

(98) 3次元流動要素法解析とその適用

鳥取大学工学部 木山 英郎 西村 強
鳥取大学大学院 戸田 博人
清水建設(株) 長谷川 誠 淵本 正樹

Formulation of a Three-dimensional Flow Element Method

Hideo KIYAMA, Tsuyoshi NISHIMURA Tottori University
Hirohito TODA Graduate Student Tottori University
Makoto HASEGAWA, Masaki FUCHIMOTO Shimizu Corporation

Abstract

A three-dimensional Flow Element Method (3D-FLEM) is formulated in this paper. We have already reported some geotechnical applications of FLEM in two-dimension. FLEM is a way to simulate large deformation problems of a continuum. It has adopted the explicit-time-iterative scheme to solve the equation of motion, which is the basic procedure of Distinct Element Method(DEM). FLEM also has introduced FEM (Finite Element Method) techniques to equate forces acting on nodal points due to elastic deformation of elements.

A brick-type element with 8 nodal points is introduced to formulate the 3D-FLEM. In case of analyzing large deformation problems, we have to consider for the geometric non-linearity. The 3D-FLEM computer program provides routines for the geometric stiffness matrices based on the rate type principle of virtual work. Finally numerical test examples are presented in this paper.

1. はじめに

近年、有限要素法(FEM)をはじめとして数値解析によって、岩盤・地盤の挙動を解明しようとする研究が多く報告されている。かつては、時間と労力の制約により、2次元解析や疑似3次元解析として3次元解析を模擬しようとする工夫などが行なわれてきた。しかしながら、実際の地形、地盤条件あるいは荷重状態を2次元に置き換えてモデル化することには、場合によっては無理が生ずると考えられる。また、2次元解析が安全側の結果を与える、あるいは3次元解析でなければ再現できないような変形挙動や局所的な現象など、3次元解析への要求は高まってきている。このような時代の要請は、計算機の高速度・小型化あるいは演算用プログラミング言語の効率化など、ハード・ソフト両面の進歩によって実現されつつある。

流動要素法(FLOW Element Method, FLEM)[1]は、個別要素法(DEM)[2]の基本となっている運動方程式の陽形式時間差分による逐次解法を活かし、各要素の自由な変形を許しながら、要素間の連続性を保持し、全体としての大変形から流動までを解析できる手法の開発を目指したものである。FLEMでは、節点速度からの領域のひずみ増分の計算、領域内応力から節点力の算定にFEMの概念・手法を取りいれており、定式化の明瞭さ、

解法の汎用性は言うまでもなく、従来より培われて来た手順の導入も容易で実用性も高いと考えている。

本研究では、上記した背景のもとに、流動要素法の3次元大変形成解析への発展を試みたものである。本文では、まず、立体要素を導入した3次元解析の手順を示す。続いて、試験的に作成した3次元FLEMプログラムによる曲げ問題とせん断問題の解析結果を示す。

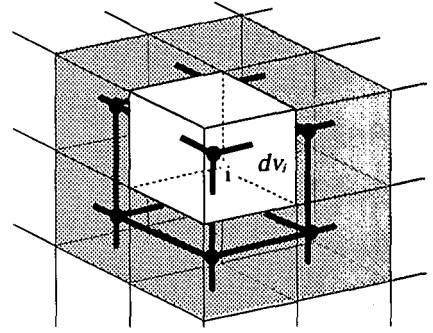


図-1 要素分割のイメージ

2. 3次元流動要素法の概要

2.1 要素分割と運動方程式

図-1は、要素分割のイメージを表している。解析手順の骨格は、報告している2次元解析と同様であるので、ここでは主たる式のみ示した概略説明に留める。

与えられた物体を図-1に示すように有限個の小領域 dv_i に分割し、各領域を質量を付した質点で代表させる。与えられた境界条件のもとに、各質点 i （質量 m_i ）は周辺領域の変位抗力（剛性 K_i ）や速度抗力（粘性 η_i ）のもとに、式(1)で示される運動方程式に従って移動すると考える。

$$\begin{aligned} m_i \ddot{u}_i + \eta_i \dot{u}_i + K_i u_i &= m_i g_x + f_{x,i} \\ m_i \ddot{v}_i + \eta_i \dot{v}_i + K_i v_i &= m_i g_y + f_{y,i} \\ m_i \ddot{w}_i + \eta_i \dot{w}_i + K_i w_i &= m_i g_z + f_{z,i} \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 (g_x, g_y, g_z) は重力加速度、 $(f_{x,i}, f_{y,i}, f_{z,i})$ は質点に直接作用する外力である。

連続体の変位抗力や速度抗力を具体化するに際し、新たに図-1の太線に示すように質点を要素節点とする要素分割を導入し、質量領域 dv_i のイメージはすべて節点 i に集約し、以下において節点 i の運動とそれに対する周辺要素の抗力として式(1)を用いる。

任意の節点 i を囲む要素 e^j が各節点の変位に伴って変形するとき、節点 i に生じる変位抗力を節点力と呼び、 $(F_{x,i}, F_{y,i}, F_{z,i})$ と書けば、式(1)は次式ようになる。

$$\begin{aligned} m_i \ddot{u}_i + \eta_i \dot{u}_i + F_{x,i} &= m_i g_x + f_{x,i} \\ m_i \ddot{v}_i + \eta_i \dot{v}_i + F_{y,i} &= m_i g_y + f_{y,i} \\ m_i \ddot{w}_i + \eta_i \dot{w}_i + F_{z,i} &= m_i g_z + f_{z,i} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで微小時間 Δt の間の移動を考えると、式(2)を時間増分 Δt で差分表示し、加速度 $\ddot{u}$ 、 $\ddot{v}$ 、 $\ddot{w}$ を未知数として次式が求められる。

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i &= \left(g_x + \frac{f_{x,i}}{m_i} - \frac{F_{x,i}}{m_i} \right) - \frac{1}{m_i} \Delta F_{x,i} - \frac{\eta_i \Delta u_i}{m_i \Delta t} \\ \ddot{v}_i &= \left(g_y + \frac{f_{y,i}}{m_i} - \frac{F_{y,i}}{m_i} \right) - \frac{1}{m_i} \Delta F_{y,i} - \frac{\eta_i \Delta v_i}{m_i \Delta t} \\ \ddot{w}_i &= \left(g_z + \frac{f_{z,i}}{m_i} - \frac{F_{z,i}}{m_i} \right) - \frac{1}{m_i} \Delta F_{z,i} - \frac{\eta_i \Delta w_i}{m_i \Delta t} \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 $(\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta w_i)$ は Δt 間の節点 i の変位であり、 $(\Delta F_{x,i}, \Delta F_{y,i}, \Delta F_{z,i})$ はそれに対応する節点力の増分である。同式において、右辺第一項の $()$ 内の計算は、初期値を $(g_x + f_{x,i}/m_i, g_y + f_{y,i}/m_i, g_z + f_{z,i}/m_i)$ とおき、毎回得られる $(-\Delta F_{x,i}/m_i, -\Delta F_{y,i}/m_i, -\Delta F_{z,i}/m_i)$ をこれに加算していけば自動的になされる。

式(3)から、各質点の加速度が求まれば、それを用いて順次次回の Δt 増分における速度、変位増分が計算さ

れ、節点座標が更新される。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_i &:= \dot{\mathbf{u}}_i + \ddot{\mathbf{u}}_i \Delta t \\ \dot{\mathbf{v}}_i &:= \dot{\mathbf{v}}_i + \ddot{\mathbf{v}}_i \Delta t \\ \dot{\mathbf{w}}_i &:= \dot{\mathbf{w}}_i + \ddot{\mathbf{w}}_i \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_i &:= \dot{\mathbf{u}}_i \Delta t \\ \Delta \mathbf{v}_i &:= \dot{\mathbf{v}}_i \Delta t \\ \Delta \mathbf{w}_i &:= \dot{\mathbf{w}}_i \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_i &:= \mathbf{x}_i + \Delta \mathbf{u}_i \\ \mathbf{y}_i &:= \mathbf{y}_i + \Delta \mathbf{v}_i \\ \mathbf{z}_i &:= \mathbf{z}_i + \Delta \mathbf{w}_i \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

2.2 剛性マトリックスと要素応力増分

節点の変位増分 ($\Delta \mathbf{u}_i$, $\Delta \mathbf{v}_i$, $\Delta \mathbf{w}_i$) に対応する節点力増分 ($\Delta \mathbf{F}_{xi}$, $\Delta \mathbf{F}_{yi}$, $\Delta \mathbf{F}_{zi}$) の計算には、FEMの手法を利用する。節点*i*に関係する周辺8要素の中の任意の要素*j*について、節点*i*の節点力増分は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F}_{xi}^j \\ \Delta \mathbf{F}_{yi}^j \\ \Delta \mathbf{F}_{zi}^j \end{Bmatrix} = [\mathbf{K}_i^j] [\Delta \mathbf{u}_i^j, \Delta \mathbf{v}_i^j, \Delta \mathbf{w}_i^j, \dots, \Delta \mathbf{u}_8^j, \Delta \mathbf{v}_8^j, \Delta \mathbf{w}_8^j]^T \quad (7)$$

ここに、 $[\mathbf{K}_i^j]$ は要素*j*の変形とともに、 Δt ごとに变化する要素の剛性マトリックスの節点*i*に關与する(3行×24列)の部分マトリックスである。

微小変形理論では、剛性マトリックスは要素内で仮定した変位関数と材料の力学的特性を表す構成式によってのみ決まる。したがって、要素の位置の変化や物体の形状変化など幾何学的非線形性の影響は受けず、無視することが可能であるが、一方、大変形や大ひずみ問題の場合、微小変形の積み重ねであっても幾何学的非線形性を考慮して初めて、正しい定式化が行われたとされる[3]。

大変形や幾何学的に非線形な問題を取り扱う場合も、Lagrangeの応力 $\{\mathbf{s}\}$ およびその変化率 $\{\dot{\mathbf{s}}\}$ を用いれば、仮想仕事の原理の表示式は微小変形の場合とまったく同じに書ける。なぜなら、Lagrange応力が変形前の断面積当りに、しかも面に作用する力を空間固定の座標軸方向に分解して得られる成分からなるものとして定義されているからである。

$$\int_V \{\delta \dot{\mathbf{e}}\} \{\dot{\mathbf{s}}\} dV = \int_V \{\delta \dot{\mathbf{u}}\} \{\dot{\bar{\mathbf{X}}}_0\} dV + \int_{S_F} \{\delta \dot{\mathbf{U}}\} \{\dot{\mathbf{F}}_0\} dS \quad (8)$$

ここに、 $\{\dot{\bar{\mathbf{X}}}_0\}$: 体積力 $\{\bar{\mathbf{X}}_0\}$ の変化率 (時間微分, 以下同じ), $\{\dot{\mathbf{F}}_0\}$: 境界面 S_F 上で与えられた外力 $\{\mathbf{F}_0\}$ の変化率, $\{\delta \dot{\mathbf{u}}\}$: 仮想変位速度, $\{\delta \dot{\mathbf{U}}\}$: S_F 上における $\{\delta \dot{\mathbf{u}}\}$ の値, $\{\delta \dot{\mathbf{e}}\}$: $\{\delta \dot{\mathbf{u}}\}$ から導かれる仮想速度勾配,

客観応力速度として、次に示すEuler応力のJaumann速度を用いる。

$$\dot{[\sigma]} = [\dot{\sigma}] - [\dot{\omega}] [\sigma] + [\sigma] [\dot{\omega}] \quad (9)$$

$$= [\dot{\mathbf{s}}] + [\dot{\epsilon}] [\sigma] + [\sigma] [\dot{\omega}] + (\dot{\rho}/\rho) [\sigma] \quad (10)$$

ここに、 $[\dot{\omega}]$ は回転速度マトリックスであり、次のようになる。

$$[\dot{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\omega}_z & \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z & 0 & -\dot{\omega}_x \\ -\dot{\omega}_y & \dot{\omega}_x & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

(10)を(8)に代入し、整理すると次式となる。式の誘導、各項の詳細については、文献[3][4]に譲る。

$$\begin{aligned} \Sigma ([\mathbf{k}] + [\mathbf{k}_e] + [\mathbf{k}_s] + [\mathbf{k}_c]) \{\dot{\mathbf{u}}\} &= \Sigma \int_e [\mathbf{N}]^T [\dot{\bar{\mathbf{X}}}] dV \\ &+ \int_{S_F} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_x - \mathbf{F}_x \dot{\omega}_z + \mathbf{F}_z \dot{\omega}_x & \dot{\mathbf{F}}_y + \mathbf{F}_y \dot{\omega}_z - \mathbf{F}_z \dot{\omega}_y & \dot{\mathbf{F}}_z - \mathbf{F}_z \dot{\omega}_x + \mathbf{F}_x \dot{\omega}_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix} dS \end{aligned}$$

$$+ \int_{S_F} \{F_s, F_t, F_n\} \begin{Bmatrix} s \\ t \\ n \end{Bmatrix} d\dot{S} \quad (12)$$

$$[k] = \int [B_s]^T [D] [B_s] dV; \text{要素剛性マトリックス} \quad [k_G] = \int [B_s]^T [\dot{D}_K] [B_s] dV; \text{幾何剛性マトリックス}$$

$$[k_s] = \int [B_s]^T [D_s] [B_s] dV; \text{幾何剛性マトリックス} \quad [k_c] = - \int [N]^T [\bar{D}_s] [B_s] dV; \text{荷重補正マトリックス (体積力)}$$

$$\int [N]^T [\hat{X}] dV; \text{荷重増分項 (体積力)} \quad \int_{S_F} dS, \int_{S_F} d\dot{S}; \text{荷重増分項や荷重補正項 (表面力)}$$

ここに、 $\{s, t, n\}$ は物体表面 dS 上における接線および法線方向の単位ベクトルである。

節点力の算出に際しては、要素剛性マトリックス $[k]$ に加えて幾何剛性マトリックス $[k_G]$, $[k_s]$ を導入すればよい ($[k_c]$ を無視できる場合)。式(12)より式(7)に定義した剛性マトリックスは

$$[K_{ii}] = [k_i] + [k_{Gi}] + [k_{si}] \quad (13)$$

下添字 i は、(12)式より節点 i に関する成分のみを対象としていることを示す。

さらに、密度変化、表面力の回転が問題となるときは、上に示したその他の補正項を考慮すればよい。図-2に示す8節点六面体要素を用いており、式(8)の積分はGaussの $2 \times 2 \times 2$ 点積分を用いれば良い。

節点 i の節点力増分は、節点 i に関与するすべての要素 j について式(7)の和として次式で求まる。

$$\Delta F_{xi} = \sum_{j=1}^8 \Delta F_{xi}^j, \quad \Delta F_{yi} = \sum_{j=1}^8 \Delta F_{yi}^j, \quad \Delta F_{zi} = \sum_{j=1}^8 \Delta F_{zi}^j \quad (14)$$

また、式(9)に見られるように、応力増分 $[\Delta \sigma] (= [\dot{\sigma}])$ は回転増分 $[\Delta \omega] (= [\dot{\omega}])$ による補正項が追加されて、次のようになる。

$$[\sigma] := [\sigma] + [\Delta \sigma] - [\Delta \omega][\sigma] + [\sigma][\Delta \omega] \quad (15)$$

3. 解析例

以上述べてきた手順に沿って作成したプログラムを検討するため、図-3に示すようなモデルを設定した。初期状態において各要素は1辺2mの正六面体であり、解析領域は512要素からなり、全節点数は729である。ひずみ増分に対するヤング率、ポアソン比を一定として、 $E=10(\text{MPa})$ 、 $\nu=0.3$ を仮定し、安定した解を得るため、時間増分 $\Delta t=2.5 \times 10^{-3}(\text{sec})$ とした。体積力は考慮していない。

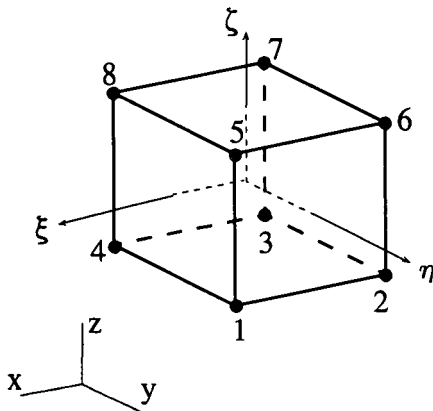


図-2 8節点六面体要素

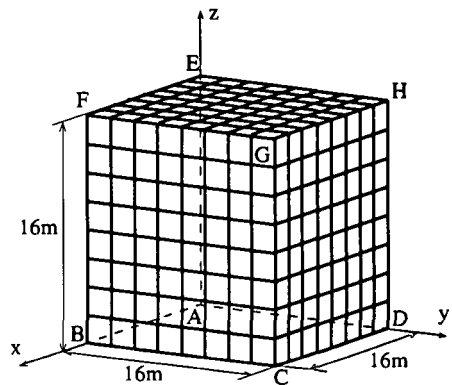


図-3 解析モデル

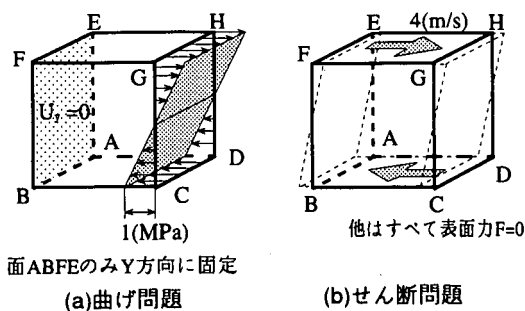


図-4 解析条件

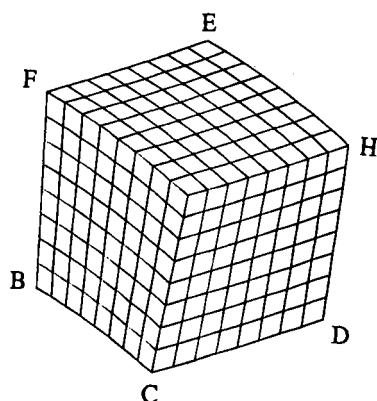


図-5 曲げ問題の解析結果

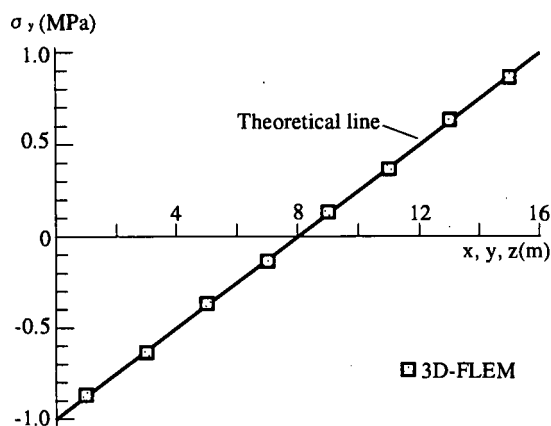


図-6 解析領域内の応力状態

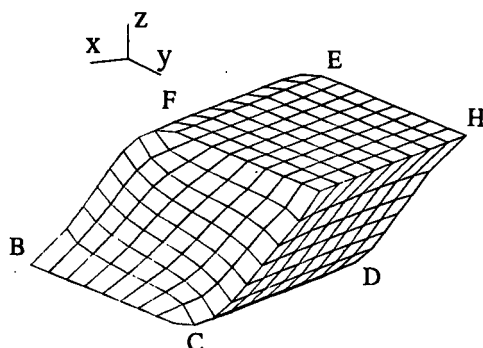


図-7 せん断問題の解析結果

解析は、図-4(a)のように面ABFEをy方向に固定し、面DCGHに荷重をかける曲げ問題と同(b)のように面ABCDを-y方向へ、面EFGHを+y方向へ、両者の距離を保持したまま、一定速度($\dot{\delta}=4\text{m/s}$)で変位させるせん断問題とした。

図-5に(a)の場合の変形後の様子を示した。また、図-6には、頂点AとGを結ぶ対角線上要素の重心位置における σ_y の値を弾性解との比較として示した。図-7は、(b)の場合の変形の様子($\gamma_{xz}=100\%$)を示している。両結果とも概ね良好な結果となっている。ここでは、ごく基礎的な結果しか示していないが、今後、実的な問題に適用を続けていく予定である。

参考文献

- [1] 木山英郎他：連続体の大変形解析のための流動要素法(FLEM)の提案，土木学会論文集，No.439/III-17，pp.63-68，1991.12.
- [2] Cundall, P.A. : Rational Design of Tunnel Supports - A Computer Model for Rock Mass Behavior Using Interactive Graphics for the Input and Output of Geometrical Data, Technical Report MRD-2-74, Minnsouri River Division, U. S. Army Corps of Engineers, 1974.
- [3] 鷲津久一郎他編：有限要素法ハンドブック II 応用編，pp.270-301，1983.1.
- [4] 木山英郎他：流動要素法(FLEM)における有限要素法を利用した節点力・要素応力増分過程の見直し，第28回土質工学会研究発表会講演集，pp.1497-1500，1993. 6.