

初期地盤の変形を考慮した円形ライニングの2次元弾性解

Two-dimensional elastic analysis for a circular tunnel lining in the pre-deformed ground due to initial stresses

木山 英郎*・藤村 尚*・西村 強*・池添 保雄*

Hideo KIYAMA, Hisashi Fujimura, Tsuyoshi Nishimura, Yasuo IKEZOE

Abstract

The behavior of a tunnel lining is a typical ground-lining interaction problem which depends on the relative stiffnesses of the lining and the ground as well as the initial stress conditions. In this paper a strict solution of the relative stiffness is derived for both full-slip and no-slip conditions at the ground-lining interface; moreover, the solution is modified for the interaction to be not affected directly by the ground movements due to the initial stresses before tunneling. The analytical results of different linings are quantitatively evaluated by using a common index, "support-stiffnesses", for the tunnel lining, the surrounding rock mass and the total, which must be useful for practical implications and the further development of tunnel support design.

1. はじめに

本論文の目的は、①最も単純で、基本となる平面ひずみ状態での、無限板中の円形ライニングの弾性厳密解を構成すること。その際、ライニングと地盤の境界において、完全に滑らかな場合 (Full-slip) と粗い場合 (No-slip) の両極値を含むこと (F, N と略記する)。この解はライニングを設置した地盤に初期応力を 0 から载荷する場合 (埋設管の例) に相当する。②さらにその解は修正され、初期応力によって変形を完了した地盤の掘削断面を無応力のライニングで置換し (押し管の例)、地盤内応力と平衡する状態の解として再構成すること (初期変形補正の解 F(c), N(c) と呼ぶことにする)。③以上の解析解を用いて、お互いに連成する地盤とライニングの応力、変形について、地盤の物性と初期応力状態およびライニングの物性と巻き厚の影響を定量的かつ一般化して示すこと。それには、既に報告¹⁾したように、ライニング支保剛性、地山支保剛性、総支保剛性の形でまとめるのが最善と考えている。

2. 平面ひずみ状態のライニング応力、変位の弾性解

同じ目的の解析には、例えば Muir Wood²⁾, あるいは Einstein ら³⁾の近似解がよく用いられているが、不思議なことにここに述べるような古典的な形の厳密解が見当たらない。

図-1 に示すように、地盤のラーメ定数を λ , ν , ライニングのそれを $\bar{\lambda}$, $\bar{\nu}$, 外半径 (掘削断面と見なす) を b , 内半径を a とし、厚肉円管の Airy の応力関数を地盤 (任意定数を $C_0, E_0, \dots, E_2$ とする) とライニング ($\bar{C}_0, \bar{E}_0, \dots, \bar{E}_2$) のそれぞれに用いて応力成分、変位成分の一般解を求めると以下のものである。

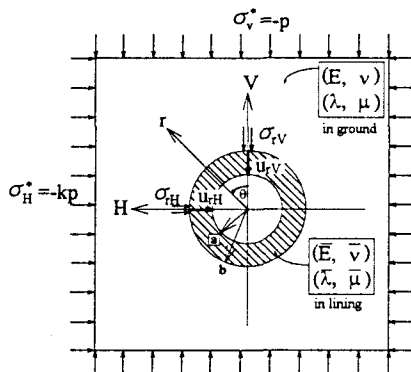


図-1 平面ひずみ状態のライニング解析モデル

* 正会員 鳥取大学工学部土木工学科

地盤中 ($\infty > r \geq b$)

$$\sigma_r = (\lambda + \mu)C_0 - 2\mu E_0 r^{-1} + \{2(\lambda + \mu)C_2 r^{-1} + 2\mu E_2' - 6\mu E_2 r^{-1}\} \cos 2\theta \quad (1a)$$

$$\sigma_\theta = (\lambda + \mu)C_0 + 2\mu E_0 r^{-1} + \{-2\mu E_2' + 6\mu E_2 r^{-1}\} \cos 2\theta \quad (1b)$$

$$\tau_{r\theta} = \{(\lambda + \mu)C_2 r^{-2} - 2\mu E_2' - 6\mu E_2 r^{-1}\} \sin 2\theta \quad (1c)$$

$$u_r = \frac{C_0}{2} r + E_0 r^{-1} + \left\{ -\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} C_2 r^{-1} + E_2' r + E_2 r^{-3} \right\} \cos 2\theta \quad (1d)$$

$$u_\theta = \left\{ \frac{C_2}{2} r^{-1} - E_2' r + E_2 r^{-3} \right\} \sin 2\theta \quad (1e)$$

境界条件

$$(\sigma_r)_{r=\infty} = -p \left\{ \frac{1+k}{2} + \frac{1-k}{2} \cos 2\theta \right\} \quad (3)$$

$$(\bar{\sigma}_r)_{r=a} = 0 \quad (5)$$

$$(\sigma_r)_{r=b} = (\bar{\sigma}_r)_{r=b} \quad (7)$$

ライニング中 ($b \geq r \geq a$) , 項 $\bar{A}_2$ の存在に注意,

$$\bar{\sigma}_r = (\bar{\lambda} + \bar{\mu})\bar{C}_0 - 2\bar{\mu}\bar{E}_0 r^{-1} + \{2(\bar{\lambda} + \bar{\mu})\bar{C}_2 r^{-1} + 2\bar{\mu}\bar{E}_2' - 6\bar{\mu}\bar{E}_2 r^{-1}\} \cos 2\theta \quad (2a)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = (\bar{\lambda} + \bar{\mu})\bar{C}_0 + 2\bar{\mu}\bar{E}_0 r^{-1} + \{2(\bar{\lambda} + \bar{\mu})\bar{A}_2 r^{-2} - 2\bar{\mu}\bar{E}_2' + 6\bar{\mu}\bar{E}_2 r^{-1}\} \cos 2\theta \quad (2b)$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = \{(\bar{\lambda} + \bar{\mu})\bar{A}_2 r^{-1} + (\bar{\lambda} + \bar{\mu})\bar{C}_2 r^{-1} - 2\bar{\mu}\bar{E}_2' - 6\bar{\mu}\bar{E}_2 r^{-1}\} \sin 2\theta \quad (2c)$$

$$\bar{u}_r = \frac{\bar{C}_0}{2} r + \bar{E}_0 r^{-1} + \left\{ -\frac{\bar{\lambda}}{6\bar{\mu}} \bar{A}_2 r^{-1} - \frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{2\bar{\mu}} \bar{C}_2 r^{-1} + \bar{E}_2' r + \bar{E}_2 r^{-3} \right\} \cos 2\theta \quad (2d)$$

$$\bar{u}_\theta = \left\{ \frac{2\bar{\lambda} + 3\bar{\mu}}{6\bar{\mu}} \bar{A}_2 r^{-1} + \frac{\bar{C}_2}{2} r^{-1} - \bar{E}_2' r + \bar{E}_2 r^{-3} \right\} \sin 2\theta \quad (2e)$$

$$(\tau_{r\theta})_{r=\infty} = p \frac{1-k}{2} \sin 2\theta \quad (4)$$

$$(\bar{\tau}_{r\theta})_{r=a} = 0 \quad (6)$$

$$(u_r)_{r=b} = (\bar{u}_r)_{r=b} \quad (8)$$

および、地盤とライニングの境界面の粗さはつぎの2種類を考える。

①滑らかな場合 (Full-slip, 略号 F) , $(\tau_{r\theta})_{r=b} = (\bar{\tau}_{r\theta})_{r=b} = 0$ (9)

②粗い場合 (No-slip, 略号 N) , $(\tau_{r\theta})_{r=b} = (\bar{\tau}_{r\theta})_{r=b}$ (10) $(u_\theta)_{r=b} = (\bar{u}_\theta)_{r=b}$ (11)

以上の境界条件式を用いて 11 個の任意定数は以下のように定まる。

$$C_0 = -p \frac{1+k}{2(\lambda + \mu)} \quad (12) \quad E_2' = -p \frac{1-k}{4\mu} \quad (13)$$

$$\frac{\bar{E}_0}{b^2} = \left\{ \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} C_0 \right\} \left\{ \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left/ \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 + \frac{\bar{\mu}}{\lambda + \bar{\mu}} + \frac{\bar{\mu}}{\mu} \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right) \right] \right. \right\} \quad (14)$$

$$\bar{C}_0 = \frac{2\bar{\mu}}{\lambda + \bar{\mu}} \frac{\bar{E}_0}{b^2} \left/ \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right. \quad (15) \quad \frac{E_0}{b^2} = \frac{\lambda + \mu}{2\mu} C_0 - \frac{\bar{\mu}}{\mu} \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right) \frac{\bar{E}_0}{b^2} \left/ \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right. \quad (16)$$

その他の定数については、ライニング外周の境界条件①、②で異なるが、

$$\{x\} = \{C_2/b^2 \quad E_2/b^4 \quad \bar{A}_2/b^2 \quad \bar{E}_2 \quad \bar{C}_2/b^2 \quad \bar{E}_2/b^4\}^T \quad (17)$$

$$\text{と置いて、} [A]\{x\} = \{B\} \quad (18)$$

ここに、 $[A]$ 、 $\{B\}$ は以下のである。

①滑らかな場合 (Full-slip)

$$[A] = \begin{bmatrix} -2(\lambda + \mu) & 6\mu & 0 & 2\bar{\mu} & 2(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) & -6\bar{\mu} \\ -(\lambda + \mu) & 6\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) & -2\bar{\mu} & (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) & -6\bar{\mu} \\ -\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} & 1 & \frac{\bar{\lambda}}{6\bar{\mu}} & -1 & \frac{\lambda + 2\bar{\mu}}{2\bar{\mu}} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2\bar{\mu} \left(\frac{a}{b} \right)^4 & 2(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \left(\frac{a}{b} \right)^2 & -6\bar{\mu} \\ 0 & 0 & (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \left(\frac{a}{b} \right)^6 & -2\bar{\mu} \left(\frac{a}{b} \right)^4 & (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \left(\frac{a}{b} \right)^2 & -6\bar{\mu} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\{B\} = \{2\mu E_2' \quad -2\mu E_2' \quad 0 \quad -E_2' \quad 0 \quad 0\}^T \quad (20)$$

②粗い場合 (No-slip)

$$[A] = \begin{bmatrix} -2(\lambda + \mu) & 6\mu & 0 & 2\bar{\mu} & 2(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) & -6\bar{\mu} \\ -(\lambda + \mu) & 6\mu & (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) & -2\bar{\mu} & (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) & -6\bar{\mu} \\ -\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} & 1 & \frac{\bar{\lambda}}{6\bar{\mu}} & -1 & \frac{\lambda + 2\bar{\mu}}{2\bar{\mu}} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{2\bar{\lambda} + 3\bar{\mu}}{6\bar{\mu}} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2\bar{\mu} \left(\frac{a}{b} \right)^4 & 2(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \left(\frac{a}{b} \right)^2 & -6\bar{\mu} \\ 0 & 0 & (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \left(\frac{a}{b} \right)^6 & -2\bar{\mu} \left(\frac{a}{b} \right)^4 & (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \left(\frac{a}{b} \right)^2 & -6\bar{\mu} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\{B\} = \{2\mu E_2' \quad -2\mu E_2' \quad -E_2' \quad -E_2' \quad 0 \quad 0\}^T \quad (22)$$

3. 掘削前に完了している初期応力による地盤変形の考慮

前節の解は、埋設管のように無負荷状態でライニングを設置し、初期応力を載荷する場合に相当する (全変形の解と略称)。この場合ライニングは初期応力による地盤の変形にもつき合うこととなる。

先に Einstein ら³⁾ によって解析されているように、トンネル掘削においては、初期応力による変形を既に完了した地盤にライニングを設置するもので、それ以降の変位増分に対してのみライニングは支保力を発揮する (NATM の支保圧-内空変位曲線と支保剛性曲線の関係と同じ)。弾性解析の理想的なイメージとしては、押し

管工法のように、初期応力で変形済の地盤にその応力、変形状態を乱さないように無応力、無変形のライニングを突っ込み、瞬時に掘削断面に相当する排土を行う手順を考える。瞬間的に不平衡となった周辺地盤の応力は、新たに出現したライニングとの間で応力、変形のやりとりをして、新たな平衡状態に達することとなる。これが求めるべき解（初期変形補正の解と略称）であり、全変形の解よりは実際のトンネル挙動に近いものと思われる。

前節の全変形の解を、上記した初期変形を補正した解に修正すると以下のようである。

トンネル掘削前の地盤の初期変形は、 $r=b$ において、

$$u_r^* = \ell^* + m^* \cos \theta \quad (23) \quad u_\theta^* = -m^* \sin \theta \quad (24)$$

$$\ell^* = -(1+\nu)(1-2\nu)(1+k)pb/2E \quad (25) \quad m^* = -(1+\nu)(1-k)pb/2E \quad (26)$$

この初期変位をライニングの変位、式(8)の左辺、からさし引くために次の3つの修正が必要である。

修正1：式(14)の分子の $\{ \}$ 内を、

$$\left\{ \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} C_0 \right\} \text{ から } \left\{ \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} C_0 - \frac{\ell^*}{b} \right\} \text{ へ修正} \quad (27)$$

修正2：㉑滑らかな場合における $\{B\}$ の式(20)を次式に修正、

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} 2\mu E_2' & -2\mu E_2' & 0 & \left(-E_2' + \frac{m^*}{b}\right) & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T \quad (28)$$

修正3：㉒粗い場合における $\{B\}$ の式(22)を次式に修正、

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} 2\mu E_2' & -2\mu E_2' & \left(-E_2' + \frac{m^*}{b}\right) & \left(-E_2' + \frac{m^*}{b}\right) & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T \quad (29)$$

以上の3つの修正以外は、前節の式(1)～(22)がそのままここでも成立する。

4. 解析結果と考察

4.1 ライニング外周の応力分布と変形形状

全変形の解と初期変形補正の解を比較するために、一例として、初期応力 $k = \sigma_H^* / \sigma_V^* = 0.5$ 、ライニングの内外径比 $a/b=0.95$ （例えば、直径 10m のトンネルで巻厚 25cm）について、ライニングと地盤のヤング率比 $\bar{E}/E=10$ と 100、および両者の境界が滑らかな場合 F と粗い場合 N の結果を図-2 に示す。図はライニング外周($r=b$)での合応力 $(\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta)(1/p)$ と合変位 $(\bar{u}_r + \bar{u}_\theta)(E/pb)$ で表している。なお、全変形 F, N における変位は無応力状態からの変位を、初期変形補正 F(C), N(C) におけるそれはトンネル掘削後の変位を表す。

両者の解で応力分布、変形形状ともに大きく異なることがわかる。ライニングがない素掘りの場合には、全変形からトンネル掘削前の初期地盤変形を差し引けば、トンネル掘削による変形を表し、初期変形補正の解と一致するが、ライニングが存在する場合にはこうした処置は意味をなさないことが理解される。

4.2 総支保剛性、ライニング支保剛性と地山支保剛性

トンネル断面の掘削に伴い、空洞維持のために周辺地盤の発揮する支保工相当力を地山支保力と呼ぶことにする。地山支保力とライニング支保力（支保工、覆工などによる支保力を代表する）は常に連成し、両者を合わせたものがトンネルの総支保力となる。通常の内空変位計測等で評価されているのはこの総支保力に他ならない。

先の論文 1) で既に明らかにしたように、これらの支保力は代表点の変位を仲立ちとして、地山支保剛性 K_E 、ライニング支保剛性 K_L および総支保剛性 K_T として定量化するのがより一般的となる。さらに各支保剛性は初期地盤における掘削予定断面の剛性 K_0^* （既知量）で相対化して、 $\bar{K}_E = K_E / K_0^*$ 、 $\bar{K}_L = K_L / K_0^*$ 、 $\bar{K}_T = K_T / K_0^*$ として用いる（詳細は文献 1）を参照）。つまり、ライニングの剛性や周辺地盤の剛性が、もともとの地盤で掘削断面に当たる土塊あるいは岩塊の心棒が発揮していた剛性に対比して、その何割程度を発揮しているかを表す。

さて、こうした支保剛性を的確に評価するための応力と変位の代表点として、ライニングと地盤の境界である掘削断面上の2点、クラウン($r=b$, $\theta=0$)と側壁中央($r=b$, $\theta=90^\circ$ あるいは 270°)を用いる。 $r=b$, $\theta=0$ 点の初

期応力，初期変位を σ_{rV}^*, u_{rV}^* ，掘削・ライニング後のそれを σ_{rV}, u_{rV} ； $r=b$ ， $\theta=90^\circ$ 点のそれらを σ_{rH}^*, u_{rH}^* ，および σ_{rH}, u_{rH} と記し，これらの値から次式で示す代表応力，代表変位を定義する。

$$\begin{aligned} \sigma_0^* &= (\sigma_{rV}^* + \sigma_{rH}^*)/2, & \sigma_0 &= (\sigma_{rV} + \sigma_{rH})/2 \\ u_0^* &= (u_{rV}^* + u_{rH}^*)/2, & u_0 &= (u_{rV} + u_{rH})/2 \end{aligned} \quad (30)$$

これら代表応力，代表変位は，弾性力学によってライニング外周上の平均応力，平均変位になることがわかり，代表点として $\theta=0$ と 90° の組合せのみならず任意の直交線上の2点 θ と $\theta+90^\circ$ で換え得ることがわかる。

この中， σ_0^*, u_0^* は初期応力 $\sigma_r^* = -p\{1+k+(1-k)\cos 2\theta\}/2$ および初期変位の式(23)～(26)から次式のように定まり，さらに円形ライニングに限らず一般形状のライニングについても成立する。

$$\sigma_0^* = -(1+k)p/2, \quad u_0^* = \ell^* = -(1+\nu)(1-2\nu)(1+k)pb/2E \quad (31)$$

一方，掘削後の σ_0, u_0 は，地盤の物性と応力状態 E, ν, k およびライニングの物性と形状 $\bar{E}, \bar{\nu}, a/b$ から，前節までの解析によって求まる（一般形状のライニングについても，有限要素法などを用いて比較的容易に計算できる）。また，解析の結果 σ_0, u_0 は地盤とライニングの境界条件（滑らか，あるいは粗い）に無関係に定まることがわかった。

式(30)の代表応力，代表変位を用いて，初期剛性 K_0^* で相対化された各支保剛性は次式で計算される。

$$\text{総支保剛性 } \bar{K}_T = u_0^*/u_0 \quad (32) \quad \text{ライニング支保剛性 } \bar{K}_L = (u_0^*/u_0)\sigma_0/\sigma_0^* \quad (33)$$

$$\text{地山支保剛性 } \bar{K}_E = \bar{K}_T - \bar{K}_L = (u_0^*/u_0)(\sigma_0 - \sigma_0^*)/\sigma_0^* \quad (34)$$

平均応力，平均変位であることが幸いし，これらの式を構成する σ_0/σ_0^* および u_0/u_0^* の項において k が消去され，3つの支保剛性は初期応力状態 k にも無関係になる。

以上のように，代表応力，代表変位を直交線上の2点の平均値とすることによって，各支保剛性は，初期応力状態(k)および地盤とライニングの境界の粗さに無関係に定まり，地盤物性(E, ν)との関連のみでトンネル剛性($\bar{E}, \bar{\nu}, a/b$)を普遍的に評価できることになる。すなわち， $\bar{K}_L, \bar{K}_E, \bar{K}_T$ に関する以下の図は，初期

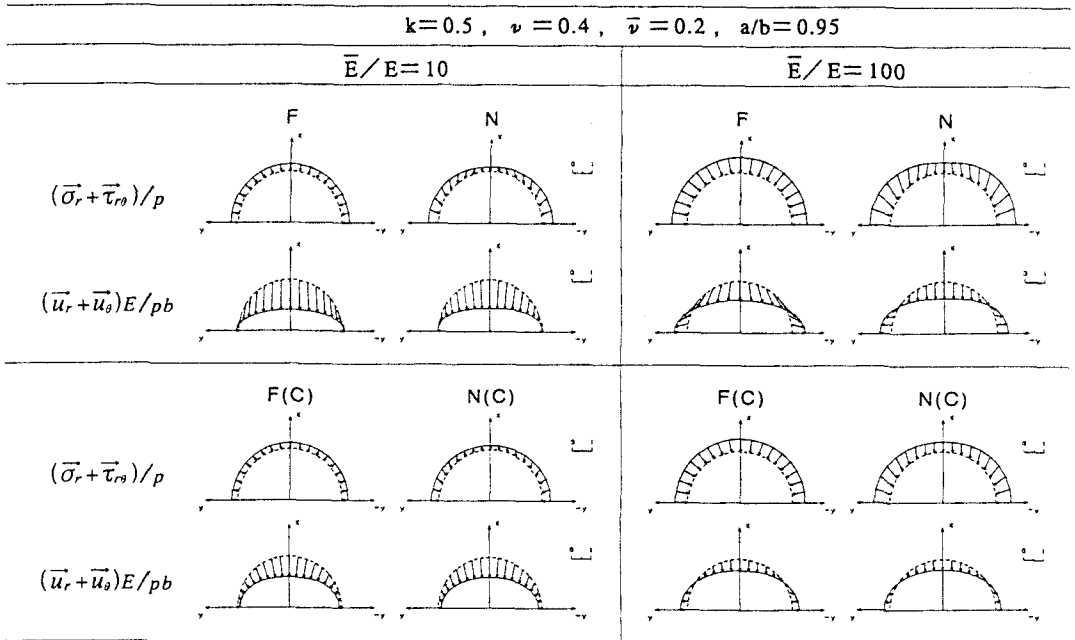


図-2 滑らか，粗いの境界条件と全変形解析と，初期変形補正解析の組み合わせによるライニング外周($r=b$)の応力と変形の相違

応力が $k=0$ (一軸応力状態) から $k=1.0$ (等方応力状態) までの任意の k について、かつ、滑らかか粗いかの境界条件に無関係に成立するものである。

まず、全変形解析 F , C で基本となる $\bar{E}/E=1$, $\bar{\nu}=\nu$ の場合の $\bar{K}_L$, $\bar{K}_E$, $\bar{K}_T \sim a/b$ 関係を図-3(a)に示す。地盤に $a=0$ から $a=b$ までの任意の大きさの孔をあけた時の、 $b-a$ 間をライニングと考えた場合に当たる¹⁾。

今回新たに提案した、初期変形補正を施した場合 $F(C)$, $N(C)$ には同図は図-3(b)のように変化する。素掘り状態では当然両者は一致するが、それ以外の a/b において後者は相当低い支保剛性に修正されることがわかる。ちなみに、後者は初期変形完了後にライニングに当たる厚さ $(b-a)$ の地盤を一度抜き取って応力・変形を0に解放し、改めて差し込んだ状態を表し、このライニング部の地盤が応力0から周辺地盤の応力と

平衡するまで上昇する間の変形増によって、ライニング支保剛性ならびに総支保剛性が減少する状況を示している。このようにライニングにおいては、設置時に0応力からスタートすることによって、初期地盤の剛性 K_0 に比べるとその本来の剛性から期待される支保剛性よりもずいぶん低い値になることに注意が必要である。

図-4は実用的なライニング巻き厚 $a/b=0.9 \sim 1.0$ (例えば、直径10mのトンネルでライニング厚さ50cm $\sim$ 0cmに対応する)について、各支保剛性の値と a/b の関係を地盤のポアソン比 ν をパラメータとして描いている ($\bar{\nu}=0.2$ の例)。同図(a)はヤング率比 $\bar{E}/E=10$ の場合、同図(b)は $\bar{E}/E=100$ の場合を示す。

同図から、いずれの $\bar{E}/E$ においても、地山のポアソン比 ν が小さいほど (通常地山の健全さを表す) 各支保剛性が大きく発揮される。図(a)から(b)のように、 $\bar{E}/E$ が大きくなれば (ライニングの $\bar{E}$ が大きい場合と、同じ $\bar{E}$ で地山の E が小さい場合とがある) ライニング支保剛性、総支保剛性が大きく発揮される。すなわち、各図で、 a/b を定めればライニング自体は同じものとなるので、ライニング支保剛性、地山支保剛性、総支保剛性ともに、地山物性 E , ν に大きく支配され、地山物性を考えずして支保剛性を算定できないことがわかる。

参考文献

- 1) 木山・藤村・西村・池添：トンネル支保特性曲線の定量的評価に関する理論的考察，材料，第41巻，第463号，pp.417-423，1992。
- 2) A.M. Muir Wood：The circular tunnel in elastic ground, Géotechnique 25, No.1, pp.115-127, 1975。
- 3) H.H. Einstein and C.W. Schwartz：Simplified analysis for tunnel supports, Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol.105, No.GT4, pp.499-518, 1979。

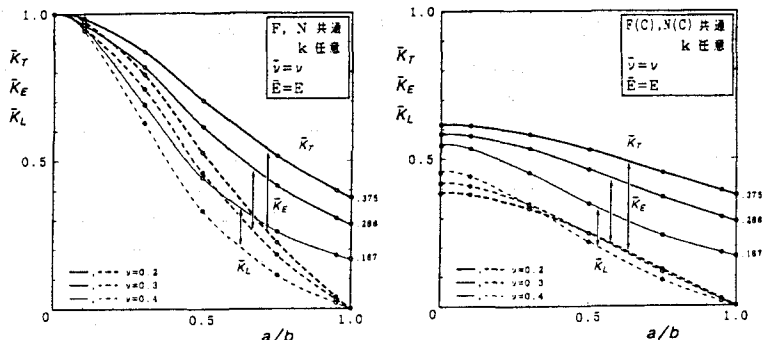


図-3 ライニング剛性、地山支保剛性および総支保剛性の基本図

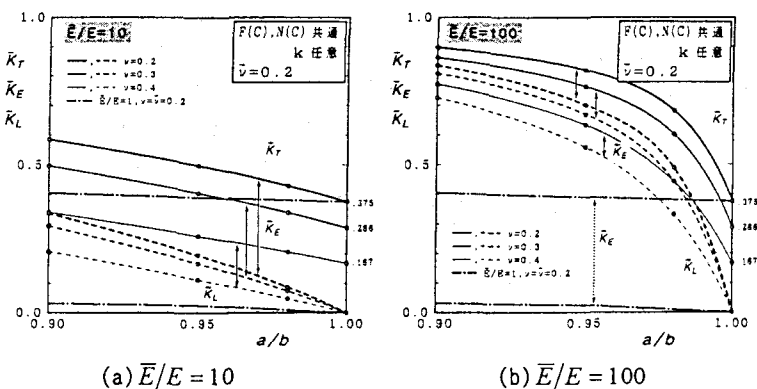


図-4 初期変形補正解析による実用域の各支保剛性 ($\bar{\nu}=0.2$, $a/b=0.9 \sim 1.0$)