

(97) 要素変形を考慮した不連続体解析の精度について

埼玉大学 ○浜島良吉・三井建設(株) 鈴木隆次
情報数理研究所 中井仁彦 埼玉大学 長島正成

Precision of Discontinuous Analysis Method Considering Elemental Deformation (FESM)

Ryokichi HAMAJIMA, Saitama University
Takatsugu SUZUKI, Mitsui Construction Co., Ltd
Yoshihiko NAKAI, Info. and Math. Sci. Lab., Inc.
Masanari NAGASHIMA Saitama University

Abstract

FESM is the discontinuous analysis method which can both takes into account the intra-elemental deformation and inter-elemental elastic deformation, slip and tensile failure. In FESM, the function of intra-elemental deformation is expressed in terms of rigid body displacement at the center of gravity of the element and of uniform intra-element strain, and there is no restriction on the shape of the element that can be used in FESM. Because the inside of an element is considered as a uniform strain field, in case polygonal element is used in the two-dimensional analysis or polyhedral element in the three-dimensional analysis, the method fails to accurately express the elemental deformation; this leads to decreased analysis precision and the fact that no restriction is imposed on the element shape will have no benefit. An attempt was therefore made to minimize the decrease in the analysis precision by adjusting the distribution of ratios of intra- and inter-element stiffness.

1. はじめに

FESMは要素内の変形を考慮し、かつ要素境界での弾性変形、降伏による滑りおよび引張り破壊による亀裂の発生を扱うことが可能な不連続体解析手法である。FESMでは要素内の変位関数を、要素重心の剛体変位と要素内の一様ひずみで表現しており、使用可能な要素の形状に制約が無い。しかし要素内を一様ひずみ場としているため、2次元解析において3角形要素を用いた場合または3次元解析において4面体要素を用いた場合で、かつ要素境界の剛性を無限大に近づけた場合にのみ、有限要素法と一致する解が得られる。2次元解析で多角形要素を用いたり、3次元解析で多面体要素を用いた場合には、要素の変形を正確に表現することができず、解析精度が低下するため、要素形状に制約が無いという利点を生かすことができない。そこで、要素内および要素境界での剛性の比率の配分を調整することにより、解析精度の低下を最小限に抑えることを試みた。以下にその結果を示す。

2. 多角形要素に対する変位場の近似

2次元場での多角形要素と3次元場での多面体要素の取扱いは基本的には同じである。ここでは2次元場における考察を行う。

2.1 精度に対する検討

2次元解析において三角形定ひずみ要素の変位関数は次式で与えられる。

$$u = a_1 x + b_1 y + c_1$$

$$v = a_2 x + b_2 y + c_2$$

(1)

$a_1 \sim c_2$ の未知定数は、要素重心の剛体変位 $\{u_c\}_{(e)} = \{u \ v \ \theta\}^T$ 、および要素内ひずみ $\{\epsilon\}_{(e)} = \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy}\}^T$ を用いて表すことができるので、式(1)の要素内変位 $\{U\} = (u \ v)^T$ は次のようになる。

$$\{U\} = [N_u]\{u_c\}_{(e)} + [N_\epsilon]\{\epsilon\}_{(e)}$$

(2)

要素内変位を剛体変位 $\{u_c\}_{(e)}$ と一様ひずみ $\{\epsilon\}_{(e)}$ で表すことにより、通常の有限要素法のように隣接要素との連続性の必要性がなくなる。隣接要素との相対変位 $\{\delta\}$ は2つの要素の対に対して定義され、

$$\{\delta\} = [B_{du}]\{u_c\}_{(e)} + [B_{d\epsilon}]\{\epsilon\}_{(e)}$$

(3)

で与えられる。変位関数を式(2)で表現する事により要素形状に関しては三角形である必要はなくなる。ただし多角形要素へ拡張した場合、厳密な意味で要素の変形を表現することはできない。これに関して次の対処方法が考えられる。

- ①高次の変形モードを追加する。
- ②多角形要素を3角形要素に再分割する。
- ③要素間・要素内の剛性の配分を調整して近似的に変形場を表す。

①は式(1)が表す変位場に $\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y$ の変位場を重ね合わせ、変位場を次式として解析する方法である。

$$\begin{aligned}\bar{u} &= a_1 x + b_1 y + c_1 + \bar{\varepsilon}_x (x - x_G) (y - y_G) \\ \bar{v} &= a_2 x + b_2 y + c_2 + \bar{\varepsilon}_y (x - x_G) (y - y_G)\end{aligned}\quad (4)$$

しかし高次のひずみ項を付け加えても、多角形要素の変位場を十分表現できる保証はない。したがって実用性・精度の点から①は適当とはいえない。②の方法で、一旦ボロノイ分割された要素を三角形に再分割することは、構造中にボロノイ多角形を含んでおり、地震断層の挙動を解析するような場合において有効となると考えられる。しかし、多角形を三角形に再分割することから要素数が増大する欠点を有する。そこで以下の項で③の方法について検討した。

2.2 要素間・要素内剛性の配分調整

図1に示すように要素1、2を考え、要素2の上端面にせん断応力 τ が作用した場合を考える。ここではせん断場のみを考慮するが垂直応力の場合も同様である。

要素1、2の高さを h_1, h_2 、せん断剛性を G_1, G_2 とし、せん断変位をそれぞれ δ_1, δ_2 とする。全せん断変位を δ とし、全体の等価せん断剛性を G とすれば次式が成り立つ。

$$G = \frac{h G_1 G_2}{h_1 G_2 + h_2 G_1} \quad (\text{ここに } h = h_1 + h_2) \quad (5)$$

図1において要素境界部のせん断剛性を G_0 とし、要素境界部でのせん断変位を δ_0 とする。ここで要素1、2の要素内剛性を α 倍し、要素境界の剛性を β 倍する。

$$\tau = \alpha G_1 \gamma_1 = \frac{\alpha G_1}{h_1} \delta_1 \rightarrow \delta_1 = \frac{\tau}{\alpha G_1 / h_1} \quad (6)$$

$$\tau = \alpha G_2 \gamma_2 = \frac{\alpha G_2}{h_2} \delta_2 \rightarrow \delta_2 = \frac{\tau}{\alpha G_2 / h_2} \quad (7)$$

$$\tau = \beta G_0 \gamma_0 = \frac{\beta G_0}{h} \delta_0 \rightarrow \delta_0 = \frac{\tau}{\beta G_0 / h} \quad (8)$$

全体のせん断変形 δ は $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_0$ で表されるから

$$\frac{h}{G} = \frac{h_1}{\alpha G_1} + \frac{h_2}{\alpha G_2} + \frac{h}{\beta G_0} \quad (9)$$

$G = G_0$ とすれば次式を得る。

$$\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) h = \left(\frac{h_1}{\alpha G_1} + \frac{h_2}{\alpha G_2}\right) G = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{h_1 G_2 + h_2 G_1}{G_1 G_2}\right) \frac{h G_1 G_2}{h_1 G_2 + h_2 G_1} \quad (10)$$

これより

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta - 1} \quad (11)$$

$\beta = 1$ とおけば $\alpha = \infty$ となり、これは要素内剛性を剛とした剛体バネモデル (RBSM) に対応する。また、 $\beta = \infty$ とすれば $\alpha = 1$ となり、これは要素間剛性を剛とした解に対応する。表1に α, β の設定と通称との対応を示す。

3. 数値解析結果

図2はメッシュ分割タイプ、荷重タイプおよび拘束条件を示す。載荷荷重はいずれの場合も合力が1 kgfである。また、平面ひずみ場とし、物性値はヤング係数 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$, $\nu = 0.3$ とする。

図3は四角形2要素モデル ($E = 10^6 \text{ kgf/cm}^2$, $\nu = 0.3$) と要素内、要素間剛性の変化による理論解に対する

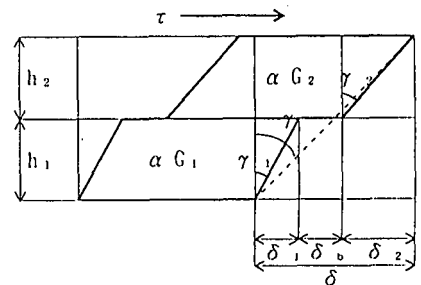


図1 2要素のせん断

表1 要素内・要素間剛性の配分

α (要素内)	β (要素間)	通称
∞	1.0	lim RBSM
2.0	2.0	FESM2
1.11	10.0	FESM10
1.0	∞	lim FESM

誤差である。F E S M 1 0 では誤差はほとんど 0 であるが、 $\beta=1.0$ すなわち $\alpha=\infty$ (lim RBSM) においては約 10% の誤差となる。

図 4 は三角形要素モデルに集中荷重が作用した場合であり (a) lim FESM による要素数の変化と表面の変形状態、(b) lim FESM による要素数の変化と集中荷重載荷点沈下量、(c) 60 要素の場合における剛性の配分の変化と表面の変形状態の比較、(d) 剛性の配分の変化に対する精度を示したものである。弾性解析においては集中荷重作用点の変位は特異点であり (b) に示されるような変化を示す。(d) においては要素数 60, 400 の場合について F E M に対する比較を行っている。この場合 F E M の解は三角形要素においては lim FESM ($\beta=10^5$) の解に一致することを確認しているので、実際には lim FESM との比較を行っている。ここで F E S M 1 0 では誤差は 2 ~ 3 % であるが、 $\beta=1.0$ においては要素数 4 0 0 の場合 1 5 % 程の誤差を示す。ただし、要素数 6 0 の場合には誤差は殆ど見受けられない。これより lim RBSM においては要素数を増加しても必ずしも精度が向上するとは限らないといえる。

図 5、6 は同じ三角形要素モデルに等分布荷重、端部等分布荷重が作用した場合であり、図 4 と同様な比較を行っている。ここでも F E S M 1 0 においては誤差は 2 ~ 3 % 以内である。これより三角形要素においては F E S M 1 0、すなわち要素間剛性、要素内剛性をそれぞれ 10^1 倍および 1.11 倍したもので十分な精度が得られるといえよう。三角形要素では、厳密解との比較から、最も厳しい集中荷重を含めて検討を行ったが、以後は実用的に十分と考えられる等分布荷重および端部分布荷重での検討を行うことにする。

図 7 (a) は四角形 1 0 0 要素の等分布荷重載荷時の剛性の配分の変化と表面の変形状態であり、(b) は四角形 1 0 0 要素とボロノイ多角形 8 0 要素の等分布載荷時の要素間剛性の配分の変化による誤差を示している。誤差は近似的に三角形 6 0 要素の lim FESM に対しての誤差として計算している。F E S M 1 0 では誤差は 2 ~ 3 % 程度であるが、 $\beta=1$ ($\alpha=\infty$) においては約 1 0 % 程の誤差を生じている。

図 8 は四角形要素およびボロノイ多角形要素の端部分布荷重時に対するものであるが、(c)、(d) で明らかに、要素間剛性を大きくした lim FESM ($\beta=\infty$) においては表面の沈下は均一となり、正しい変形場を与えていない。これは式 (1) で表される変位関数が三角形要素に対するものであり多角形要素の変位場を正しく表現していないことを示している。(e) は四角形 1 0 0 要素とボロノイ多角形 8 0 要素の剛性の配分の変化による誤差を示したものである (ただし等分布荷重載荷と同様に三角形 6 0 要素の lim FESM (端部分布荷重) に対する誤差として示している。これは、図 6 (b)、および図 8 (b) で明らかのように端部分布荷重載荷においては要素分割の依存性が少なく、近似的に三角形 6 0 要素のもので代表できるものとした)。これによれば、F E S M 1 0 では誤差は 2 ~ 3 % 以内であるが lim RBSM ($\beta=1$) においては四角形 1 0 0 要素で 1 0 % 弱、ボロノイ多角形 8 0 要素で 2 0 % 弱の誤差を有する。これに対し、要素間の剛性を大きくすることにより誤差は急速に大きくなり lim FESM ($\beta=\infty$) においては誤差は 6 0 % にも達する。

4. まとめ

- (1) 2 次元場において F E S M は、三角形要素に対する定ひずみ変位関数を用いているので、多角形要素を使用した場合は要素の変位場を厳密には満足することができない。そこで、要素内・要素間の剛性にそれぞれ剛性倍率 α 、 β をかけることにより (ただし $\alpha=\beta/(\beta-1)$) 全体としての等価な剛性を得ることを試みた。これにより F E S M 1 0 ($\alpha=1.11$ 、 $\beta=10$) により解析すれば多角形要素においても数% 以内の誤差で変位を求めることができることが明かとなった。
- (2) 要素間剛性を大きくした場合 (lim FESM; $\alpha=1$ 、 $\beta=\infty$)、三角形以外の多角形要素を用いた場合載荷状態によっては誤差が 6 0 % にも達し、正しい変位は得られない。
- (3) 要素内剛性を大きくした場合 (lim RBSM; $\alpha=\infty$ 、 $\beta=1$)、要素分割を細かくしても必ずしも精度は向上しない。

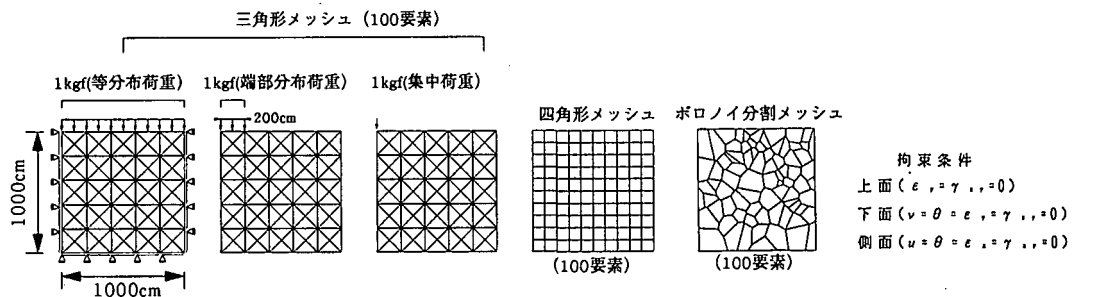


図 2 メッシュ分割・荷重・拘束条件

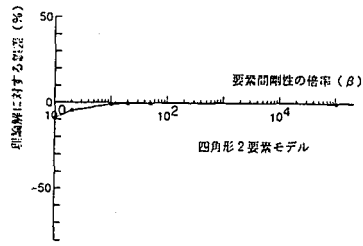
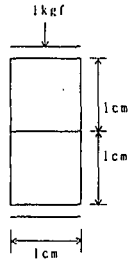
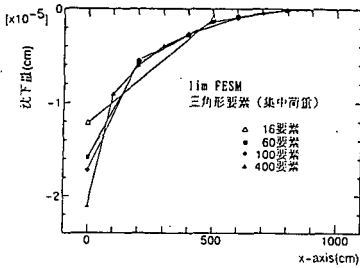
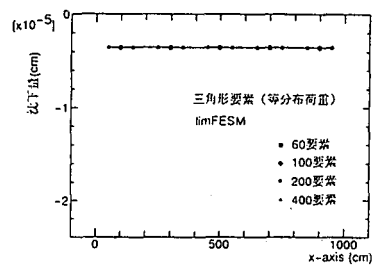


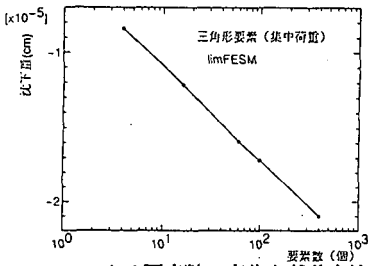
図3 四角形2要素モデルの変形



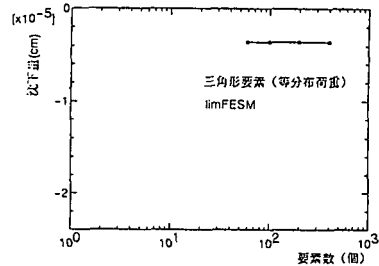
(a) lim FESMによる要素数の変化と表面の変形状態



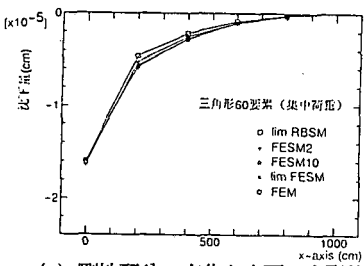
(a) lim FESMによる要素数の変化と表面の変形状態



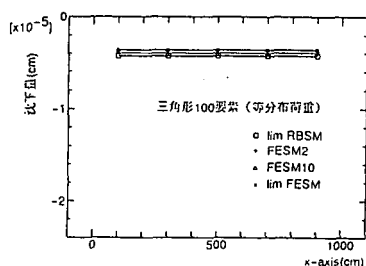
(b) lim FESMによる要素数の変化と載荷点沈下量



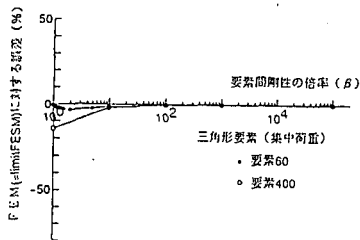
(b) lim FESMによる要素数の変化と載荷点沈下量



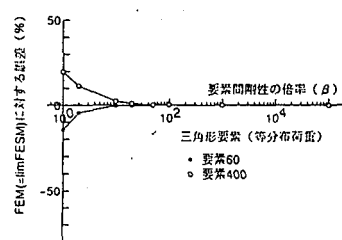
(c) 剛性配分の変化と表面の変形状態



(c) 剛性配分の変化と表面の変形状態



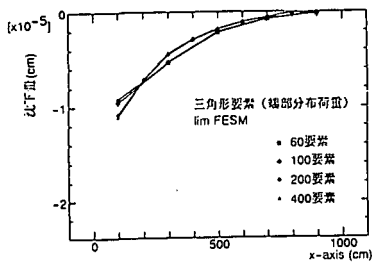
(d) 剛性配分の変化と変形の精度



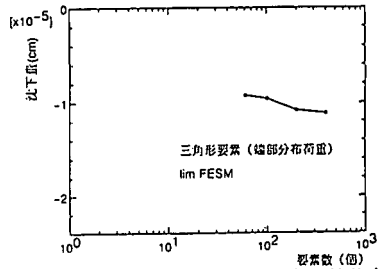
(d) 剛性配分の変化と変形の精度

図4 集中荷重による三角形要素モデルの変形

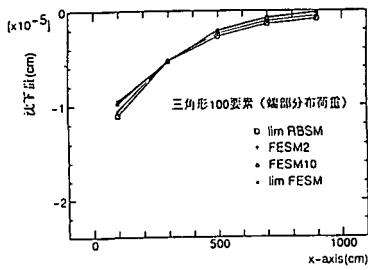
図5 等分布荷重による三角形要素モデルの変形



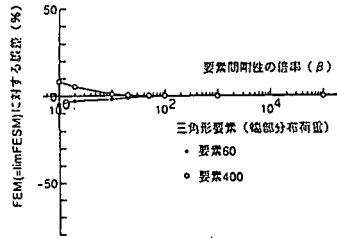
(a) lim FESMによる要素数の変化と表面の変形状態



(b) lim FESMによる要素数の変化と載荷点沈下量

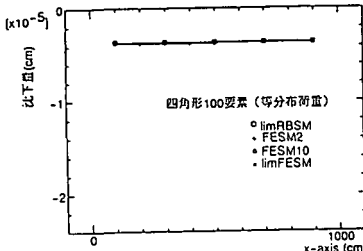


(c) 剛性配分の変化と表面の変形状態

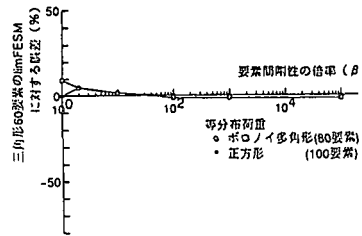


(d) 剛性配分の変化と変形の精度

図6 端部分布荷重による三角形要素モデルの変形

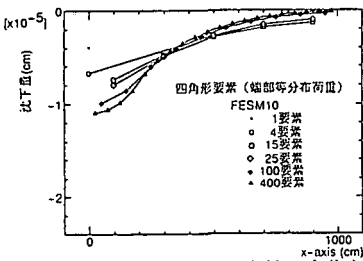


(a) 剛性配分の変化と表面の変形状態

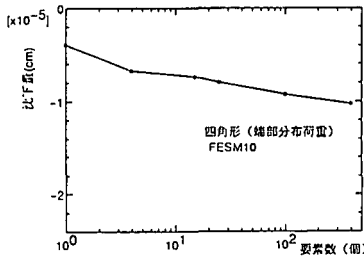


(b) 剛性配分の変化と変形の精度

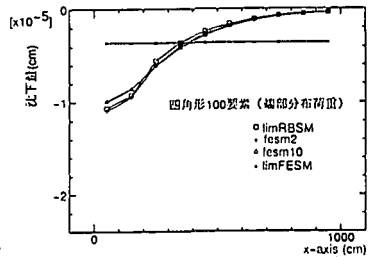
図7 等分布荷重による四角形要素モデルの変形



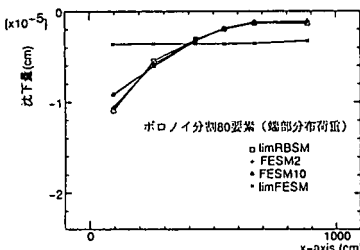
(a) FESM10による四角形要素数の変化と表面の変形状態(1,4のみ集中荷重)



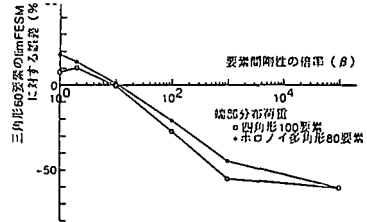
(b) FESM10による四角形要素数の変化と載荷点沈下量



(c) 四角形要素モデルの剛性配分の変化と表面の変形状態



(d) ボロノイ多角形要素モデルの剛性配分の変化と表面の変形状態



(e) 四角形・ボロノイ多角形要素モデルの剛性配分の変化と変形の精度

図8 端部分布荷重による四角形・ボロノイ多角形要素モデルの変形