差しない(新しいクラスターを形成する)、②既存の1つのクラスターと交差する、③既存の複数のクラスターを連結する。尚、2つ以上の亀裂の連結することによりできる亀裂の集合をクラスターと呼ぶことにする。新しく追加した亀裂が、上記のいずれに該当するか調べ、既存のクラスターの状態が変化した場合、そのクラスターがブロックの6つの境界と交差するかどうかを調べる。そして、そのクラスターが初めて6つの境界全部と交差した時「亀裂ネットワークが通水した」と定義する。通水時の全亀裂数、通水したクラスター内の亀裂数、亀裂サイズ、それぞれに関する統計量を求め、その特性を調べる。

クラスターは少なくとも2つの境界面と交差すれば境界間での通水性を示すが、全方位的な通水性の方がネットワークにとってより大きな変化であろうと考え、6つの境界すべてと交差する場合を取り上げた。2つの境界における通水性については、今後検討する。

シミュレーションに用いる亀裂は円盤であるとし、円盤の半径を亀裂サイズとする。以降亀裂半径の分布を亀裂サイズ分布と呼ぶことにする。亀裂サイズ分布には、べき分布を用いる。べき分布は、主に次の2つの理由から、亀裂の大きさを表すモデルとしてよく用いられるようになってきた。①べき分布は、亀裂サイズが小さいほど分布数が多く、対数正規分布などと比較してより自然な分布であると考えられている。②異なるスケールにおける亀裂サイズ分布を統一的に表現できる。(大野,小島 1993)

亀裂サイズ分布には、対数正規分布やガンマ分布が多用されてきた。これらの分布はピークを持ち、亀裂サイズが小さくなるほど分布確率が小さくなるのが特徴である。亀裂サイズ分布は、トレース長の測定値に対するフィッティングによって推定するのが一般的であるが、測定されたトレース長分布は、サンプリングの下限値周辺において小さくなる傾向がある。従って、対数正規分布やガンマ分布のようにピークを持つ分布のほうが、より適

合しやすいのだと思われる。しかしながら、マイクロクラックのレベルまで考えれば、小さな亀裂ほど数が多いと見るのがより現実的である。

亀裂サイズをべき分布とする場合、亀裂半径は、次式に従う。

$$f(r) = \alpha r^{-a}, \quad \alpha = 1 / \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} r^{-a} dr \quad r_{\min} \leq r \leq r_{\max}, \quad a > 0 \tag{1}$$

ここに、 r は亀裂半径、 a はべき乗数、 $r_{\min}$ 、 $r_{\max}$ は亀裂半径の最小値、最大値である。

式(1)では、亀裂サイズの最小値を設けることになるが、亀裂ネットワークモデルによるモデル化を行う場合、亀裂を発生させる領域と比較してある程度小さな亀裂は、モデル全体への透水性の寄与が少なくと仮定し除外することは非合理的でないと考える。また、データ取得とモデル化の両面からみた困難さからも、亀裂サイズの最小値を設けることは必要であると考え。亀裂サイズの最小値は、一般的にトレース長サンプリング時の下限値に基づき決定する。トレース長の下限値を $l_{\min}$ とすれば、 $l_{\min}/2$ よりも小さな亀裂サイズの分布を決定づけるデータが存在しないことになるため、亀裂サイズの最小値を $l_{\min}/2$ に設定する。

亀裂サイズの最大値に関しては、べき乗数によっては、統計量を求めるために確率変数の最大値を定める必要があるため設定する。本論文では、亀裂を発生させる領域と比較して十分大きな値を亀裂サイズの最大値とする。

ただし、確率変数の最小値と最大値を定める場合、その統計量が最小値と最大値によって変化することになるので、統計量を示す時に最小値と最大値を明示する必要がある。

べき乗数に関しては、Renshaw(1999)が複数のサイトで得られたトレース長をべき分布を用いて分析し、べき乗数が $0 < a < 3$ の範囲で求まり、平均±標準偏差は、 $1.4 < a < 2.2$ の範囲となったことを示している。本研究ではこの結果を利用する。べき分布はフラクタルであること、Renshawのトレース長データは2次元平面上のデータであること、本研究での亀裂サイズは3次元空間上のデータであること、以上を考慮してRenshawのべき乗数に1を足し、本研究で用いる亀裂サイズ分布のべき乗数を $1 \leq a \leq 4$ とする。尚、便宜上範囲の両端も考慮している。亀裂半径の最小値は、ブロックサイズとあわせて後ほど考察する。

亀裂方向と亀裂の中心位置に関しては、一様分布であるとする。また、ターミネーションは考慮しない。

以上のシミュレーション条件を表1にまとめる。シミュレーションは、各ケースとも1,000回行い、その統計量を用いて結果を考察する。

表－1 シミュレーションの条件

亀裂形状	円盤
亀裂サイズ分布	べき分布 $f(r) = \alpha r^{-a} \quad r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$
亀裂中心位置	一様分布
亀裂方向分布	一様分布
ターミネーション	考慮しない

3. ブロックサイズと亀裂サイズの最小値について

スケールの違いが通水時の亀裂密度に与える影響を調べるために、ブロックサイズを $L=10,50,100,200,500\text{m}$ と変化させ、亀裂サイズの最小値 $r_{\min}$ を $L/100$ とした場合のシミュレーションを行う。2節で述べたように、トレースサンプリングにおける下限値の半分を亀裂サイズの最小値に設定する前提に立てば、最小亀裂サイズを $L/100$ に

することは、トレースサンプリングの下限值 $l_{\min}$ をそれぞれの $L(10,50,100,200,500\text{m})$ に対し、 $l_{\min}=0.2,1,2,4,10\text{m}$ と設定したことを意味し、妥当な設定であると考える。

シミュレーションでは、亀裂を順次発生させ、亀裂の連結により形成されるクラスターが、初めてブロックの6つの境界面と交差した時の全亀裂数を求めた。シミュレーションは1,000回行い、通水時における全亀裂数の平均と標準偏差を求めた。シミュレーションの結果を図1に示す。図中記号は平均を表し、ひげは標準偏差を表す。

それぞれのべき乗数に関して見ると、全亀裂数はブロックサイズには依存していないことがわかる。これは、べき分布の持つ自己相似性から、ブロックサイズを変化させても、同じスケールで最小亀裂サイズを変化させれば、ブロックサイズに対する相対的な亀裂サイズ分布が変化しないためであると考えられる。

このように亀裂サイズにべき分布を用いる場合、ブロックサイズと亀裂サイズの最小値の相対的な関係のみが重要であり、ブロックサイズと最小亀裂サイズの比が一定の場合、通水時の亀裂数は、ブロックサイズによらず一定となる。従って、様々なスケールにおける通水時の亀裂密度の変化を調べるためには、ブロックサイズと最小亀裂サイズの比を変化させればよいことがわかる。

4. 通水時の亀裂密度

亀裂サイズの最小値とブロックサイズとの比によってスケールを変化させ、それぞれのスケールにおける通水時の亀裂密度を求める。ブロックサイズは $L=100\text{m}$ に固定し、亀裂サイズの最小値を $L/50, L/100, L/150, L/200$ のように変化させる。亀裂サイズの最大値は、ブロックサイズよりも十分大きい値として $r_{\max}=10^5\text{m}$ とする。

シミュレーションでは亀裂を順次発生させ、亀裂の連結により形成されるクラスターが、初めてブロックの6つの境界面すべてと連結した時、亀裂の発生を停止する。シミュレーション終了時の全亀裂数を通水時の亀裂数、6面すべてと連結したクラスターの亀裂数を通水しているクラスター内の亀裂数とし、1,000回のシミュレーションからそれぞれの平均と標準偏差を求める。

表2に亀裂サイズの最小値が $L/100=1\text{m}$ の場合における通水時の状態を示す。全亀裂数と通水しているクラスター内の亀裂数の比は、べき乗数が1.5の場合を除き2割以下であり、通水に関与している亀裂はごく一部であることがわかる。ポアホール等での観測においても、開口亀裂であるにも係わらず、一部の亀裂しか透水性を示さないことがよくみられ、今回の結果はそのような状況を説明しうるものだと考えられる。

べき乗数が大きくなるほど、通水時の亀裂数と通水しているクラスター内の亀裂数が多くなっている。これは、べき乗数が大きくなるほど小さな亀裂が多くなり、小さな亀裂が多数連結することによりクラスターが形成され、

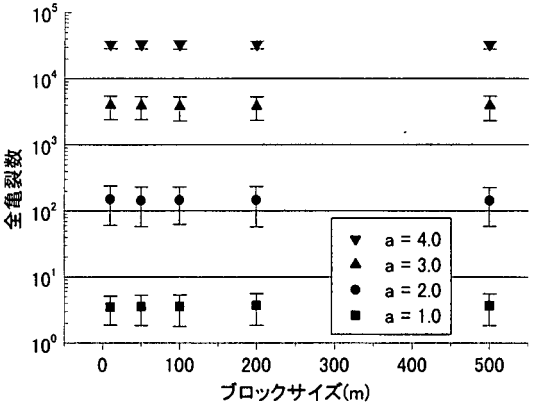


図-1 通水時の全亀裂数($r_{\min}=L/100$, 試行数1,000回, 記号は平均, ひげは標準偏差を表す。)

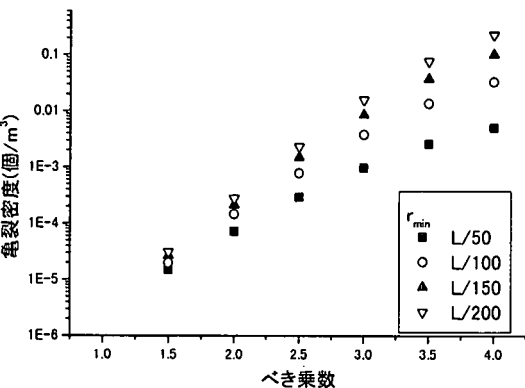
通水に至るからである。一方、べき乗数が小さい場合は、通水時の亀裂が少なく、通水したクラスター内の亀裂数も少ない。べき乗数が小さい場合、サイズの大きな亀裂の割合が増え、少数の大きな亀裂が通水を支配するためである。

表－2 $L=100\text{m}$, $r_{\min}=1\text{m}$, $r_{\max}=10^5\text{m}$ における通水時の状態

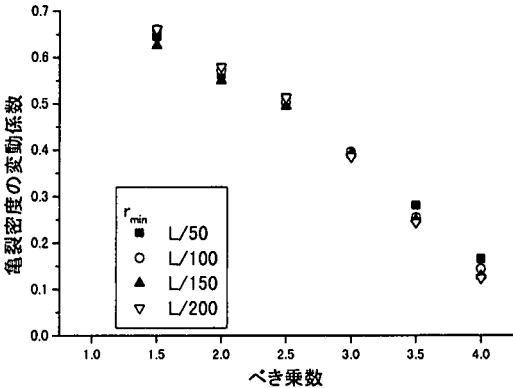
べき乗数	亀裂サイズの平均(m)	亀裂数		亀裂密度 (個/ m^3)	通水しているクラスター内の 亀裂数		通水しているクラスター内の 亀裂数と全亀裂数との比	
		平均	標準偏差		平均	標準偏差	平均	標準偏差
1.5	316.2	19.7	11.1	1.97E-05	5.9	3.9	3.28E-01	1.53E-01
2	11.5	141.8	81.8	1.42E-04	22.9	19.6	1.55E-01	7.03E-02
2.5	3.0	769.3	352.6	7.69E-04	27.7	17.0	1.09E-01	4.58E-02
3	2.0	4043.6	1579.6	4.04E-03	511.7	126.9	1.13E-01	4.83E-02
3.5	1.7	13526.4	3433.4	1.35E-02	1867.2	994.1	1.29E-01	4.68E-02
4	1.5	32839.6	4660.8	3.28E-02	5325.7	2198.1	1.57E-01	5.03E-02

図2に最小亀裂サイズ毎にまとめた亀裂密度とべき乗数の関係図を示し、図3に亀裂密度の変動係数を示す。前述したようにべき乗数が大きくなるのに伴い、亀裂数が増加するため、通水時の亀裂密度も大きくなっている。また、最小亀裂サイズを小さくした場合、べき乗数を大きくした場合と同様に、サイズの小さな亀裂が増えることになるので、通水に必要な亀裂密度は大きくなる。亀裂密度の変動係数は、べき乗数が大きくなるほど小さくなっている。この点も、べき乗数が大きくなるほど、亀裂数が増えることによる。小さな亀裂の連結によって通水に至るため、現象の変動幅が小さいのである。

このように通水時の亀裂密度は、べき乗数及び、ブロックサイズと最小亀裂サイズの比によって変化する。



図－2 通水時の亀裂密度



図－3 通水時の亀裂密度に対する変動係数

5. 通水時における亀裂密度の推定式

亀裂密度の推定式を求めるために、浸透閾値を利用する。浸透閾値の定義式には、BourとDavy(1998)が提案した亀裂サイズの3次モーメントを利用した式を用いる。Bourらは、正方形の平板を用いて定義したが、本論文では、円盤の場合の浸透閾値 P_c を次式のように定義する。

$$P_c = \frac{N_c}{L^3} \left\{ \int_{r_{\min}}^{L/2} f(r) r^3 dr + \int_{L/2}^{r_{\max}} f(r) (L/2)^3 dr \right\} \tag{2}$$

ここに、 P_c は浸透閾値、 N_c は通水時の亀裂数、 L はブロックサイズ、 r は亀裂サイズ、 $r_{\min}$ は亀裂サイズの最小値、 $r_{\max}$ は亀裂サイズの最大値、 $f(r)$ は亀裂サイズの確率密度関数である。

P_c の {} 内は、第1項の積分範囲を $r_{\min} \sim r_{\max}$ とし、第2項がないとすれば、亀裂を球と見なした時の平均体積である。従って式(2)は、ブロック中にある大きさの球を入れていったとき、体積比がいくつになったら通水状態になるかという値を示している。ただし、亀裂がブロックよりも大きくなった時、ブロックの通水性から見れば、ブロックサイズ以上の大きさは意味がないので、直径がブロックサイズと同じであるとして体積を求める。これが {} 内の第2項である。亀裂ネットワークの浸透閾値に関しては、定まった考え方がないが、3次元モデルでは亀裂の大きさに関する3次元量を用いるべきであり、式(2)は合理的な定義式の1つであると考え。

図4にブロックサイズを100mとし、最小亀裂サイズを変化させた時の P_c を示す。図から P_c は、最小亀裂サイズによらずべき乗数のみによって変化することがわかる。この結果から通水時における亀裂密度の推定式を求める。

亀裂サイズの分布形が定まっているので、式(2)は積分することができる。ブロックサイズの最小亀裂サイズに対する比を $b(L/r_{\min})$ とし、式(2)を積分すると次の近似式を得る。

$$P_c \approx \frac{3b^{1-a}}{2^{4-a}(4-a)} N_c \quad (1 < a < 4) \quad P_c \approx \frac{N_c}{b^3} (3 \ln \frac{b}{2} + 1) \quad (a = 4) \quad (3)$$

式(3)のうち、 $1 < a < 4$ の場合を考える。 P_c が b によって変化しないことから、 a の関数として近似することが可能である。 P_c の近似式を求めれば、亀裂数 N_c を a と b の関数として表すことができ、通水時における亀裂密度の推定式が求まる。図4のデータを基に P_c を a の2次式で近似すると式(4)を得る。 P_c の近似式をプロットしたものを図4中に示す。

$$P_c = -0.063 + 0.49a - 0.092a^2 \quad (4)$$

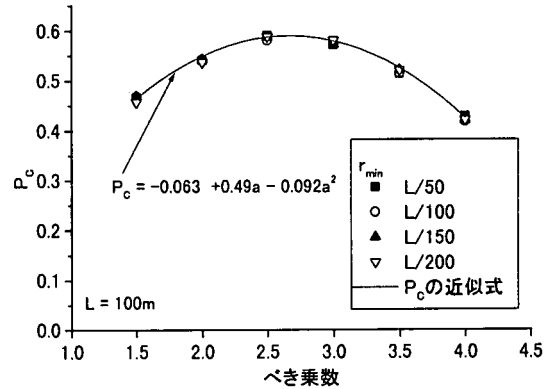


図-4 最小亀裂サイズを変化させた時の P_c と近似式

式(3)と式(4)から、式(5)を通水時の亀裂密度の推定式として得る。 $a=4$ の場合は、式(3)を変形した式である。

$$\rho_c = \frac{N_c}{L^3} = \frac{2^{4-a}(4-a)(-0.063 + 0.49a - 0.092a^2)}{3b^{1-a}L^3} \quad (1 < a < 4)$$

$$\rho_c = \frac{N_c}{L^3} = \frac{0.42b^3}{(3 \ln \frac{b}{2} + 1)L^3} \quad (a = 4) \quad (5)$$

ここに、 ρ_c は通水時の亀裂密度、 N_c は通水時の亀裂数、 a はべき乗数、 L はブロックサイズ、 b はブロックサイズの最小亀裂サイズに対する比($b=L/r_{\min}$)である。

図5に $a=2$ と $a=3$ の場合について式(5)から求めた通水時の亀裂密度と、1,000回のシミュレーションにおける平均から求めた通水時の亀裂密度を示す。両者はよく一致しており、式(5)が通水時の亀裂密度を求める上で有効な式であることがわかる。ただし、本研究で取り扱っている事象は、統計的事象であり、推定値に対する分散も考

慮する必要がある。分散の定式化は今後の課題とする。

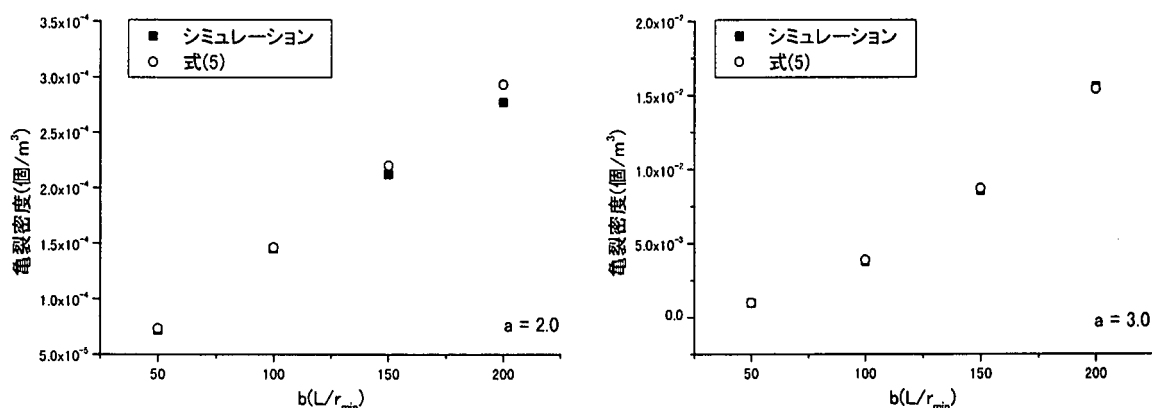


図-5 シミュレーションで得られた亀裂密度と式(5)から得られた亀裂密度の対比

6. まとめ

亀裂サイズがべき分布に従う亀裂ネットワークモデルにおいて、通水時の亀裂密度を表す推定式を提案した。この推定式を用いれば、亀裂ネットワークを構築した時、領域全体を連結するような通水状態になるかどうかを容易に判定することが可能となり、浸透問題を目的とした岩盤のモデル化を行う場合に有益な情報となる。

その他に得られた知見を示す。

- ①全亀裂の内、通水しているクラスターに属する亀裂はごく一部である。これは、実際の岩盤において一部の亀裂しか透水性を示さないこと傾向と一致する。
- ②通水するクラスターは、べき乗数が大きい場合多数の小さな亀裂の連結によって形成され、べき乗数が小さい場合少数の大きな亀裂の連結によって形成される。
- ③最小亀裂サイズをブロックサイズの定数倍にすると、通水時の亀裂数がブロックサイズによらず一定になる。

今後は、次の3点について調べる予定である。①2面の境界における通水性について調べる、②通水時における亀裂密度の分散を表す式を求める、③亀裂方向が一様分布でない場合について調べる。

参考文献

- 1) 大野博之, 小島圭二, 岩盤割れ目のフラクタル(その2)フラクタル特性と分布のばらつき, 応用地質, 34巻2号, pp.12-26, 1993
- 2) 重野喜政, 亀裂ネットワークモデルにおける亀裂交差性についての検討, 第35回地盤工学研究発表会, pp.61-62, 2000
- 3) Bour, O., and Davy, P., On the connectivity of three-dimensional fault networks, *Water Resour. Res.*, 34(10), pp.2611-2622, 1998
- 4) Renshaw, C. E., Connectivity of joint networks with power law length distributions, *Water Resour. Res.*, 35(9), pp.2661-2670, 1999
- 5) Robinson, P. C., Connectivity of fracture systems-a percolation theory approach, *J. Phys. A Math. Gen.*, 16(3), pp.605-614, 1982
- 6) Robinson, P. C., Numerical calculations of critical densities for lines and planes, *J. Phys. A Math. Gen.*, 17(14), pp.2823-2830, 1984