

(99) 脆性材料の亀裂進展に伴うひずみ軟化とその解析

埼玉大学

浜島良吉

三井建設

鈴木隆次

埼玉大学

○ 中島正博

Strain Softening Analysis for Progressive Cracks in Brittle Materials

Ryokichi HAMAJIMA, Saitama University

Takatsugu SUZUKI, Mitsui Construction Co., Ltd

Masahiro NAKAJIMA, Saitama University

ABSTRACT

With regard to the size effect analysis, there are available the method to consider the size effect according to the constitutive equation within the element, and the one to consider it on boundary of the elements. In the analysis of any actual structure, however, it seems that these in- and inter-elemental methods must be used together. The same approaches from similar two angles have been made in the analysis on not only a tensile fracture but a shearing yield. The analysis should also be done using both two methods in these cases. The present analysis method permits it to handle both in- and inter-elemental deformations at the same time and so an analysis utilizing the merits of such two methods to be done. On the other hand, the fracture analysis is also likely to result in snap-back, but, according to the present analysis method, they can be put to a displacement control analysis on the converted coordinate axes after their conversion.

1. はじめに

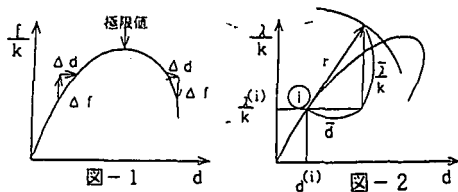
以前からコンクリート構造物等の解析を行う場合には、要素内での亀裂を考慮した分布ひび割れモデル (Smeared Crack Model) または、要素境界での仮想亀裂を考慮した離散ひび割れモデル (Discrete Crack Model) 等の解析手法が用いられてきた。寸法効果に関しても同様に、要素内での構成則において考慮する方法と、要素間で考慮する方法がある。しかしながら、実構造物の解析を行う場合にはこれらを混在して扱う必要があると思われる。また、引張破壊だけでなく、せん断による降伏についても同様に、要素内、要素間の2種類からのアプローチが考えられる。これらに関しても、両者を混在して用いるべきもののように思われる。本解析手法 (以後FESM解析) では、要素内の変形と要素間の変形を同時に扱うことが可能であり、従来から用いられている分布ひび割れモデル、離散ひび割れモデル両手法のメリットを利用した解析が可能である。また、引張破壊挙動についてはスナップバックが生じる可能性を含むが、この問題に関しては座標軸の変換を行い、変換後の座標軸上で変位制御解析を行えば解析可能であると考えられる。

本研究では、スナップバックを伴う解析の際に座標軸を変換して解析を行う場合の定式化を提唱し、また破壊力学から導かれるエネルギー基準を導入したFESM解析が、コンクリート等の脆性材料の解析に有効であるかどうかの検証を行った。

2. 座標軸変換によるスナップバック解析の定式化

2.1 弧長増分法に基づくスナップバック解析

修正増分理論を用いる場合、極限点以前では荷重増分法で可能だが極限点を過ぎた場合には、変位増分法を用いなければならない (図-1)。ただし、スナップバックを伴う場合には、変位増分法でも解くこと



はできない。この場合、次式の弧長条件式を考慮して解析を進めることになる¹⁾。

$$\{\tilde{\alpha}\}^T\{\tilde{\alpha}\} + \left\{\frac{\tilde{\lambda}}{k}\right\}^2 = r^2 \quad \text{ただし、半径 } r \text{ は与えられる} \quad (1)$$

$\tilde{\lambda}$ は荷重パラメータで k は初期剛性であり、修正増分理論での剛性マトリクスを無次元化すると、次式が導き出される。

$$[\bar{K}^{(0)}]\{\Delta d\} - \frac{\Delta \lambda}{k}\{f\} = \frac{1}{k}\{R^{(0)}\} \quad (2)$$

$$\frac{1}{k}\{R^{(0)}\} = \frac{\lambda^{(0)}}{k}\{f\} - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^n \left\{ [B]^T \{\sigma^{(0)}\} dV \right\} \quad (3)$$

式(1)の $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\lambda}$ は図-2に示されるように i 段階の弧長増分出発点からの値であり、原点からの値 d , λ とは区別する。図-1, 2は1次元的な表示をしているが、変位は N 次元の変位増分未知量 $\{\tilde{\alpha}\}$ とする。ここで、式(2)のつり合い式は次式のように分割されている。

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{aa}^{(0)} & \bar{K}_{ab}^{(0)} \\ \bar{K}_{ba}^{(0)} & \bar{K}_{bb}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta d_a \\ 0 \end{Bmatrix} - \frac{\Delta \lambda}{k} \begin{Bmatrix} f_a \\ f_b \end{Bmatrix} = \frac{1}{k} \begin{Bmatrix} R_a^{(0)} \\ R_b^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\text{これより、} [\bar{K}_{aa}^{(0)}]\{\Delta d_a\} - \frac{\Delta \lambda}{k}\{f_a\} = \frac{1}{k}\{R_a^{(0)}\} \quad (5)$$

が導かれる。式(1)は $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\lambda}$ に対して非線形条件式になっており、つり合い式同様 $\Delta \tilde{\alpha}$, $\Delta \tilde{\lambda}$ の増分形式で表す。図-2の i 点を原点として、この弧長増分始点から m ステップ目の状態を Q_m 状態とする。

$$Q_m \text{ 状態の時: } \tilde{\alpha}^{(0)}, \tilde{\lambda}^{(0)} \quad Q_{m+1} \text{ 状態の時: } \tilde{\alpha}^{(0)} + \Delta d, \tilde{\lambda}^{(0)} + \Delta \lambda \quad (6)$$

つり合い式(2)は載荷初期からの値であり、これと区別するために $\tilde{\alpha}^{(0)}$, $\tilde{\lambda}^{(0)}$ としている。式(1)に式(6)を代入すると、

$$\{\tilde{\alpha}^{(0)} + \Delta d\}^T \{\tilde{\alpha}^{(0)} + \Delta d\} + \left\{ \frac{\tilde{\lambda}^{(0)} + \Delta \lambda}{k} \right\}^2 = r^2 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{これより、} & \{\tilde{\alpha}^{(0)}\}^T \{\tilde{\alpha}^{(0)}\} + 2\{\tilde{\alpha}^{(0)}\}^T \{\Delta d\} + \{\Delta d\}^T \{\Delta d\} \\ & + \left(\frac{\tilde{\lambda}^{(0)}}{k} \right)^2 + 2 \frac{\tilde{\lambda}^{(0)}}{k} \frac{\Delta \lambda}{k} + \left(\frac{\Delta \lambda}{k} \right)^2 = r^2 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\{\tilde{\alpha}^{(0)}\}^T \{\Delta d\} + \frac{\tilde{\lambda}^{(0)}}{k} \frac{\Delta \lambda}{k} = \frac{1}{2} \tilde{Q}^{(0)} \quad (9)$$

$$\tilde{Q}^{(0)} = r^2 - \{\tilde{\alpha}^{(0)}\}^T \{\tilde{\alpha}^{(0)}\} - \frac{\tilde{\lambda}^{(0)2}}{k} \quad (10)$$

ただし、2次の微小量を見捨てて解く場合は次式のようにする。

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}^{(0)}] & -\{f\} \\ \{\tilde{\alpha}^{(0)}\} & \frac{\tilde{\lambda}^{(0)}}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta d\} \\ \frac{\Delta \lambda}{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{k}\{R^{(0)}\} \\ \frac{1}{2}\tilde{Q}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ただし、弧長増分点からの最初のステップにおいては $\{\tilde{\alpha}^{(0)}\} = \{0\}$, $\tilde{\lambda}^{(0)} = 0$ であるので、式(11)をそのまま用いることはできないため、第1ステップだけは別途に求める必要がある。

2.2 座標軸変換によるスナップバック解析

1) 制御式

座標変換により、

$$\begin{Bmatrix} \bar{d} \\ \frac{\bar{\lambda}}{k'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ \frac{\lambda}{k'} \end{Bmatrix}$$

これより次式が得られる。

$$\bar{d} = d \cos \theta - \frac{\lambda}{k'} \sin \theta \quad (12)$$

ここで、 $k' = \frac{1}{\tan \theta}$ とする。式(12)は

d, λ に対し線形で式(1)の円弧条件式より扱いが簡単になる。通常の構造では $\alpha < \theta$ となり、

このような解析が可能である。 $k_{max} = k'$ であれば、 $\frac{\bar{\lambda}}{k'} - \bar{d}$ 座標系において $\bar{d}$ によりコントロールすれば、与えられた変位 ($\bar{d}$) に対し荷重 ($\bar{\lambda}$) が一意的に定まる。縦座標を k' で除すのは、式(12)をにおいて変位のディメンジョンにそろえるためである。

$$2) \text{ つり合い式 (増分形) : } [\bar{K}^{(0)}] \{\Delta d\} - \frac{\Delta \lambda}{k} \{f\} = \frac{1}{k} \{R^{(0)}\}, \quad (k \text{ は適当な代表値}) \quad (13)$$

3) 条件式 (増分形) : 式(12)を増分系で表すと、

$$\Delta d_i - \frac{\Delta \lambda}{k'} \tan \theta = \frac{\Delta \bar{d}}{\cos \theta}; \quad (\Delta d_i \text{ は制御点 } i \text{ の変位}) \quad (14)$$

これを式(13)に対応して次式のように書き表すと、

$$[0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0] \{\Delta d\} - \frac{\Delta \lambda}{k'} \tan \theta = \frac{\Delta \bar{d}}{\cos \theta} \quad (15)$$

上式の左辺第一項は、 Δd_i を表す。変位制御点が複数個ある場合、例えば i, j 点 (ただし、同一変位制御とする) の場合には、 $[0, 0, \dots, 1, 1, 0, 0, \dots, 0]$ とする。式(15)は式(9)に対して、次式のように表わされる。

$$[\tilde{d}^{(0)}]^T \{\Delta d\} + \frac{\tilde{\lambda}^{(0)}}{k'} \frac{\Delta \lambda}{k} = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^{(0)} \quad \text{ただし、} [\tilde{d}^{(0)}]^T = [0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0] \quad (16)$$

$$\frac{\tilde{\lambda}^{(0)}}{k} = \frac{k}{k'} \tan \theta, \quad \therefore \tilde{\lambda}^{(0)} = \frac{k^2}{k'} \tan \theta = \left(\frac{k}{k'}\right)^2 \quad (17)$$

$$\text{また、} \frac{1}{2} \tilde{Q}^{(0)} = \frac{\Delta \bar{d}}{\cos \theta} \quad (18)$$

とする。このように式(11)は座標変換によるスナップバック解析の場合にもそのまま使用することができる。

$$\begin{Bmatrix} [\bar{K}^{(0)}] & -\{f\} \\ [\tilde{d}^{(0)}]^T & \frac{\tilde{\lambda}^{(0)}}{k} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta d\} \\ \frac{\Delta \lambda}{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{k} \{R^{(0)}\} \\ \frac{1}{2} \tilde{Q}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

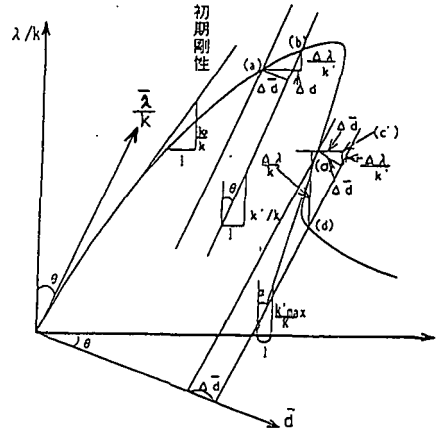


図-3 座標変換

式(19)の連立方程式を解けば、元の直交座標系 $d, \frac{\lambda}{k}$ 系における変位 $\{d\}$, 荷重 $\{\lambda\}$ を求めることができる。ただし、式(19)は非対称マトリクスを解くことになるので、その代わりに逐次的な解析を行うことにより、つり合い式を解く既存のプログラムをそのまま使用することができる。

3. 本解析の目的

本解析の目的は、無筋コンクリートを対象にしたひずみ軟化解析を行い、引張破壊挙動、特に塑性後の挙動を調べることに主眼をおいている。これまで著者らはこれらの解析手法として、供試体に亀裂が生じるとその部分の応力を解放する方法、すなわち強度基準を導入した解析を用いてきたが、コンクリートなどの脆性材料では、エネルギー基準を導入した解析手法を用いる方がより正確である。この時に用いられるひずみ軟化曲線には、一直線モデル、Bi-Linearモデル、3乗モデルなどがある。本解析手法であるFESM解析²⁾では、要素間の亀裂・開口を簡単に表現できるため、要素間剛性にこれらのモデルを組み込んだコンクリート供試体の引張破壊挙動の解析を行った。

3. 1 解析手法

本解析では内田ら⁹⁾の行った解析と同一モデルを用いて、精度のチェックを行うことにする。メッシュ図及び境界条件を図-4に示し、諸物性値を以下のようにする。供試体寸法は、断面10×10cm、載荷スパン30cmである。コンクリートの物性値は、引張強度30kgf/cm²、破壊エネルギー0.1kgf/cm、弾性係数3.0×10⁴kgf/cm²、ひずみ軟化曲線は1/4モデルを使用し、平面応力状態で解析をしている。ただし、FESM解析の特徴として弾性域では有限要素法に近づけ、塑性域では剛体バネモデル(RBSM解析)に近づけるために、弾性係数を弾性時には10⁵倍し(E×10⁵)、塑性域ではそれを元に戻す作業(E)を行っている。荷重は鉛直下向きに変位荷重を与え、変位制御で行っている。解析の精度を比較するために、要素分割・物性値なども内田らが行っているモデルをそのまま用いた。また、内田らと同様に供試体には亀裂の局所化を行った。従来、無筋コンクリートの亀裂進展挙動に関する研究では、その多くが供試体中央部に切り欠きを設け、あらかじめ亀裂が局所的に進展するようになされているが、本解析では内田らと同様に切り欠きを設定せず、亀裂が供試体中央部分だけに発生する処理をした。

本解析では全モデルでの解析を行っている。半モデルで解析を行う場合には、対変位を実際の半分の値にして、ひずみ軟化曲線を用いなければならない。すなわち、対称性を考慮したモデルの解析を行う場合には、対称軸に沿って進展する亀裂部分と一般部分に発生する亀裂とは異なった処理をしなければならないのである。

本解析中、非線形解析手法として山田の増分法(r_{min}法)を用いている。この方法は、各増分段階で要素または要素間を1つずつ降伏させていき、それら要素・要素間を降伏させるのに必要な最小の増分量を定める方法である。この方法では、要素・要素間の降伏を各ステップ毎に追従することができるという利点を持つが、降伏した要素・要素間の剛性が変化することから、毎ステップ剛性行列を作成して解かなければならないために、かなりの解析時間を要するという欠点も持つ。

3. 2 解析結果及び考察

亀裂が生じた部分の応力-開口幅図(図-5)を見ると、従来のBi-Linear1/4直線を正確に表現できていることがわかる。また、変形図及び亀裂図を図-6(a)、図-6(b)、図-7に示す。

本解析の目的は、このFESM解析が近年コンクリート解析に急速に用いられている分布ひび割れモデル(Smeared Crack model)と同様の解析ができるかの比較検討を行うことにあった。精度の比較参考として用いた内田らの解析は分布ひび割れモデルを用いた解析であるが、本研究の結果から得られた図-8の荷重-変位曲線から検討すると、曲線の形状、ピーク時の最大荷重値、変位量がそれぞれ内田らの解析結果と

一致するという結論を得た。すなわちこれは、FESM解析が分布ひび割れモデルと同様の解析が可能であることを証明している。しかし、これはあくまでも数値解析値との比較であり実験値との比較でない。そのため、実際に行われた実験値に対してFESM解析の比較検討を行う必要がある。本研究は座標軸変換によるスナップバック解析の定式化と、FESM解析の精度の確認を行ったにとどまる。

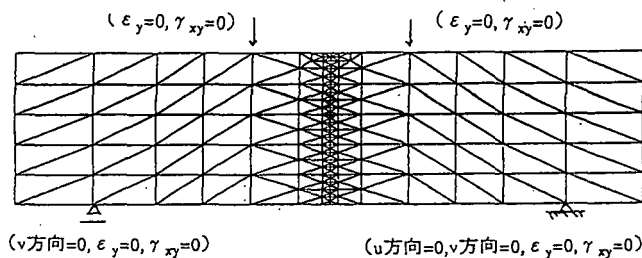


図-4 メッシュ分割図及び境界条件

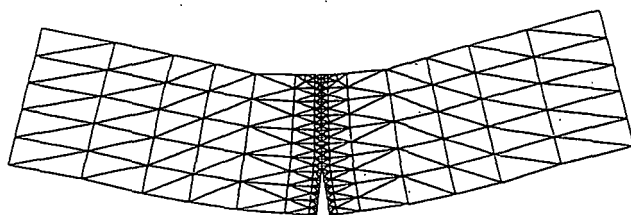


図-6(a) 変形図 (荷重ピーク時 10000倍)

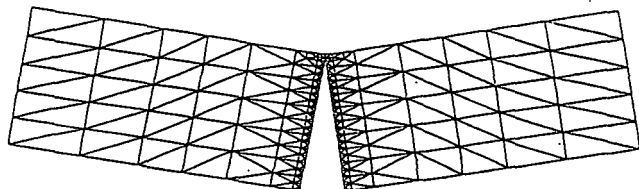


図-6(b) 変形図 (最終変形 20倍)

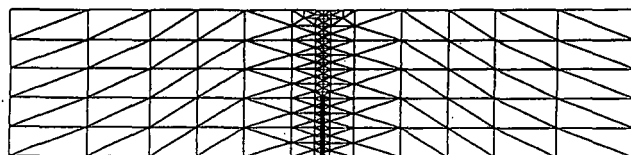


図-7 荷重ピーク時の亀裂図

(参考文献)

- 1) 半谷裕彦: "4 数値解析法と数値解析例", 有限要素法ハンドブックⅡ 培風館, pp150-169.
- 2) 浜島良吉・中井仁彦・鈴木隆次・長島正成: 要素変形を考慮した不連続体解析の精度について, 第26回岩盤シンポジウム, 1995.
- 3) 内田裕市・六郷恵哲・小柳: 仮想ひび割れモデルを組み込んだ分布ひび割れモデルによるコンクリートのひび割れの有限要素解析, 土木学会論文集 No. 466/V-19, pp. 79-88, 1993-5.

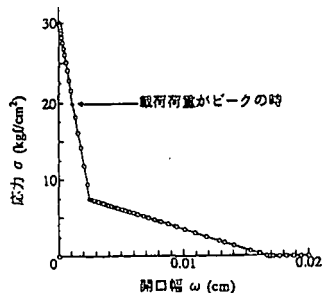


図-5(a) 亀裂部分の応力-開口幅曲線
(供試体1 下部の亀裂部分)

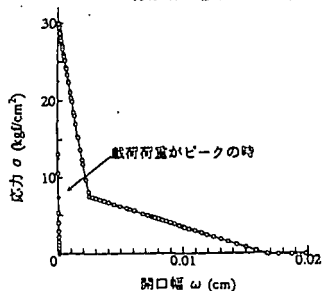


図-5(b) 亀裂部分の応力-開口幅曲線
(供試体1 中心での亀裂部分)

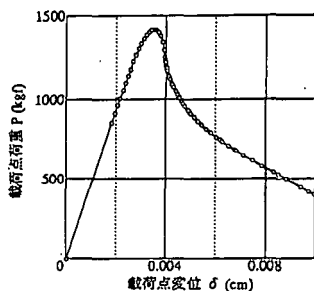


図-8 載荷点における荷重-変位曲線