

拘束解除法による水平地表面に隣接した トンネル掘削に伴う地盤変位の弾性解析

Elastic Analysis of Ground Displacements Due to Shallow Circular Tunnel
by Using Constraint-Release Technique.

堤 隆[†]・新井 広^{*}・平島健一^{**}

Takashi TSUTSUMI, Hiroshi ARAI and Ken-ichi HIRASHIMA

This paper presents an analytical method for ground displacements due to shallow circular tunnel near the surface on the basis of two-dimensional isotropic elastic theory. This study is carried out by using constraint-release technique which repeats superposing solutions of infinite plane with circular hole and semi-infinite plane to the required boundary conditions. Some numerical results are shown by graphical representation.

1 緒 言

土や岩石ないし岩盤の応力-ひずみ関係は一般に非線型性を示すものの、ぜい性度の高い岩や繰り返し荷重を受けた後の土、あるいは比較的低い応力レベルでの土や岩の挙動を考えるとときには、それらは線形弾性体として取り扱うことができる。従来、土質力学および岩盤力学の問題は線形弾性の仮定の下で計算が行われているが、非線型な変形挙動が卓越した材料に対しても、第1近似的な値として線形解析結果が有効に用いられている [1]。

地表面に近いトンネルの問題は地表面とトンネル表面で境界条件が既知である二重連結の平面ひずみ問題と考えることができる。Jeffery [2] は円孔を有する半無限板を表す双極座標系での応力関数を提案した。これを重力場に適用して安蔵 [3]、Mindlin [4] がトンネル周辺の応力を求めている。さらに伊藤 [5] は傾斜地表面下の円形トンネル周辺の応力解析を行った。

しかしながら地盤の変位の解析に関する研究は少ない。重力場での問題は Limanov [6]、木山ら [7] によりなされているが、Limanov 解は初期地盤内応力を静水圧状態と仮定しているため鉛直土圧と水平土圧に差がある場合には解に含まれず、また木山らの解は応力関数に含まれる集中力に関する項の不完全さのため適用範囲が限定されている。円形トンネルの変位を境界条件とする問題では Sagaseta [8] が一様に収縮した場合について、Verruijt ら [9] が初期に円形断面であったものが、楕円形化した場合についての解を導いたが、これらの解析では土塊の自重については触れられていない。

他方、線形弾性解析に対しては有限要素解析法が用いられるが、要素分割や多元連立方程式の解法の選択により剛性マトリックスの特性が悪くなり、弾性方程式を解くことによる誤差が大きくなる場合もある [1]。

ところで、先に著者らのうち堤と平島は2つの単連結領域の問題の解を用いそれぞれの境界条件を十分満たす程度に収束するまで重ね合わせを行う拘束解除法 [10] により直交異方性弾性楕円形リングの解析手法を提示し、その精度特性を検証した [11]。この手法は2つの境界を写像平面上に同時に同心円に写す写像関数を用いることをしないため、途中計算が煩雑にならないという利点を有する。

このことを踏まえ本論文では、水平地表面に近接して円形トンネルが掘削されたときに生じる変位を地盤の自重を考慮した弾性理論による解析手法を提示する。

[†]正会員 工修 福島工業高等専門学校助手 建設環境工学科

^{*}理修 福島工業高等専門学校講師 一般教科(数学)

^{**}正会員 工博 山梨大学教授 工学部土木環境工学科

2 問題の定式化

2.1 基礎方程式

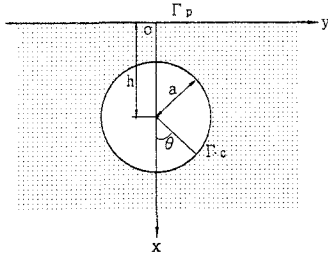


図-1 円形トンネルを有する半無限地盤

本論文では、図-1の水平な地表面を有する等方性弾性地盤に地表面から中心までの深さ h 、半径 a の円形トンネルを掘削することにより応力が解放される2次元の問題を対象とする。トンネルの中心を通る鉛直軸を x 軸、地表面を y 軸にとり、それぞれ下向き、右向きを正の方向として、複素平面 $z = x + iy$ を定める。このとき、半無限領域内の任意点での応力 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 、変位 u_x 、 u_y 、回転 ω および合応力 P_x 、 P_y を求める公式は2つの複素関数 $\varphi(z)$ 、 $\psi(z)$ を用いて次式のように表すことができる[12]。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y + iE\omega &= 4\varphi'(z), \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2\{\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)\}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$2G(u_x - iu_y) = \kappa\overline{\varphi(z)} - \{\bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z)\}. \quad (2)$$

$$-(P_y + iP_x) = \overline{\varphi(z)} + \{\bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z)\}. \quad (3)$$

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{: 平面応力} \\ 3-4\nu & \text{: 平面ひずみ} \end{cases} \quad (4)$$

ここに、 E 、 G 、および ν はそれぞれ縦弾性係数、せん断弾性係数およびポアソン比であり、 $'$ は複素変数 z に関する微分を表す。なお、合応力 P_x 、 P_y は次式：

$$P_x = \int (\sigma_x dy - \tau_{xy} dx) = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad P_y = \int (\tau_{xy} dy - \sigma_y dx) = -\frac{\partial F}{\partial x}. \quad (5)$$

で定義され、 $F(x, y)$ はAiryの応力関数である。

2.2 拘束解除法による解法

図-2に示されるような応力解放により、円孔境界上に作用する半径方向応力 $\sigma_{\xi,1}$ とせん断応力 $\tau_{\xi\eta,1}$ を次式のようにFourier級数に展開表示する。

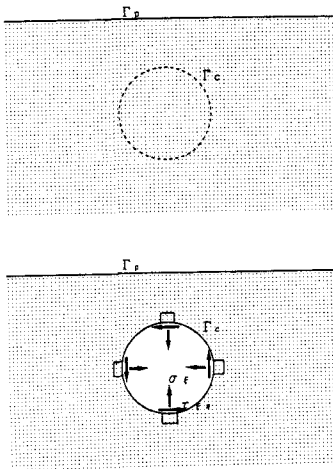


図-2 応力解放

$$\sigma_{\xi,1} - i\tau_{\xi\eta,1} = \bar{c}_{1,0} + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{c}_{1,n} \cos \theta + \bar{d}_{1,n} \sin \theta). \quad (6)$$

ここに、上付きのバーは複素共役を表し、上式中の各項は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} c_{1,0} &= \frac{1}{2}(1 + \hat{K}_0)\gamma h, \\ c_{1,1} &= \frac{1}{4}(3 + \hat{K}_0)\gamma a, & d_{1,1} &= -\frac{i}{4}(1 - \hat{K}_0)\gamma a, \\ c_{1,2} &= \frac{1}{2}(1 - \hat{K}_0)\gamma h, & d_{1,2} &= -\frac{i}{2}(1 - \hat{K}_0)\gamma h, \\ c_{1,3} &= \frac{1}{4}(1 - \hat{K}_0)\gamma a, & d_{1,3} &= -\frac{i}{4}(1 - \hat{K}_0)\gamma a. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

なお、 γ は土の単位体積重量であり、土圧係数 $\hat{K}_0$ は平面ひずみ状態では次式で与えられる。

$$\hat{K}_0 = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (8)$$

次に、図-3に示すような円孔を有する無限板の応力関数を次式のような級数で展開する[12]。

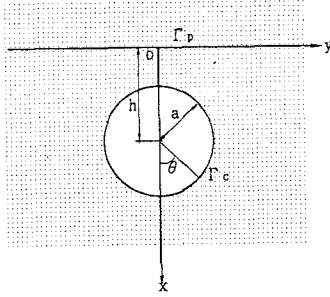


図-3 円孔を有する無限板

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{c,1}(z) &= M_1 \log(z-h) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{L_{c,1}} A_{1,-m} (z-h)^{-m}, \\ \psi_{c,1}(z) &= N_1 z \log(z-h) + K_1 \log(z-h) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{L_{c,1}} B_{1,-m} (z-h)^{-m}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

応力解放によって達成すべき境界条件とすれば上式中の係数を次のように定めればよい。

$$\left. \begin{aligned} M_{c,1} &= \frac{1+\nu'}{8} (c_{1,1} + i d_{1,1}) a + g \frac{\nu-3}{8\pi} \pi \gamma a^2, \\ N_{c,1} &= -\frac{3-\nu'}{8} (\bar{c}_{1,1} - i \bar{d}_{1,1}) a + g \frac{1+\nu}{8\pi} \pi \gamma a^2, \\ K_{c,1} &= \bar{c}_{1,0} a^2, \\ A_{c,-n} &= -\frac{a^{n+1}}{2} \frac{c_{1,n+1} + i d_{1,n+1}}{n}, \\ B_{c,-1} &= \frac{a^3}{2} \left(\frac{1+\nu'}{2} \frac{c_{1,1} + i d_{1,1}}{2} - \frac{\bar{c}_{1,1} + i \bar{d}_{1,1}}{2} \right), \\ B_{c,-n} &= \frac{a^{n+2}}{n} \left\{ \frac{c_{1,n} + i d_{1,n}}{2} - \frac{\bar{c}_{1,n} + i \bar{d}_{1,n}}{2(n+1)} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに、

$$\nu' = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (11)$$

で、 $M_{c,1}$ 、 $N_{c,1}$ の右辺第2項は鉛直下向きの合応力に関わる項で g は実数定数である。ところで、 x 方向の直応力 σ_x と y 方向のせん断応力 τ_{xy} は応力関数を用いて次式のように表される。

$$\sigma_x = 2\text{Re}[\varphi'_{c,1}(z)] - \text{Re}[\bar{z}\varphi''_{c,1}(z) + \psi''_{c,1}(z)], \quad \tau_{xy} = \text{Im}[\bar{z}\varphi''_{c,1}(z) + \psi''_{c,1}(z)]. \quad (12)$$

また、地表面上($x=0$)においては、上式中の応力関数は次式のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}[\varphi'_{c,1}(z)] &= \sum_{n=1}^{L_{p,1}} \frac{F_{1,n}}{(y^2 + h^2)^n}, \\ \text{Re}[\bar{z}\varphi''_{c,1}(z)] &= \sum_{n=1}^{L_{p,1}} \frac{H_{1,n}}{(y^2 + h^2)^n}, & \text{Im}[\bar{z}\varphi''_{c,1}(z)] &= \sum_{n=1}^{L_{p,1}} \frac{y H_{1,n}^*}{(y^2 + h^2)^n}, \\ \text{Re}[\psi''_{c,1}(z)] &= \sum_{n=1}^{L_{p,1}} \frac{J_{1,n}}{(y^2 + h^2)^n}, & \text{Im}[\psi''_{c,1}(z)] &= \sum_{n=1}^{L_{p,1}} \frac{y J_{1,n}^*}{(y^2 + h^2)^n}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

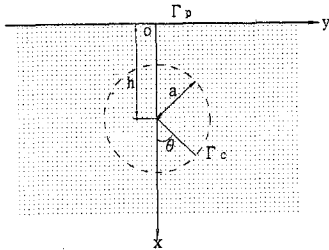


図-4 半無限板

上式中の $F_{1,n}$ 、 $H_{1,n}$ 、 $H_{1,n}^*$ 、 $J_{1,n}$ 、 $J_{1,n}^*$ は複素係数 K_1 、 $A_{1,n}$ 、 $B_{1,n}$ により決定される複素定数である。したがって、以上から仮想地表面上に発生する応力は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,1}^* &= \sum_{n=1}^{L_{p,1}} \frac{\bar{\sigma}_{x1,n}}{(y^2 + h^2)^n}, \\ \tau_{xy,1}^* &= \sum_{n=1}^{L_{p,1}} \frac{\bar{\tau}_{xy1,n}}{(y^2 + h^2)^n}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{x1,n} &= 2F_{1,n} - H_{1,n} - J_{1,n}, \\ \bar{\tau}_{xy1,n} &= H_{1,n}^* + J_{1,n}^*. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

次に、図-4のようにこの円孔を有する無限板の仮想地表面 Γ_p に発生する応力 $\sigma_{x,1}^*$ 、 $\tau_{xy,1}^*$ を打ち消す応力を载荷さ

せた半無限板について考える。このとき、応力関数は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_{p,1}(z) &= \frac{a_1(0)}{2} \frac{1}{z} + \int_0^\infty e^{-zt} \frac{a_1(t) + ib_1(t)}{2} dt, \\ \psi''_{p,1}(z) &= -\frac{a_1(0)}{2} \frac{1}{z} + \int_0^\infty e^{-zt} \left\{ -\frac{a_1(t) - \overline{a_1(0)} + i\overline{b_1(t)}}{2} + \frac{a_1(t) + ib_1(t)}{2} - zt \frac{a_1(t) + ib_1(t)}{2} \right\} dt. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} a_1(0) &= -\frac{1}{\pi} (P_{x,1} + iP_{y,1}), \\ a_1(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty [\bar{\sigma}_{x,1} + i\bar{\tau}_{xy,1}] \cos ty dy, \quad b_1(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty [\bar{\sigma}_{x,1} + i\bar{\tau}_{xy,1}] \sin ty dy. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

上式中の $P_{x,1}$ 、 $P_{y,1}$ はそれぞれ仮想水平地表面上に作用する x 方向、 y 方向の荷重の合応力である。円孔に作用する応力の x 軸に関する対称性を考慮すれば $\sigma_{x,1}^*$ は偶関数、 $\tau_{xy,1}^*$ は奇関数となり次式のように表される。

$$a_1(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{n=1}^{L_{p,1}} \bar{\sigma}_{x,1,n} \frac{1}{(y^2 + h^2)^n} \cos ty dy, \quad b_1(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{n=1}^{L_{p,1}} \bar{\tau}_{xy,1,n} \frac{y}{(y^2 + h^2)^n} \sin ty dy. \quad (18)$$

ここで、係数 $a_1(t)$ 、 $b_1(t)$ を次式のように表す。

$$a_1(t) = \sum_{n=1}^{L_{p,1}} \bar{a}_{1,n} t^{n-1} e^{-th}, \quad b_1(t) = \sum_{n=1}^{L_{p,1}} \bar{b}_{1,n} t^{n-1} e^{-th}. \quad (19)$$

これを用いて、式(16)中の応力関数をラプラス変換により次式のように表す。

$$\varphi'_{p,1}(z) = \sum_{n=1}^{L_{p,1}} \frac{(n-1)! (\bar{a}_{1,n} - \bar{b}_{1,n})}{2(z+h)^n}, \quad \psi''_{p,1}(z) = -\sum_{n=1}^{L_{p,1}} \frac{(n-1)! \bar{b}_{1,n}}{(z+h)^n} - \sum_{n=1}^{L_{p,1}} \frac{n! (\bar{a}_{1,n} - \bar{b}_{1,n}) z}{2(z+h)^{n+1}}. \quad (20)$$

この載荷によって生じる半無限板内の仮想円孔境界 Γ_c 上の応力が次のようにフーリエ展開されるものとする。

$$\sigma_{\xi,2} - i\tau_{\xi\eta,2} = \bar{c}_{2,0} + \sum_{n=1}^\infty (\bar{c}_{2,n} \cos \theta + \bar{d}_{2,n} \sin \theta). \quad (21)$$

再び前述の方法で符号を変えた応力を円孔を有する無限板に作用させる。以下同様に Γ_c 上に発生する応力と Γ_p 上に発生する応力がともに十分小さくなるまでこの操作を N 回繰り返す。その結果、円孔部に変位が生じる円孔を有する半無限板問題の応力関数は最終的に、次式で与えられることになる。

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^N \varphi_{c,n}(z) + \sum_{n=1}^N \varphi_{p,n}(z), \quad \psi(z) = \sum_{n=1}^N \psi_{c,n}(z) + \sum_{n=1}^N \psi_{p,n}(z). \quad (22)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{c,n}(z) &= A_{n,0} + \sum_{m=1}^{L_{c,n}} A_{n,-m} (z-h)^{-m}, \\ \psi_{c,n}(z) &= K_n \log(z-h) + B_{n,1} (z-h) + \sum_{m=1}^{L_{c,n}} B_{n,-m} (z-h)^{-m}, \\ \varphi'_{p,n}(z) &= \frac{a_n(0)}{2} \frac{1}{z} + \int_0^\infty e^{-zt} \frac{a_n(t) - a_n(0) + ib_n(t)}{2} dt, \\ \psi''_{p,n}(z) &= -\frac{a_n(0)}{2} + \int_0^\infty e^{-zt} \left\{ -\frac{\overline{a_n(t)} - \overline{a_n(0)} + i\overline{b_n(t)}}{2} + \frac{a_n(t) + ib_n(t)}{2} - zt \frac{a_n(t) + ib_n(t)}{2} \right\} dt. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

3 数値計算例

図-5、図-6 は $h/a = 2.0$ の場合の $\nu = 0.10, 0.25, 0.33, 0.45$ における円形トンネルの変形の様子と地表面の沈下の様子をはじめの2つは式(10)中の $g = 1.00, 1.25, 1.50$ について、あとの2つは式(10)中の $g = 1.25, 1.50, 1.75$ について表したものである。図-5中で $\nu = 0.10$ おいて初期の形状よりもトンネル左右端は外側に変位しているが、ポアソン比が大きくなるにつれてトンネル左右端の外側の変位は減少し内側の変位に転じ

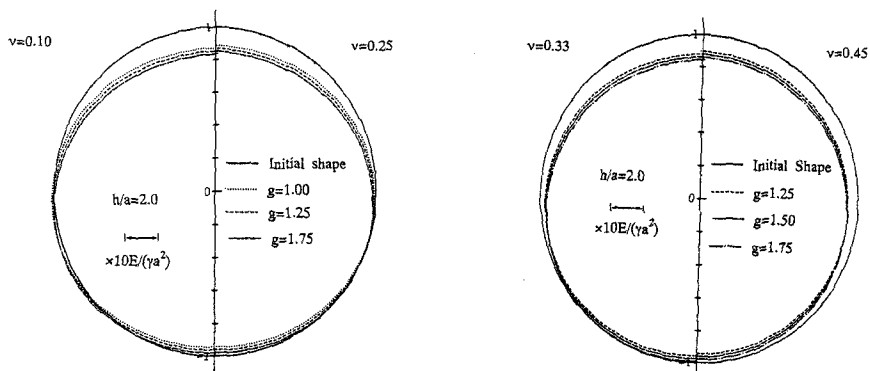


図-5 $h/a = 2.0$ での円形トンネルの変形

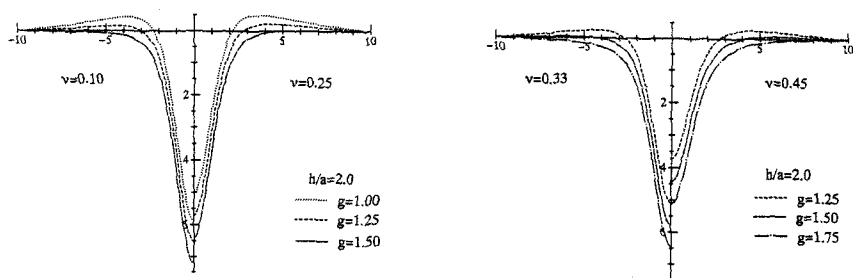


図-6 $h/a = 2.0$ でのトンネル掘削による地表面の沈下

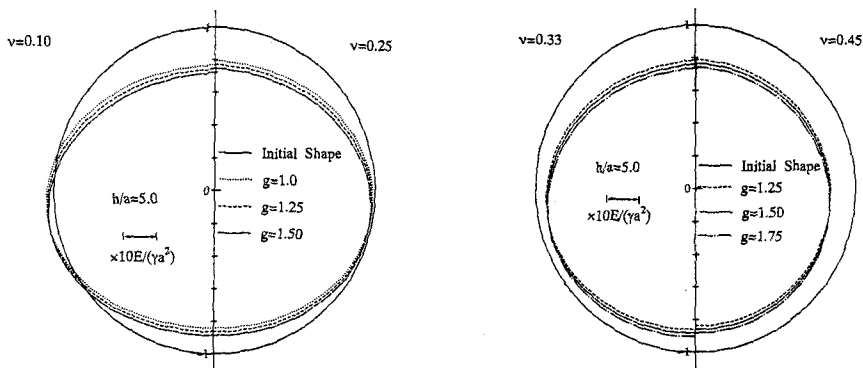


図-7 $h/a = 5.0$ での円形トンネルの変形

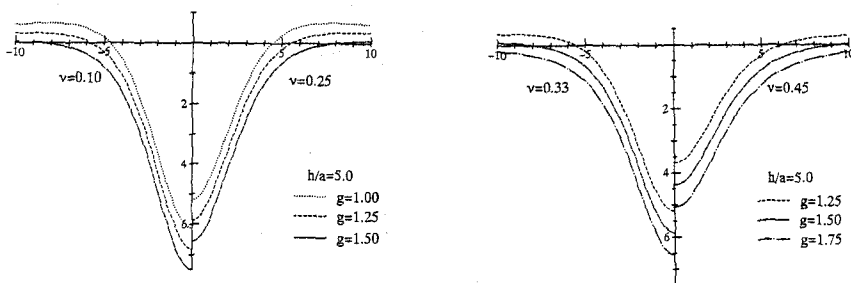


図-8 $h/a = 5.0$ でのトンネル掘削による地表面の沈下

ている。いずれのポアソン比の場合も、 g が大きくなれば図-6中の地表面の沈下が大きくなり、図-5中の円孔の変形もトンネル下端部での隆起する量が減少しトンネル上端部での沈下する量が増大している様子が見て取れる。円孔の掘削による地表面の隆起がないものとするれば、 $\nu = 0.25$ で $g = 1.50$ 程度をとればよく、 ν がそれより小さければ g を小さく、 ν がそれより大きければ g を大きくとればよい。

図-7、図-8は $h/a = 5.0$ の場合の $\nu = 0.10, 0.25, 0.33, 0.45$ における円形トンネルの変形の様子と地表面の沈下の様子をはじめの2つは式(10)中の $g = 1.00, 1.25, 1.50$ について、あとの2つは式(10)中の $g = 1.25, 1.50, 1.75$ について表したものである。図-7中の円孔の変形量はどのポアソン比についても $h/a = 2.0$ の場合に比べ大きくなっている様子がわかる。図-8における最大沈下量は $h/a = 2.0$ の場合とほぼ同じであるが、沈下トラフは $h/a = 2.0$ の場合に比べ広がっている様子がわかる。円孔の掘削による地表面の隆起がないものとするれば、 g の値は $h/a = 2.0$ の場合に比べ、やや大きくとればよいことがわかる。

図-9は円孔の掘削による地盤内の鉛直方向の変位を右側に、水平方向の変位を左側に示したものである。いずれもトンネルより下の部分では大きな変位は発生は見られないが、トンネルより上部ではトンネルに向かって地盤が変位を起こしている様子がわかる。

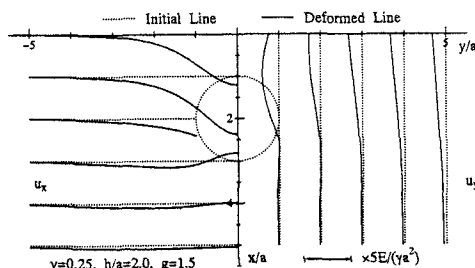


図-9 地盤内の鉛直方向変位と水平方向変位

図-10、図-11は砂質地盤におけるトンネル孔の変形と地表面沈下曲線について著者らの数値計算例と有限要素解析による弾性解[13]を比較したものである。円孔の変形は、有限要素解析ではトンネル上端の沈下と下端の隆起はほぼ同じ量が生じているのに対し、著者らの結果はトンネル上端の沈下が下端の隆起よりも大きくなる。また、地表面の沈下は著者らの結果は有限要素解析の2倍弱の最大沈下量をあらわすこともわかる。

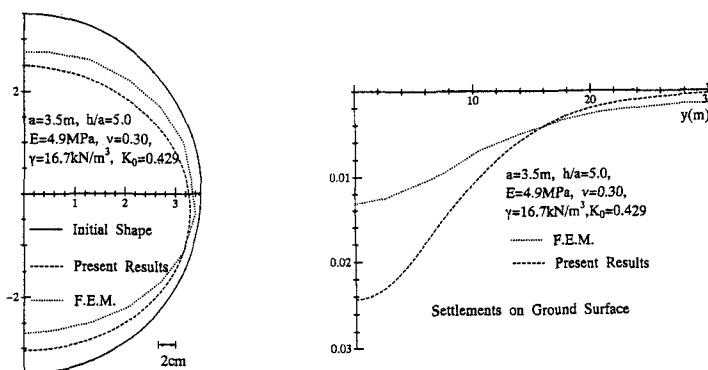


図-10 円形トンネルの変形について有限要素解析との比較 図-11 地表面の沈下について有限要素解析との比較

4 結 言

本論文では、等方性弾性体の円孔を有する無限板の解と半無限板の解を拘束解除法により重ね合わせ、円孔を有する半無限板の解析手法を示した。これにより重力場での地表面に隣接したトンネルの掘削による地盤の変位の解析を可能にした。

なお、本研究の遂行において数値計算の手法について福島工業高等専門学校助教授大槻正伸先生に多くの助言を頂きました。深く感謝の意を表します。

参考文献

- [1] 川本 朧万, 林 正夫: 地盤工学における有限要素解析 土質力学と岩盤力学へのアプローチ, 培風館, 1978.
- [2] Jeffery, G. B.: Plane stress and plane strain in bipolar co-ordinate, *Trans. Royal Society, A*, **221**, pp.265-293, 1920.
- [3] 安藏善之輔: 水平表面に接して一円形孔を有する重力体中の応力に就いて, 九州帝大工学集報, **12-3**, pp.145-160, 1937.
- [4] Mindlin, R.D.: Stress distribution around a tunnel, *Proc. ASCE*, **65-4**, pp.619-642, 1939.
- [5] 伊藤富雄: 傾斜面の下に掘ったトンネル周辺応力について, 土木学会誌, **36-2**, pp77-80, 1951.
- [6] Széchy, K.: トンネル工学 (島田隆夫訳), 鹿島出版会, 1971.
- [7] 木山英郎, 藤村尚: 地下浅所のトンネル掘削に伴う地表沈下の弾性解析, 土質工学会論文報告集, **22-3**, pp.161-169, 1982.
- [8] Sagaseta, C.: Analysis of undrained soil deformation due to ground loss, *Geotechnique*, **37-3**, pp.301-320, 1987.
- [9] Verruijt, A. & Booker, J. R.: Surface settlements due to deformation of a tunnel in an elastic half plane, *Geotechnique*, **46-4**, pp.753-756, 1996.
- [10] Hetenyi, M.: A method of solution for the elastic quarter-plane, *Jour. Appl. Mech.*, **27**, pp.289-296, 1960.
- [11] 堤 隆, 平島健一: 拘束解除法を用いた直交異方性弾性体の楕円リング問題の応力、変位の解析, 日本機械学会論文集, **63-615**, A, pp.2411-2416, 1997.
- [12] 森口繁一: 2次元弾性論, 岩波書店, 1957.
- [13] 樗木 武: トンネル力学, 共立出版, 1977.