

(73) 不連続体解析による岩盤のひずみ軟化解析

Strain Softening Analysis of Jointed Rock Mass by Discontinuous Analysis

鈴木隆次 *・呉 智深**・浜島良吉***

Takatsugu SUZUKI, Zhishen WU, Ryokichi HAMAJIMA

In present state of numerical analysis, it becomes a subject of discussion how to treat various scale of discontinuity in surrounding rock formation. The authors have proposed discontinuous analysis technique FESM(Finite Element Spring Method) considering elemental deformation for discontinuous media. FESM is formulated using the principle of hybrid virtual work. In the FESM, Large scale discontinuity is modeled as element boundary deformation, and intermediate and small scale discontinuity is described as the deformation of element itself. In this paper, the introducing procedure of the arc-length method using modified Newton-Raphson iteration scheme into the FESM was described, and some results of analysis were shown to check validation.

1.はじめに

岩盤には一般に、断層、節理等の不連続面が多く含まれる。したがって岩盤内構造物の建設に際しては、不連続性を考慮に入れた上で、応力、変形、破壊挙動を予測することが必要である。筆者らは、規模の大きな不連続面を要素間の変形で、中小規模の不連続面を要素自身の変形で表現することが可能で、かつ不連続面が伸展しても自由度増加が発生しない解析手法の開発を目指し、要素変形を考慮した不連続体解析手法 FESM (Finite Element Spring Method) を開発してきた^{1), 2), 3), 4)}。FESMは要素間の連続条件をゆるめたハイブリッド型仮想仕事の原理を用いて定式化されたものである⁵⁾。FESMは荷重制御、変位制御の両方の載荷手法で解析可能であり、岩盤のひずみ硬化挙動からひずみ軟化挙動まで解析可能である。しかし非線形求解法に山田の増分法(RMIN法)を用いているため、軟化の度合いが大きくなると解析不能となる。

一方、岩石の破壊後の挙動は岩石の種類・拘束状態・供試体形状などにより、ひずみ硬化・スナップスルー型のひずみ軟化・スナップバック型のひずみ軟化と様々に変化することが知られている。筆者らはこのような挙動をもFESM解析で対応するため、従来用いていた非線形求解法であるRMIN法に換えて、修正Newton-Raphson法を用いた弧長増分法(Crisfieldの方法)^{6), 7), 8)}を導入することを試みた。本研究では、その考え方について説明し、さらに解析手法の検証を行った結果について述べる。

* 三井建設(株)原子力部

** 工博 茨木大学助教授 工学部都市システム工学科

*** 工博 埼玉大学助教授 工学部建設工学科

2. 残差力の計算

従来のFESMプログラムでは、非線形解析手法としてRMIN法を用いてきた。したがって特に残差力について評価する必要がなかった。しかしCrisfieldの方法による弧長増分法を導入する上では、残差力を考慮することが必要となる。そこで、FESMにおける残差力の導出を試みる。

ハイブリッド型仮想仕事の原理は次式で示される⁵⁾。

$$\sum_e \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \sum_e \iiint_V \bar{P}_i \delta u_i dV_i - \iint_{S\sigma} \bar{T}_i \delta u_i ds + \sum_b \iint_{S\sigma b} f_i \delta(\delta_i) ds = 0 \quad (1)$$

ここに σ_{ij} : 要素内応力、 ε_{ij} : 要素内ひずみ、 $\bar{P}_i$: 物体力、 $\bar{T}_i$: 表面力、

u_i : 変位、 f_i : 要素境界におけるバネ応力、 δ_i : 要素境界における相対変位

であり、 $\bar{\cdot}$ は既知量を示す。また、 $\sum_e$ は全要素についての和、 $\sum_b$ は全要素境界についての和を表す。

式(1)を増分形にし、さらにマトリクス形式にして整理すると次式を得る。

$$[K_{uu}]\{\Delta u\} + [K_{ue}]\{\Delta \varepsilon\} = \{F_u^{(0)}\} + \{\Delta F_u\} - \sum_b \iint_{S\sigma b} [B_{du}]^T \{f^{(0)}\} ds \quad (2)$$

$$[K_{ue}]\{\Delta u\} + [K_{ee}]\{\Delta \varepsilon\} = \{F_e^{(0)}\} + \{\Delta F_e\} - \sum_e \iiint_V \{\sigma^{(0)}\} dV - \sum_b \iint_{S\sigma b} [B_{de}]^T \{f^{(0)}\} ds \quad (3)$$

ただし、 $[k_{uu}] = [B_{du}]^T [D_s^{(0)}] [B_{du}]$ 、 $[k_{ue}] = [B_{du}]^T [D_s^{(0)}] [B_{de}]$

$[k_{eu}] = [B_{de}]^T [D_s^{(0)}] [B_{du}]$ 、 $[k_{ee}] = [B_{de}]^T [D_s^{(0)}] [B_{de}]$

$[K_{uu}] = \sum_b [k_{uu}]$ 、 $[K_{ue}] = \sum_b [k_{ue}]$

$[K_{ue}] = \sum_b [k_{ue}]$ 、 $[K_{ee}] = \sum_b [k_{ee}] + \sum_e \iiint_V [D_e^{(0)}] dV$

$\{\Delta F_u\} = \sum_e \left(\iiint_V [N_u]^T \{\Delta \bar{P}\} dV \right) + \iint_{S\sigma} [N_u]^T \{\Delta \bar{T}\} ds$

$\{\Delta F_e\} = \sum_e \left(\iiint_V [N_e]^T \{\Delta \bar{P}\} dV \right) + \iint_{S\sigma} [N_e]^T \{\Delta \bar{T}\} ds$

$\{F_u^{(0)}\} = \sum_e \left(\iiint_V [N_u]^T \{\bar{P}^{(0)}\} dV \right) + \iint_{S\sigma} [N_u]^T \{\bar{T}^{(0)}\} ds$

$\{F_e^{(0)}\} = \sum_e \left(\iiint_V [N_e]^T \{\bar{P}^{(0)}\} dV \right) + \iint_{S\sigma} [N_e]^T \{\bar{T}^{(0)}\} ds$

$[D_e^{(0)}]$: フックの法則より得られる要素内応力-ひずみマトリクス

$[D_s^{(0)}]$: 等価剛性により求める要素間応力-変位マトリクス

(2要素間の相対変位) $\{\Delta \delta\} = [B_{du}]\{\Delta u\}_{(b)} + [B_{de}]\{\Delta \varepsilon\}_{(b)}$

(要素内変位) $\{\Delta U\} = [N_u]\{\Delta u\}_{(e)} + [N_e]\{\Delta \varepsilon\}_{(e)}$

である。式(2)、(3)における右辺は残差力を表し、釣り合い状態が満たされれば0となる。

3. 弧長増分法

弧長増分法の基本的な考え方は、収束のための反復計算毎に荷重レベルを調整することにある。これはNewton-Raphson法や修正Newton-Raphson法で、一つの荷重ステップ内で荷重レベルが一定に保たれるのとは対照的である。弧長増分法では反復計算が収束するまでに、荷重はあらかじめ拘束条件式で決められた経路をたどる。ただし、荷重が比例載荷であることはNewton-Raphson法や修正Newton-Raphson法と同様である。

今、荷重ベクトル $\{R_{i+1}^n\}$ 、荷重増分ベクトル $\{\Delta R\}$ を次式で示す。

$$\{R_{i+1}^n\} = \lambda_{i+1}^n \{R^r\} \quad (4)$$

$$\{\Delta R_i^n\} = \Delta \lambda_i^n \{R^r\} \quad (5)$$

$$\lambda_{i+1}^n = \lambda_i^n + \Delta \lambda_i^n \quad (6)$$

ここに λ_i^n : 荷重パラメータ、 $\Delta \lambda_i^n$: 荷重パラメータ増分、 $\{R^r\}$: 荷重参考値であり、上付き n は n 番目の荷重ステップを、下付の i は反復計算を表す。

式(2)、(3)をまとめて以下のように書き換え、反復計算によって増分変位ベクトル $\{\Delta U_i^n\}$ を求める。

$$[K]\{\Delta U_i^n\} = \{R_i^n\} - \{F_i^n\} \quad (7)$$

ここに $[K]$ は剛性マトリクスであり、Newton-Raphson法では反復毎に更新され、修正Newton-Raphson法では $i = 1$ のときのみ更新される。 $\{F_i^n\}$ は等価節点力ベクトルである。

式(4)より

$$[K]\{\Delta U_i^n\} = \lambda_i^n \{R^r\} - \{F_i^n\} \quad (8)$$

となる。式(7)にはN個の未知数と1個の未知数である λ_i^n が含まれる。したがって式(7)を解くためにはもう一つ拘束条件式が必要となる。

式(7)を連立方程式として一度に解く方法がRiksの方法であるが、係数行列の対称性を失うという欠点がある。ここでは対称性を失うことを回避できるCrisfieldによるModified Riks Methodを用いることにする。図-1は一自由度モデルにおける弧長法の基本的な手順を示している。荷重ステップは $n+1$ に着目している。問題は反復を繰り返すことにより ΔU_i^{n+1} を次々に求め、

$$U_i^{n+1} = U_{i-1}^{n+1} + \Delta U_i^{n+1} \quad (9)$$

より U_i^{n+1} を決定することにある。そのため、図-1 の δx_i^{n+1} を求めればよい。

$\delta\lambda_i^{n+1}$ が求まれば次式により ΔU_i^{n+1} が求まる。

$$\Delta U_i^{n+1} = \Delta U_i^{\Pi} + \delta \lambda_i^{n+1} \Delta U_i^{\text{I}} \quad \dots \quad (10)$$

$$\Delta U_i^1 = [K]^{-1} R^r \quad (11)$$

$$\Delta U_i^{\text{II}} = [K]^{-1}(\lambda_i^{n+1} R^r - F_i^{n+1}) \quad (12)$$

$$\lambda_{i+1}^{n+1} = \lambda_i^{n+1} + \delta \lambda_i^{n+1} \quad (13)$$

拘束条件式は一般に

$$\alpha \{ (\lambda_i^{n+1} - \lambda^n) + \delta \lambda_i^{n+1} \}^2 + (U_i^{n+1})^T U_i^{n+1} = \Delta I_{n+1}^2 \quad (14)$$

ここに Δl_{n+1}^2 : 荷重ステップ $n+1$ における弧長半径

 α : スケーリングファクター

である。

式(14)においてCrisfieldと同様、 $\alpha = 0$ とすると次式を得る。

$$(U_i^{n+1})^T U_i^{n+1} = \Delta l_{n+1}^2 \quad (15)$$

式(15)に式(9)、(10)、(11)、(12)を代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} (U_i^{n+1})^T U_i^{n+1} - \Delta \mathcal{L}_{n+1}^2 &= \left(U_{i-1}^{n+1} + \Delta U_i^\Pi + \delta \mathcal{U}_i^{n+1} \Delta U_i^I \right)^T \\ &\quad \times \left(U_{i-1}^{n+1} + \Delta U_i^\Pi + \delta \mathcal{U}_i^{n+1} \Delta U_i^I \right) - \Delta \mathcal{L}_{n+1}^2 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

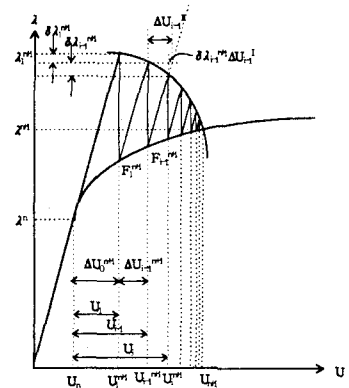


図-1 1自由度における弧長増分法
の手順 ($\alpha = 1$)

$$\begin{cases} a_1(\delta\lambda_i^{n+1})^2 + a_2\delta\lambda_i^{n+1} + a_3 = 0 \\ a_1 = (\Delta U_i^1)^T \Delta U_i^1 \\ a_2 = 2(U_{i-1}^{n+1} + \Delta U_i^n)^T \Delta U_i^1 \\ a_3 = (U_{i-1}^{n+1} + \Delta U_i^n)^T (U_{i-1}^{n+1} + \Delta U_i^n) - \Delta l_{n+1}^2 \end{cases} \quad (17)$$

$\delta\lambda_i^{n+1}$ は次式で求められる。

$$\delta\lambda_i^{n+1} = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}}{2a_1} \quad (18)$$

式(18)より $\delta\lambda_i^{n+1}$ は2つの値が求められる。どの値を選ぶかは、以下のようにして決定する。

$\theta = (U_{i+1}^{n+1})^T U_i^{n+1}$ とし、2つの $\delta\lambda_i^{n+1}$ に対する θ を求め、 θ が鋭角となる場合の $\delta\lambda_i^{n+1}$ を採用する。両方とも θ が鋭角となる場合は $-a_3/a_2$ の値に近い方を採用する。

荷重ステップ $n=1$ における最初の荷重増分と最初の弧長半径はあらかじめ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_1^1 &= cP_{cr} \\ \Delta l_1 &= \Delta\lambda_1^1 \sqrt{(\Delta U_i^1)^T \Delta U_i^1} \end{aligned} \quad (19)$$

ここに c : スケーリングファクター

P_{cr} : 破壊荷重の予測値

荷重ステップ $n>1$ では次式となる⁹⁾。

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_1^n &= a \frac{\Delta l_{n-1}}{\sqrt{(\Delta U_i^1)^T \Delta U_i^1}}, \quad a = \text{sign}(r) \\ r &= (\Delta U_i^1)^T [K_n] (\Delta U_i^1), \quad \Delta l_n = \Delta l_{n-1} \sqrt{\frac{N_1}{N_2}} \end{aligned}$$

ここに N_1 : 適当な定数、 N_2 : 前荷重ステップにおける反復数である。

収束判定は次式で行う。

$$\frac{\|\Psi_i^{n+1}\|}{\max(\|F_i^{n+1}\|, \|\lambda_i^{n+1}\| \|R'\|)} \leq \varepsilon \quad (20)$$

ここに $\Psi_i^{n+1} = R_i^{n+1} - F_i^{n+1}$

$\varepsilon = 10^{-3}$ ($1 \leq i \leq 10$)、 $\varepsilon = 10^{-2}$ ($i > 10$)

とする。

4. 解析による検証

弧長増分法を導入した結果、従来のRMIN法と比較して等価な解析結果が得られるかどうか確認するため、図-2に示すモデルに対する圧縮時の挙動を解析した。解析ではモデル下端の境界要素を固定し、上端の境界要素に下向きに荷重をかけた。表-1に解析に用いた物性値を示す。問題を単純化するため、モデル中央の要素間パネ2のみに小さな純せん断強度を与え、この部分のみ降伏してひずみ軟化を起こすように設定した。図-3に、従来のRMIN法と弧長増分法から得られた荷重-変位曲線を示す。荷重は要素間パネ1に働く荷重を、変形は境界要素1のy方向変位として求めた。要素間

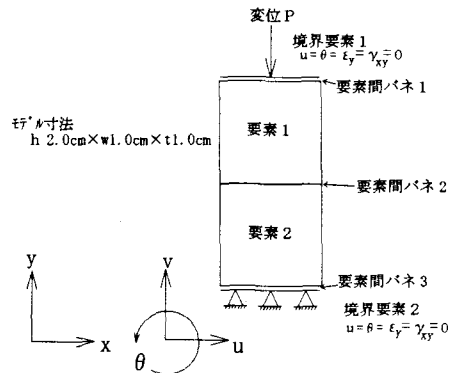


図-2 解析モデル

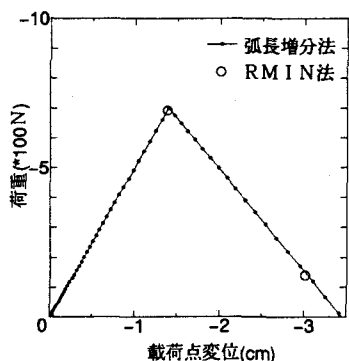


図-3 荷重-変位曲線

表-1 解析に用いた物性値

	要素	要素間バネ
弾性係数(MPa)	10.0	10.0
ポアソン比	0.25	0.25
純せん断強度(MPa)	10.0	2.0
内部摩擦角(°)	30.0	30.0
引張り強度(MPa)	100.0	100.0
ひずみ軟化率	-0.10	-0.10

バネ2に着目するため、要素間バネ1・3は降伏判定対象から除外した。。図-3より、弧長増分法による解析結果がRM IN法による解析結果と一致することが確かめられた。

5. まとめ

要素変形を考慮した不連続体解析手法F E S Mは、節理系岩盤などに存在する規模の大きな不連続面を要素間の変形で、中小規模の不連続面を要素自身の変形で表現することが可能で、かつ不連続面が伸展しても自由度増加が発生しない解析手法である。ひずみ硬化・スナップスルー型のひずみ軟化・スナップバック型のひずみ軟化と様々に変化する岩石の破壊後挙動に対応するため、従来用いていた非線形求解法であるRM IN法に換えて、修正Newton-Raphson法を用いた弧長増分法(Crisfieldの方法)を導入することを試みた。その結果、RM IN法による解析結果と弧長増分法による解析結果が一致することが確認され、解析手法の妥当性が検証された。不連続体解析手法でありながら弧長増分法のような複雑な求解法を導入できることは、F E S Mの優れた特徴と言える。今後は、さらに引張り破壊時の引張り軟化則を導入し、スナップバックの解析、寸法効果に関する検討等に発展させる予定である。

6. 参考文献

- 1) 鈴木隆次, 浜島良吉, "要素変形を考慮した不連続体解析による脆性材料の変形強度解析", 第25回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, pp. 36-40(1993)
- 2) 鈴木隆次, 浜島良吉, 中井仁彦, "要素変形を考慮した不連続体解析による岩質材料のひずみ軟化解析", 第9回岩の力学国内シンポジウム講演論文集, pp. 55-59(1994)
- 3) 鈴木隆次, 浜島良吉, 中井仁彦, 中島正博, "結晶構造の引張り破壊挙動", 第9回岩の力学国内シンポジウム講演論文集, pp. 19-24(1994)
- 4) 浜島良吉, 中井仁彦, 鈴木隆次, 長島正成, "要素変形を考慮した不連続体解析の精度について", 第26回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, pp. 460-464(1995)
- 5) 鷲津久一郎, "弾性学の変分原理概論", コンピュータによる構造工学講座II-3-A, 日本鋼構造協会編, 培風館(1972)
- 6) M.A.Crisfield, "A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through", Comp. Struct. 13, pp. 55-62(1981)
- 7) M.A.Crisfield, "An arc-length method including line searches and accelerations", Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 19, pp. 1269-1289(1983)
- 8) Z. Wu, "Development of computational models for reinforced concrete plate and shell elements", A thesis submitted for the degree of doctor of engineering at the department of civil engineering, Nagoya University, (1989)
- 9) P.G.Bergan, G.Horrigmo, B.Krakeland and T.H.Soreide, "Solution techniques for non-linear finite element problems", Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 12, pp. 1677-1696(1978)