

クリギングとカルマンフィルタを用いたダム基礎岩盤の透水性の評価

ESTIMATION OF PERMEABILITY FIELD OF GROUTED ROCK MASS AS A FOUNDATION OF A WASTE
LANDFILL DAM USING KRIGING AND KALMAN FILTERING

大西有三*・大津宏康**・田中 誠***・崎谷和貴****

Yuzo OHNISHI, Hiroyasu OHTSU, Makoto TANAKA and Kazutaka SAKIYA

Abstract: It is important to evaluate the permeability field of a waste landfill dam foundation for enough water-tightness and economical construction. Step-by-step grouting method is usually applied for this purpose. When a certain grouting step is completed, it is necessary to judge if the following step should be performed or not. The misjudgement would cause the incomplete water-tightness or uneconomical construction. This study shows that it is possible to judge objectively by getting the Lugeon value distribution and the exceeding probability for the control value considering the relationship of the neighboring two steps using kriging and Kalman filtering.

Key words: Grouting, Dam, Kriging, Kalman Filtering

1. まえがき

グラウト施工されたダム基礎岩盤の透水性を正確に評価することは、十分な止水効果を得るため、また経済的な施工を行うために必要である。ある段階の注入が終わった時点で、対象岩盤のすべての部分のルジオン値が基準以下になったかどうかの判定は、少数のチェックボーリングのルジオン試験の結果から対象岩盤全体の透水性を評価することによってなされる。透水性の推定が正しくなければ、実際には止水が不十分なものを十分と判断してしまうか、安全のために過剰なグラウト施工を行うかという、危険か不経済かの択一を迫られることになる。

ルジオン試験の結果をクリギング¹⁾によって補間すれば、各注入段階終了時におけるルジオン値の空間分布を推定するとともに推定誤差を算出することができ、さらに、ルジオン値が基準を超過する確率を求めることができる。しかし、単に通常のクリギングのみによる推定を行っただけでは、注入段階間のデータの関連性は無視され、注入の効果を直接評価することができない。そこで本研究では、クリギングとカルマンフィルタを併用した逆解析によって、前後する注入段階同士の関連性を考慮して、注入完了後のルジオン値の分布およびルジオン値の規制値超過確率を求め、次の注入段階の施工を行うか否かを客観的に判断するこ

キーワード：グラウチング、ダム、クリギング、カルマンフィルタ

*フェロー Ph. D.・工博 京都大学大学院教授 工学研究科土木システム工学専攻

**正会員 工博 京都大学大学院助教授 工学研究科土木システム工学専攻

***正会員 京都大学大学院助手 工学研究科土木システム工学専攻

****学生会員 京都大学大学院修士課程 工学研究科土木システム工学専攻

とができることを示す。

2. クリギングの結果を先験情報としたカルマンフィルタによる逆解析

2.1 逆解析の定式化

いま、未知量を n 次元ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ とし、これを m 個の観測値 $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)^T$ から推定することを考える。 \mathbf{z} には観測誤差（ノイズ）が含まれているものとする。 \mathbf{x} と \mathbf{z} の間には

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (1)$$

なる関係があるものとする。ここに、 \mathbf{H} は既知の $(m \times n)$ 行列、 \mathbf{v} は \mathbf{x} とは無相関の m 次元の観測誤差ベクトル（平均値ベクトルが $\mathbf{0}$ 、共分散行列が \mathbf{R} の多次元正規分布に従うと仮定する）であり、次式を満たす。

$$E[\mathbf{v}] = \mathbf{0} \quad (2) \quad E[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] = \mathbf{R} \quad (3)$$

推定対象とする領域内の n 個の点におけるルジオン値を、 m 個の点で行われた透水試験の結果から推定せよ、というように問題を具体化すれば、上記のような表現が可能である。通常、観測値の個数は求めるべき未知量の個数よりも少ない $(n > m)$ 。このとき、条件が不足するため、 \mathbf{x} を式(1)から求めることはできない。そこで、何らかの先験情報を利用して条件を増やすことができれば、 \mathbf{x} を求めることができるようになる。ここでは、一般的なBayesの方法に従い、次のように先験情報を与えることを考える。

まず、未知量ベクトル \mathbf{x} が多次元正規分布に従うと仮定する。このとき、

$$E[\mathbf{x}] = \bar{\mathbf{x}} \quad (4) \quad E[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T] = \mathbf{M} \quad (5)$$

である。ここに、 $\bar{\mathbf{x}}$ および \mathbf{M} はそれぞれ \mathbf{x} の平均値ベクトルおよび共分散行列である。 \mathbf{x} の確率密度関数 $p(\mathbf{x})$ は次式で表される。

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{M}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right\} \quad (6)$$

次に、この多次元正規分布（事前情報）に対して、Bayesの定理に基づき、観測値を用いて式(6)の確率場を修正する。Bayesの定理は、観測値 \mathbf{z} が得られたという条件のもとでの原因 \mathbf{x} の従う事後分布（条件付確率分布）を $p(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ とすると、

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \frac{p(\mathbf{z}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{z})} \quad (7)$$

と表現される。 \mathbf{x} の最適推定値を $\hat{\mathbf{x}}$ とすると、これは、式(7)の確率密度関数が最大とするものであるとすることができる。式(1)(2)(3)(4)(5)より、

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \frac{|\mathbf{H}\mathbf{M}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\{(z - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1}(z - \mathbf{H}\mathbf{x}) + (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) - (z - \mathbf{H}\mathbf{x})^T (\mathbf{H}\mathbf{M}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}(z - \mathbf{H}\mathbf{x})\}\right] \quad (8)$$

となる。 \mathbf{z} が与えられたときに式(8)の値を最大化するためには、式(8)の{}内を最小化すればよいので、これを \mathbf{x} で微分して0とおいて、

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{P}\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}(z - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) \quad (9) \quad \mathbf{P} = (\mathbf{M}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \quad (10)$$

を得る。 \mathbf{P} の意味は、 \mathbf{x} の $\hat{\mathbf{x}}$ のまわりの共分散行列であり、観測値を与えることによって、 \mathbf{x} は $\hat{\mathbf{x}}$ に、 \mathbf{M} は \mathbf{P} に、それぞれ修正されたことになる。 $\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}$ は非負行列であるので、観測が行われると推定誤差の共分散の値は減少することがわかる。式(9)の右辺第2項の係数行列は、カルマンゲインに相当する。これを \mathbf{K} とおくと、

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{M}\mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{M}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (11) \quad \mathbf{P} = \mathbf{M} - \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{M} \quad (12)$$

であることが証明できる。式(12)の右辺第2項は、推定誤差の共分散の値の観測による減少分を意味する。式(11)(12)の証明は、文献²⁾を参照されたい。

そして、 l 個の観測値（ l 次元ベクトル \mathbf{y}_0 で表現する）が多次元正規分布に従うと仮定して、 l 個の観測値に対する共分散行列 \mathbf{N} を最尤法を用いて算定する。仮定より、

$$E[\mathbf{y}_0] = \bar{\mathbf{y}}_0 \quad (13) \quad E[(\mathbf{y}_0 - \bar{\mathbf{y}}_0)(\mathbf{y}_0 - \bar{\mathbf{y}}_0)^T] = \mathbf{N} \quad (14)$$

である。ここに、 $\bar{\mathbf{y}}_0$ は \mathbf{y}_0 の平均値ベクトルである。共分散行列 \mathbf{N} の各要素は、関係する2点の間の距離ベクトルの関数 $c(\mathbf{h})$ （共分散関数）の値である。 $c(\mathbf{h})$ の関数形は未知であるから、 $c(\mathbf{h})$ の関数形を仮定し、 $c(\mathbf{h})$ の関数形を支配する未知のパラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$ を最尤法により決定する。パラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$ のもとで \mathbf{y}_0 が観測される確率の確率密度関数は

$$p(\mathbf{y}_0 | \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{l/2} |\mathbf{N}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_0 - \bar{\mathbf{y}}_0)^T \mathbf{N}^{-1}(\mathbf{y}_0 - \bar{\mathbf{y}}_0)\right\} \quad (15)$$

$$\mathbf{N} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_l \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1 & \cdots & \phi_l \end{bmatrix} \quad (16)$$

と表される。ここに、 σ^2 は l 個の観測値の分散、 ϕ_{ij} は自己相関関数である。式(15)の尤度関数を最大化することにより、 $\boldsymbol{\theta}$ の最適値を求めることができる。また、自己相関関数としていろいろな関数形を用い、それぞれの関数形の良否の判定基準として例えばAICを用いれば、最適な自己相関関数を設定することができる。

2.2 クリギングと逆解析との関係

式(16)の共分散行列を用いて、 $n (= i \times l)$ 個（観測点を含む）の未知ベクトルをクリギングにより算定する方法を示す。観測値である l 次元ベクトル \mathbf{y}_0 を用いて、クリギングによって l 次元ベクトル \mathbf{y}_1 を求める。この \mathbf{y}_1 を用いて、クリギングによって l 次元ベクトル \mathbf{y}_2 を求める。この操作を繰り返し、 \mathbf{y}_{i-1} まで求める。この時点で、 $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{i-1}$ の要素の総数は $n (= i \times l)$ 個となる。こうして得られた $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{i-1}$ を並べて n 次元ベクトル \mathbf{x} を作り、これを逆解析において事前情報として用いる。

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{i-1}\}^T \quad (17) \quad \mathbf{M} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{00} & \mathbf{M}_{01} & \cdots & \mathbf{M}_{0,i-1} \\ & \mathbf{M}_{11} & \cdots & \mathbf{M}_{1,i-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ (Sym.) & & & \mathbf{M}_{i-1,i-1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

ここに、 \mathbf{M} は \mathbf{x} の共分散行列で $(n \times n)$ 行列、 $\mathbf{M}_{00}, \mathbf{M}_{01}, \dots$ は各々 $(l \times l)$ 行列である。この定式化の意味するところは、クリギングに用いる観測結果も誤差を含むと仮定することによって、ある確率場を仮定していることである。

まず、式(17)および式(18)に示すクリギングの結果を式(6)に等価であると置く。これは、最尤法に基づいて先験情報を決定することに相当する。未知量は式(17)の n 次元ベクトル \mathbf{x} である。このとき、

$$E[\mathbf{x}] = \bar{\mathbf{x}} \quad (19) \quad E[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T] = \mathbf{M} \quad (20)$$

である。式(20)の右辺の \mathbf{M} は、式(18)の最適自己相関関数により定められる共分散行列である。次に、式(19)および式(20)に示す先験情報のもとで、新たに m 個の観測値が得られたとして、Bayesの方法により式(19)および式(20)に仮定した確率場の修正を行う。このことは、先に示した手順により、

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}) \quad (21)$$

と表される。

なお、以上の手法ではいわゆる状態遷移を考慮していないことに注意されたい。

2.3 逆解析による推定の更新

以上の方法によって、各注入段階におけるルジオン値のデータを逐次的に用いて、ある線上で1次元的に推定を行った。

1次孔の注入直前に得られたルジオン値のデータを用いて、通常のクリギングによりルジオン値の空間分

布と共分散行列を求める。このクリギングの結果を先験情報として、2次孔の注入直前（1次孔の注入直後）に得られたルジオン値のデータを用いて、最尤法によって共分散関数を推定し、カルマンフィルタを用いた逆解析によって推定を更新する。以上の流れをFig. 1に示す。

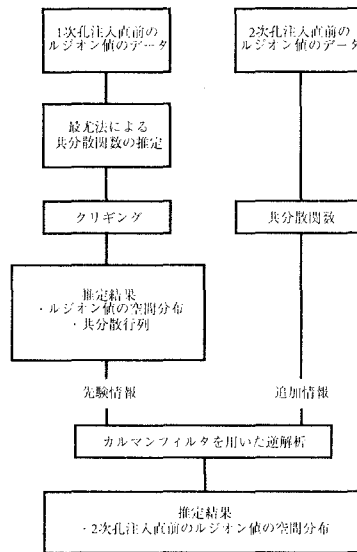


Fig. 1 カルマンフィルタを用いた逆解析による推定の更新

3. 解析結果と考察

通常のクリギングによる推定結果と、カルマンフィルタを用いた逆解析によって更新された推定結果をFig. 2に対比して示した。これによれば、後者の方が推定されたルジオン値が小さくなっている。これは、前者が1次孔注入直前のデータのみを用いているのに対して、後者は1次孔注入直前と2次孔注入直前（1次孔注入直後）のデータをあわせて用いているため、1次孔注入によって透水性が低下したことが推定に反映されたか否かによって、結果が異なったものである。

このように、通常のクリギングは、ある注入段階の注入直後の状態を、その注入段階の注入直前のデータをもとにして推定していることになり、注入が行われたという事実を反映しておらず、結果的に透水性を過大評価していると考えられる。一方、カルマンフィルタを用いた逆解析による推定の更新は、注入が行われたために生じた場の変化を推定に反映させていることになる。

また、クリギングでは、データ供給点においては観測値と推定値は一致する。このため、前者では1次孔注入直前のデータ供給点において、後者では2次孔注入直前のデータ供給点において、それぞれのデータに一致する推定結果が得られている。前者の推定結果は、2次孔で得られたデータを反映していない。

また、見方を変えれば、次のようなことも言える。ある点において、1次孔注入直前と2次孔注入直前のそれぞれのルジオン値の推定値を比較すれば、その点のルジオン値の減少量が求められる。しかし、両者の推定に用いられる観測値が異なった地点で得られていることと、クリギングによる推定値がある確率変量の平均値であることを考えれば、この減少量はその点のグラウト改良効果を直接表すものではないと言わざるを得ない。

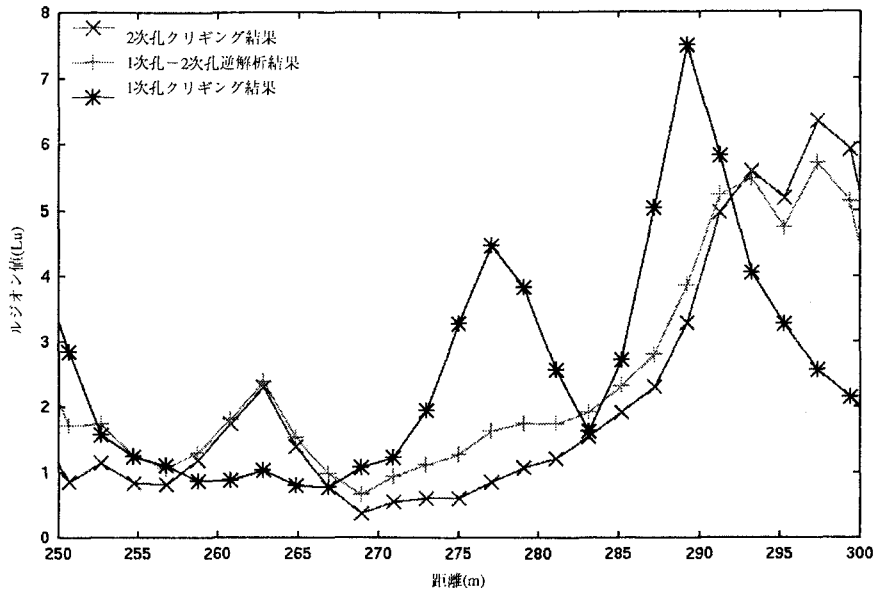


Fig. 2 通常のクリギングによる推定結果とカルマンフィルタを用いた逆解析による推定結果の対比

得ない。ある点のグラウト改良効果を直接表すためには、1次孔注入直前と2次孔注入直前のそれぞれのルジオン値のいずれか一方が確定値であることが必要である。通常のクリギングでは、1次孔注入直前の2次孔のデータ供給点における推定結果と観測値（確定値）との比較を行うことができるだけである。これに対して、カルマンフィルタを用いた逆解析によってクリギングの結果を更新すれば、1次孔のデータ供給点において、1次孔注入直前のルジオン値の観測値（確定値）と、同じ点における2次孔注入直前のルジオン値の推定値との比較も行うことができる。このことは通常のクリギングのみでは不可能であり、後者によってグラウト改良効果の定量的評価がより多くの点で行えることになったことを意味する。

4. おわりに

本研究により、通常のクリギングの結果を先験情報とし、カルマンフィルタを用いた逆解析を行えば、前後する注入段階同士の間連性を考慮して、注入完了後のルジオン値の分布およびルジオン値の規制値超過確率を求めることができることを示した。今後は、状態遷移の概念の導入や高次元への拡張を行っていく予定である。

参考文献

- 1) 大西有三・大津宏康・田中誠・崎谷和貴：ダム基礎岩盤のグラウト止水効果の評価に関する一考察，地下水地盤環境に関するシンポジウム'98発表論文集，pp. 109-120, 1998.
- 2) 例えば，佐藤忠信：地盤工学における逆解析，3. 逆解析の手法，土と基礎，Vol. 43, No. 5, pp. 67-79, 1995.