

客観性に配慮した流動要素法の実用的定式化

A Practical Formulation of FLEM Based on the Objective Stress-Rate for Large Deformation Analysis

西村 強*・木山 英郎**・藤村 尚***

Tsuyoshi NISHIMURA, Hideo KIYAMA, Hisashi FUJIMURA

A two-dimensional elastic block subjected to end-displacement in a plain strain condition is simulated by modified FLEM. The FLEM introduces two coordinate systems to consider material rotation. One is the global coordinate for the equation of motion, and the other is a set of local coordinates to treat material rotation of element. The rate of material rotation is expressed as the rate of change of the base vectors of the local coordinate to the orthonormal base vectors. It may be concluded by the numerical result that this FLEM procedure is applicable in terms of computational mechanics.

1. はじめに

著者等は、個別要素法(Distinct Element Method, DEM)¹⁾と同様な運動方程式による質点の逐次移動を基本とした連続体の変形解析法 流動要素法 (Flow Element Method) 提案し、FLEM と略記した²⁾。運動方程式の解法に陽形式差分を活用して大容量のマトリックス計算を排除し、微小増分変位の積み重ねとして局所的なあるいは全体的な大変形問題を、効率的に表現できる手法として解析例を報告している^{2), 3)}。

さて、本法のように、増分法による定式化に基づく解法では、応力やひずみ、あるいはそれら速度等に観測する座標系の運動に依存しない性質すなわち客観性が求められる⁴⁾。本文では、客観応力速度として従来広く用いられてきた Jaumann 応力速度を導入した FLEM 定式化を示す。しかしながら、本研究で実施した 2次元平面ブロックの弾性大変形解析結果は、せん断ひずみ度が 1.5 を超えるような大変形領域で、解析条件に対応しない不安定な現象を示すに至る。

そこで、単純せん断変形の応力応答を参照して回転に伴う応力増分の補正法について基礎的な資料を得た。これに基づいて、増分変形中は要素に埋込まれた局所座標系で変形を追跡するが、各増分段階での節点の移動には、空間固定の全体座標系を用いるという FLEM 計算手順の修正を行う。

2. 流動要素法の概要^{2), 3)}

(1) 運動方程式の陽形式差分解法と節点の移動

FLEM は連続体を格子状に分割し、格子点を質点とみなして運動方程式を立て、格子点の移動による格子のゆがみによって連続体の変形を表す。概念的には、格子点を重心とする小領域が存在し(これが DEM のブロックに相当する)、その小領域の特性はこの格子点に集約される。この小領域に代わり、前述の格子で区切られた四辺形領域が、質点の運動に対してひずみや応力を生じる実質的な要素となり、格子点力の算定の中心となる。各質点 i (質量 m_i) の移動は、周辺領域の変位抗力(剛性 K_i) や速度抗力(粘性 η_i) のもとに、式(1)で示される運動方程式に従う。ここでは、簡単のため、2次元問題に対する定式化を示す。

* 正会員 博(工) 鳥取大学助手 工学部土木工学科
*** 正会員 工 博 鳥取大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工 博 鳥取大学教授 工学部土木工学科

$$m_i \ddot{u}_i + \eta_i \dot{u}_i + K_i u_i = f_{xi} \quad m_i \ddot{v}_i + \eta_i \dot{v}_i + K_i v_i = f_{yi} \quad (1)$$

ここに、 (u_i, v_i) は変位の座標軸方向成分、 (f_{xi}, f_{yi}) は質点に作用する外力である。
 周辺要素の各節点の変位に伴って、節点 i に生じる変位抗力を節点力と呼び、 (F_{xi}, F_{yi}) と書く。

$$m_i \ddot{u}_i + \eta_i \dot{u}_i + F_{xi} = f_{xi} \quad m_i \ddot{v}_i + \eta_i \dot{v}_i + F_{yi} = f_{yi} \quad (2)$$

本解析法では、DEM の陽的差分解法の導入するため、質量は節点に集中化し、節点質量 m は、周辺 4 要素の質量和の 1/4 とする。このことは、要素内の加速度に対する形状関数は不連続な関数を仮定したことになる⁴⁾。時間差分による数値解の精度を高めるため、時間増分 Δt に一自由度振動系の固有周期を、左辺第 2 項に臨界減衰値を基準値として用いる。式(2)をもとにした変形解析の手順と主要な式を以下に示す。

- ① 節点座標や材料特性など初期値および境界条件を読み込む。
- ② 要素の剛性行列 $[K^j]$ を計算し、変位増分 $(\Delta u_i, \Delta v_i)$ に対する節点力増分 $(\Delta F_{xi}, \Delta F_{yi})$ を求める。

$$\{\Delta F_{xi}^j, \Delta F_{yi}^j\}^T = [K_i^j] \{\Delta u_i^j, \Delta v_i^j, \dots, \Delta u_4^j, \Delta v_4^j\}^T \quad (3)$$

$[K_i^j]$ は $[K^j]$ の節点 i に関する部分マトリックスであり、上添字 j は要素番号、 u, v の下添字は当該要素内の構成節点整理番号である。要素内の座標や変位は、節点値を用いて、双一次形式で補間することを標準としている。 $(\Delta F_{xi}, \Delta F_{yi})$ は、節点に関与するすべての要素 j に関する和として求める。

$$\Delta F_{xi} = \sum_{j=1}^4 \Delta F_{xi}^j, \quad \Delta F_{yi} = \sum_{j=1}^4 \Delta F_{yi}^j \quad (4)$$

- ③ 式(2)を時間増分 Δt で差分表示し、加速度 $(\ddot{u}_i, \ddot{v}_i)$ を未知数とする陽形式の次式で近似する。

$$\ddot{u}_i = \frac{f_{xi}}{m_i} - \frac{1}{m_i} (F_{xi} + \Delta F_{xi}) - \frac{\eta_i \Delta u_i}{m_i \Delta t} \quad \ddot{v}_i = \frac{f_{yi}}{m_i} - \frac{1}{m_i} (F_{yi} + \Delta F_{yi}) - \frac{\eta_i \Delta v_i}{m_i \Delta t} \quad (5)$$

式(5)の右辺第一、二項はそれぞれ、節点に作用する不平衡力をあらわすものとなり、平衡状態に達するとき、両者の和は 0 に収束する。数値計算上は、初期値を $(f_{xi}/m_i, f_{yi}/m_i)$ とおいて、毎回得られる $(\Delta F_{xi}, \Delta F_{yi})$ を順次加算していくが、ここでは節点外力と変位抗力（およびその増分）を分離する形で示した。

- ④ 加速度を積分して、節点速度、節点変位増分を求める。

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= \dot{u}_i + \ddot{u}_i \Delta t \\ \dot{v}_i &= \dot{v}_i + \ddot{v}_i \Delta t \end{aligned} \quad (6) \quad \begin{aligned} \Delta u_i &= \dot{u}_i \Delta t \\ \Delta v_i &= \dot{v}_i \Delta t \end{aligned} \quad (7)$$

- ⑤ $(\Delta u_i, \Delta v_i)$ より各積分点ごとに、ひずみ増分 $(\Delta \varepsilon_x, \Delta \varepsilon_y, \Delta \gamma_{xy})$ を求める。

$$\{\Delta \varepsilon_x, \Delta \varepsilon_y, \Delta \gamma_{xy}\}^T = [B^j] \{\Delta u_i^j, \Delta v_i^j, \dots, \Delta u_4^j, \Delta v_4^j\}^T \quad (8)$$

ここに、 $[B^j]$ は節点変位・ひずみ変換マトリックスである。

- ⑥ 応力増分 $(\Delta \sigma_x, \Delta \sigma_y, \Delta \tau_{xy})$ を求める。

$$\{\Delta \sigma\}^T = [D] \{\Delta \varepsilon\}^T + \{\Delta \bar{\sigma}\}^T \quad (9)$$

ここに、 $[D]$ は弾性マトリックス、 $\{\Delta \bar{\sigma}\}$ はスピンによる補正量を表わす。上式の詳細は後述する。

- ⑦ ⑤⑥の増分を用いて、応力とひずみの値を更新する。

- ⑧ 節点座標に節点変位増分を加え、座標値を更新する。

$$x_i = x_i + \Delta u_i \quad y_i = y_i + \Delta v_i \quad (10)$$

- ⑨ ②に戻り、計算を続行する。ただし、所定の条件に達しておれば、結果を出力して演算を終了する。

(2) Jaumann 応力速度の導入

応力 σ を、変形後の単位面積当りの応力として定義された Euler 応力 $[\sigma]$ とし、客観応力速度として次式の Jaumann 応力速度 $[\dot{\sigma}]$ を導入する⁴⁾。

$$[\dot{\sigma}] = [\dot{\sigma}] - [\omega][\sigma] + [\sigma][\omega] \quad (11)$$

これは、要素とともに回転するが、変形することのない座標系より観測する応力変化率である。 $[\omega]$ は、 $\omega_z = \frac{1}{2}(\dot{\alpha}/\dot{\alpha} - \dot{\alpha}/\dot{\alpha})$ を成分とする逆対称テンソルであり、連続体スピンとも呼ばれる。

ひずみ速度に結合する増分形構成式を次式で与える。

$$[\dot{\sigma}] = [D][\dot{\varepsilon}] \quad (12)$$

ここに、 $[\dot{\varepsilon}]$ は Euler のひずみ速度マトリックスであり、式(11)に式(12)を用いて、速度を Δt 間の増分量として $\Delta\sigma$ 等へ書き換えると次式を得る。

$$[\Delta\sigma] = [D][\Delta\varepsilon] + [\Delta\omega][\sigma] - [\sigma][\Delta\omega] \quad (13)$$

ここに、 $[\Delta\sigma] = [\Delta\sigma]_x, [\Delta\sigma]_y, [\Delta\sigma]_{xy}$ と表示が可能であり、上式の2次元問題における具体的表示は

$$\{\Delta\sigma_x, \Delta\sigma_y, \Delta\tau_{xy}\}^T = [D]\{\Delta\varepsilon_x, \Delta\varepsilon_y, \Delta\gamma_{xy}\}^T + 2\Delta\omega_z\{-\tau_{xy}, \tau_{xy}, (\sigma_x - \sigma_y)/2\}^T \quad (14)$$

一方、応力速度を(11)のように定義するため、剛性行列 $[K^j]$ は、要素剛性マトリックス $[k^j]$ と幾何剛性マトリックス $[k_G^j]$ の和となる。

$$[K^j] = [k^j] + [k_G^j] \quad [k^j] = \int_{V_e} [B^j]^T [D] [B^j] dV_e \quad [k_G^j] = \int_{V_e} [B_e^j]^T [D_\sigma] [B_e^j] dV_e \quad (15)$$

ここに、 $[D_\sigma]$ は応力を成分とするマトリックス、 $[B_e^j]$ は節点変位-速度勾配マトリックスである。 $[D_\sigma]$ の具体的表示は文献[4]に譲る。

3. 2次元平面ブロックの解析

(1) 解析モデルの設定

解析モデルは、図-1 に示すように自然状態⁹⁾より左右辺は拘束せず、上下辺の平行を保ったまま上辺の節点を横方向に移動させて変形を与える一般せん断問題である⁹⁾。解析に用いた定数は、ヤング率 $E=9.8\text{MPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ である。上辺の移動速度は 1cm/s (時間増分 $\Delta t=1.0 \times 10^{-4}(\text{sec})$ あたりの変位増分量は 0.0001cm) であり、物体力は考慮していない。時間増分や粘性係数には解の数値的安定性を満足する値を用い、また、境界条件が単調にかつ一方方向に与えられる増分変位であり、ひずみ増分に対する剛性を一定とする解析である。

(2) 大変形域の変形と要素内応力の特徴

図-2 に解析結果をまとめている。この図では、スピン

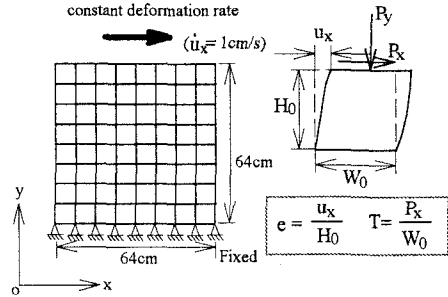


図-1 せん断変形を受ける平面ブロック

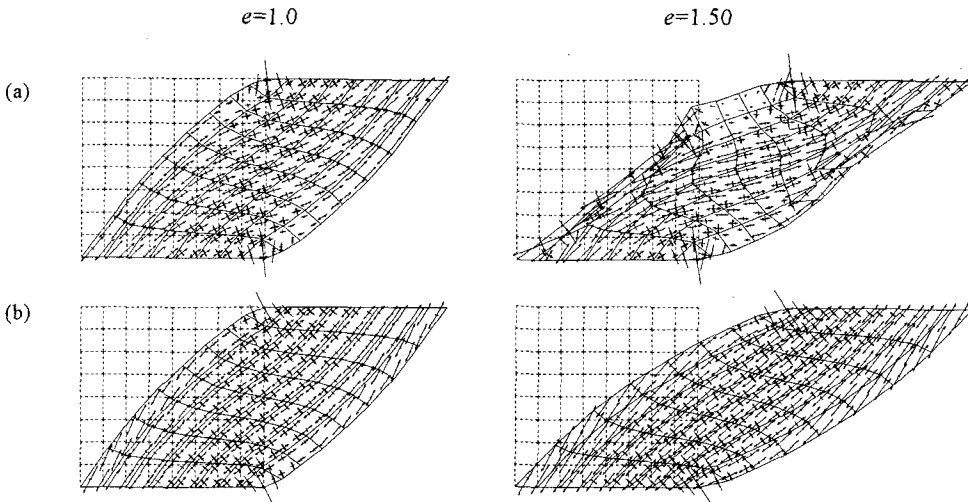


図-2 せん断変形と主応力

による応力補正 $\{\Delta\sigma\}$ を考慮した(a), 無視した(b)を示している³⁾。まず, $e=1.0$ の図より, 以下の点をまとめることができる。一つは, 解析領域中央部では, 要素はひし形に近い形状となっている。このような変形状態では, 最大主応力方向 (なお, 引張を正とする) が要素境界と平行である(b)より(a)の方が妥当である。いま一つは, 左右自由辺付近では, 自由辺と最大主応力方向が角度を有する(b)に対して, (a)では平行となっている。前者では自由辺直交方向が最小主応力となっていないことを示している。つぎに, $e=1.50$ では, (a)図において要素境界にくびれも目立ち, 主応力方向も境界条件と合致しない不合理なものとなっている。

4. 埋込み座標を用いた増分過程の修正

(1) 単純せん断変形における応力応答に関する検討

Jaumann 応力速度が, 大ひずみ領域の単純せん断変形において応力成分に正弦振動を引き起こすことが知られている^{6), 7), 8)}。図-2の結果も, この事実と全く無関係ではないと考えている。ここでは, 単純せん断解析における応力の応答を考察する。この変形は, 次式のように表現できる。

$$\dot{u} = \dot{c}y, \dot{v} = 0, \dot{c}: \text{正定数}$$

これより,

$$\dot{\epsilon}_x = 0, \dot{\epsilon}_y = 0, \dot{\gamma}_{xy} = \dot{c}, \dot{\omega}_z = -\dot{c}/2 \quad (16)$$

等方線形弾性体を仮定し, D_{33} は弾性マトリックス $[D]$ の成分として, 時刻 t の応力を求めると,

$$\sigma_x = -\sigma_y = D_{33}(1 - \cos 2\phi), \tau_{xy} = D_{33} \sin 2\phi \quad (18)$$

上式は, 等方線形弾性体の仮定にもかかわらず, 例えば, せん断応力は, せん断ひずみの増加に伴い, 正弦波状に振動することを示している。図-3において, 時刻 $t=0$ に y 軸と垂直であった面に変形・回転はないが, x 軸に垂直であった面上の点 C は, Δt 後に, x 方向に $c\Delta t$ だけ移動する。(17)の第4式からすれば, 辺 OC' の回転角増分は, $c\Delta t/2$ である。したがって, 時刻 t には,

$$\phi = \int_0^t \dot{\phi}_i dt = \frac{1}{2} \dot{c}t \quad (19)$$

なる ϕ が見かけ上の回転角として式(18)には用いられている。(19)式の ϕ をそのまま回転量として用いることは, 実際の量より大きく見積もることになり, このことが, 振動の問題の一因と考えられる。つまり, 式(19)の ϕ は, 図中 C 点の x 軸方向変位の $1/2$ に相当しており, むしろ, y 軸と線分 OP (P は線分 CC' の中点) のなす角 β_y を回転角と考える方が妥当である。これは単純せん断変形に対するものである。より一般性を求めるためには, 空間固定座標系の基底ベクトル $(\bar{i}_x, \bar{i}_y)$ と変形する物体に埋込まれた座標系の基底ベクトル $(\bar{a}_x, \bar{a}_y)$ を導入して, 各基底ベクトルの変化に注目する方がよい。すなわち, 図-3 の例では, $\bar{i}_y$ と点 P に至るベクトル $(\bar{i}_y + \bar{a}_y)/2$ のなす角として β_y を求めることである。

(2) 埋込み座標系を利用した増分過程の修正

ここに述べる補正計算法は, 増分変形中は要素に埋め込まれた局所座標系で変形を追跡するが, 各増分段階での節点の移動には空間固定の全体座標系を用いる実用的な手法である。当然, 埋込み座標系内では, 座標値の更新はないが, 基底ベクトル $(\bar{a}_x, \bar{a}_y)$ は要素の変形とともに変化する。まず, 時刻 t において, 全体座標系 (x, y) に対して, 要素に埋め込まれた局所座標系 (x^*, y^*) を定義する。この局所座標系の原点 (例えば, 図-3 O 点) は, 各要素内の応力算出点にとればよいが, 演算上は積分点に一致させている。2.に述べた手順⑥の変更点は以下のである。

⑥'-1 埋込み座標系の基底ベクトル $(\bar{a}_x, \bar{a}_y)$ を求める。例えば, 図-3 では, $\bar{a}_x = (1, 0), \bar{a}_y = (c, 1)$ となる。

⑥'-2 前節の検討より埋込み座標系の各座標軸の回転量を, x^* 軸は $\bar{i}_x$ と $(\bar{i}_x + \bar{a}_x)/2$ のなす角 β_x , y^* 軸は $\bar{i}_y$ と

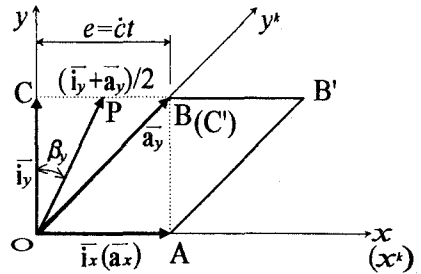


図-3 単純せん断変形と座標系の回転

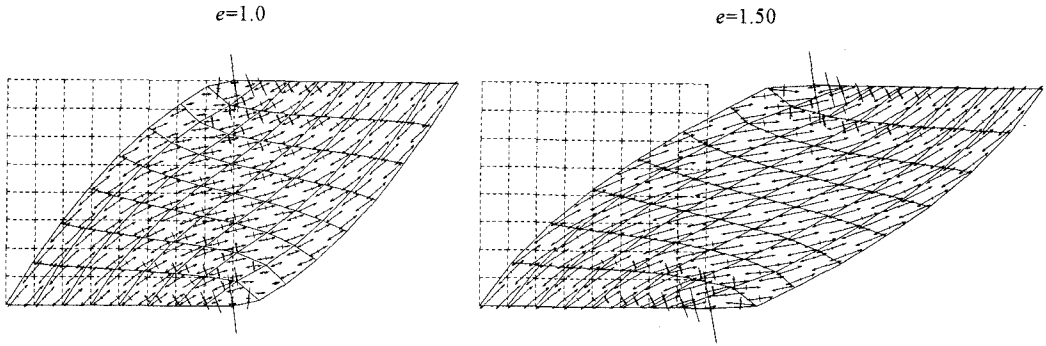


図-4 修正計算法を用いたときのせん断変形と主応力

$(\bar{i}_y + \bar{a}_y)/2$ のなす角 β_y として求める。これより埋込み座標系の回転量を次式で求める。

$$\beta = \beta_x - \beta_y \quad (20)$$

⑥'-3 当該時間増分間の変位増分後の埋込み座標系の回転量 β' を同様に求め、回転増分を次式で求める。

$$\Delta\beta = \beta' - \beta \quad (21)$$

⑥'-4 前述の $\Delta\beta$ を $\omega_z (\Delta\omega_z)$ に代わる回転補正量として用い、式(9)に戻り、応力増分の修正を行う。

このような修正法の導入に際して、ひずみ速度に結合する増分形構成式として式(12)を依然として用いる。しかし、 $\Delta\beta$ を変位増分 $(\Delta u_i, \Delta v_i)$ より直接求めていないので、応力増分修正の節点力増分への寄与分を算定する際に、幾何剛性行列 $[k_G^j]$ を含む式(15)をそのまま用いることはできない。そこで、まず、 $\{\Delta\sigma\}$ を次式のように求める。

$$[\Delta\sigma] = [\Delta\beta][\sigma] - [\sigma][\Delta\beta] \quad (22)$$

つぎに、この修正分の節点力への寄与分 $(\Delta F_{xi}^j, \Delta F_{yi}^j)$ を求める。

$$\{\Delta F_{xi}^j, \Delta F_{yi}^j\}^T = \int_{V_e} [B^j]^T \{\Delta\sigma\}^T dV_e \quad (23)$$

式(15)の $[k_G^j]$ を無視して $[K^j] = [k^j]$ として式(3)より求められる節点力増分に、これを修正分として加算することにした。

図-4 に、ここで示した計算手順による図-2 の解析モデルに対する結果を示す。 $e=1.50$ では、図-3(a) のような要素境界にくびれの目立つ変形も解消されていることがわかる。以上より、連続体スピン $\Delta\omega$ に代わる量として埋込み座標系の回転増分量 $\Delta\beta$ を用いることによって、一般せん断変形解析に、ほぼ満足できる結果がもたらされたものと判断している。

参考文献

- 1) Cundall, P. A. : A Computer Model for Simulating Progressive, Large-scale Movements in Blocky rock Systems, Proceedings, Symposium of ISRM, Nancy, France, Vol. 1, Paper No. II-8, 1971.
- 2) 木山英郎, 藤村 尚, 西村 強 : 連続体の大変形解析のための流動要素法(FLEM)の提案, 土木学会論文集, No.439/III-17, pp.63-68, 1991.
- 3) Kiyama, H., Nishimura, T., Hasegawa, M., Fuchimoto, M. : A proposal of Flow element method for large deformations of a continuum and its application coupled with the Distinct Element Method to an analysis of stacked-drift-type tunnels, Proceedings of 8th International Congress on Rock Mechanics, Vol. 2, ISRM, pp.607-610, 1995.
- 4) 鷲津久一郎他編, 有限要素法ハンドブック (応用編), 培風館, pp.270-287, 1992.
- 5) 北川 浩 : 弾・塑性力学, 裳華房, p.64, 1987.
- 6) 後藤 学 : スピンに関する一考察, 日本機械学会論文集, 第 52 巻 A 編/第 476 号, pp.1134-1141, 1986.
- 7) 渡部 修, 原田 隆 : Green 型構成式を用いた平面ブロックの弾性大変形シミュレーション, 日本機械学会論文集, 第 57 巻 A 編/第 540 号, pp.1808-1814, 1991.
- 8) 黒田充紀 : 変形する物体の客観応力速度について, 構造工学論文集, Vol. 37A, pp.401-408, 1991.