

(79) 非静水圧状態における円形地下空洞の弾塑性解析

九州大学大学院 学生会員 ○蔣 宇静
九州大学工学部 正 会 員 江崎哲郎
国立環境研究所 正 会 員 木村 強
九州大学工学部 正 会 員 相川 明

Elasto-plastic analysis of a circular opening stability
under non-hydrostatic stress condition

Yujing JIANG, Tetsuro ESAKI and Akira AIKAWA
Faculty of Engineering, Kyushu University
Tsuyoshi KIMURA
The National Institute for Environmental Studies

Abstract

This paper gives a new analytical solution to describe the two-dimensional elasto-plastic behavior of a rock opening under non-hydrostatic loading. The rock mass is assumed as an linear dilatant material and exhibits post-failure behavior after the peak stress. Based on the analysis of the loading history of in situ stress state, the plastic behavior and modes of plastic zone around the opening are explicated to evaluate the stability of the opening. Explicit formulation of the plastic stress field and of the plastic radii, which is applicable in every case for two-dimensional model, is obtained using a coupled Plasticity-Complex Function Method. The adequateness of the proposed method is verified by some case studies.

1. 緒言

近年、資源開発や各種地下施設、高レベル放射性廃棄物の地層処分など、深部地下の開発利用プロジェクトが積極的に進められている。この地下開発利用をより安全かつ合理的に実現するには、開削による岩盤挙動の評価および安定機構の解明が、基礎的に重要な課題である。地下空洞の安定解析に関しては、Pennerらが最初に円形空洞の弾塑性モデルを提案した後、数多くの成果が公表されているものの、静水圧状態に関する解析に限定されているものが多い。しかしながら、地山の初期応力は異方的であることが多く、一般に空洞周辺の岩盤挙動および安定機構は、初期地山応力の異方性程度によって大きく変わる¹⁾。

本論文においては、非静水圧状態における円形空洞の弾塑性挙動を、地山岩盤がピーク強度以降ひずみ軟化およびダイレクشنシーの力学的特性を呈するように仮定した解析的方法を示す。解析において、初期地山応力の載荷経路を詳細に検討した上で、周辺岩盤の弾塑性挙動、塑性領域モードと塑性半径に関する解析解を導く。またいくつかのケースに適用して、ひずみ軟化特性やダイレクشنシーが岩盤の挙動および空洞安定

に及ぼす影響効果を明らかにするとともに、本解析手法の有用性を評価する。

2. 解析モデル

(1) 基本仮定

均質岩盤内に半径 a の円形空洞を開削した平面ひずみ問題を考える。初期地山応力は Fig. 1 に示すように、 x 軸方向と y 軸方向に無限遠から σ_x^∞ と σ_y^∞ が作用しているとする（応力は圧縮を正とする）。 P_o は静水圧に相当する成分、 S_o は偏差部分である。 $\sigma_x^\infty = k \sigma_y^\infty$ (k は側圧係数) とすれば、 P_o 、 S_o と k 、 σ_y^∞ の間には次式の関係が成立する。

$$P_o = (1+k) \sigma_y^\infty / 2; S_o = (1-k) \sigma_y^\infty / 2 \quad \dots (1)$$

さて、解析を行うには、次の仮定を設けておく。

- a) 空洞周りの放射方向では、岩盤の自重は無視する。
- b) 地山岩盤は、線形 Mohr-Coulomb の降伏規準に従う等方性体とする。

$$F = \tau_m - \tau_l(\sigma_a) = 0 \quad \dots (2)$$

ここに、

$$\tau_m = \sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 / 4 + \tau_{xy}^2} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2$$
$$\sigma_a = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 = (\sigma_1 + \sigma_3) / 2 \quad \dots (3)$$

また、 $\tau_1(\sigma_a)$ は平均垂直応力 σ_a の関数である。

$$\tau_1(\sigma_a) = \frac{K_p - 1}{K_p + 1} \left(\sigma_a + \frac{\sigma_c}{K_p - 1} \right) \quad \dots\dots\dots (3')$$

$$K_p = (1 + \sin \phi) / (1 - \sin \phi)$$

ここで、 σ_c 、 ϕ は一軸圧縮強度、内部摩擦角である。

応力-ひずみ関係は、弾性領域ではHookeの法則に、降伏後は関連流動則に従う。塑性ポテンシャル関数は破壊規準と同様な形を持つように仮定されるが、 ϕ がダイラテンシー角 ϕ^* に置き換えられる ($\phi^* < \phi$)。

c) 周辺岩盤の降伏は壁面上放射方向応力の単調減少に依存する。また最終の塑性領域は空洞壁面を内境界面として、閉合的である。

(2) 初期地山応力の载荷経路

初期地山応力場は、 S_0 によって異方性程度（静水圧場と比較して）が変わる。掘削以前の状態では、式(2)によれば、 S_0 の極限値 τ_{1^0} が

$$\tau_{1^0} = \frac{K_p - 1}{K_p + 1} \left(P_0 + \frac{\sigma_c}{K_p - 1} \right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

と導かれる。 S_0 と τ_{1^0} の比を λ とすれば、 $\lambda \leq 0.5$ の場合、空洞周りに閉合した楕円形、あるいは空洞によって左右に分離した部分的に閉合する塑性領域が生じるが、 $\lambda > 0.5$ ならば、塑性領域は非閉合的である²⁾。前節の仮定に従い、以下の解析は $\lambda \leq 0.5$ に特徴付けられる初期地山応力場を対象とする。

なお、空洞壁面のせん断破壊を生じさせないための内圧 $p_{ie}(\theta)$ は

$$p_{ie}(\theta) = (2P_0 + 4S_0 \cos 2\theta - \sigma_c) / (K_p + 1) \quad (5)$$

式中の θ は計算角であり、x 軸より反時計方向を正とする。 $p_{ie}(\theta) \geq 0$ に基づくと、無支保状態での载荷経路は $\phi = 30^\circ$ を例にとると、Fig. 2 に示すように定められる。領域Ⅰは地山岩盤が塑性化される領域、領域Ⅱは弾性領域である。領域Ⅲaでは、壁面に部分的せん断破壊、領域Ⅲbでは壁面全周にせん断破壊が生じる。したがって、空洞周りのせん断破壊を引き起こす初期応力の载荷経路は領域Ⅲaおよび領域Ⅲbに帰される。図中点線a aとb bの定義は後節で述べる。

3. 弾塑性挙動の解析法

空洞周りの応力分布と塑性破壊が、岩のPost-failure挙動に従う。三軸剛性実験によれば、圧縮強度を超えたら、ひずみ軟化挙動を呈することが分かる (Fig. 3)。実験的曲線を解析に取り込むために、ここでそれを線形化し、圧縮強度 σ_c 、残留強度 σ_c^* とぜい性率 α (残留強度と圧縮強度に達したときの両ひずみの比) を

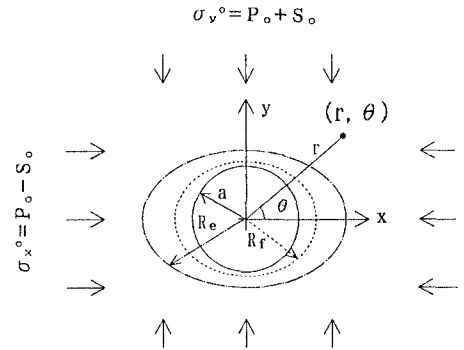


Fig.1 The problem of a circular opening under non-hydrostatic condition.

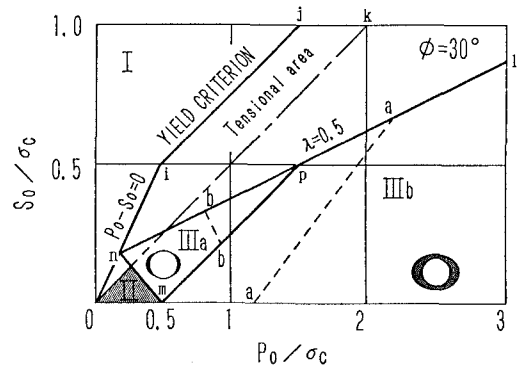


Fig.2 A definition of initial stress by the stress state on the opening wall.

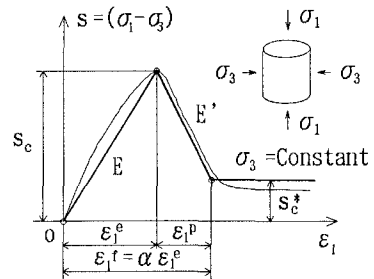


Fig.3 Material behavior model.

用いて定式化することにした。空洞周りにも Fig. 1 のように、塑性流動領域とひずみ軟化領域が生じ、それぞれが領域半径 R_p と R_e を用いて定義できる。

(1) 基本方程式

Fig. 1 のような平面極座標系 (r, θ) をとれば、力の釣り合いに関する微分方程式は

$$d\sigma_r/dr + (\sigma_r - \sigma_t)/r = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

と書ける。また、前章の仮定c)に従い、塑性領域では主応力の方向が壁面応力の単調減少によって変化しないので、半径方向応力 σ_r と接線方向応力 σ_t はそれぞれ最小主応力と最大主応力となる(こうして仮定すれば、弾塑性境界面上せん断応力の不連続が多少生じても、塑性領域などに及ぼす影響は無視できる³⁾)。それで、降伏規準式(2)は次式のように書き直される。

$$\sigma_t = \sigma_c' + K_p \sigma_r \quad \dots\dots\dots (7)$$

上式中、第1項の圧縮強度 σ_c' はFig. 3に示すように、塑性ひずみ(ε_t^p)の関数である。

$$\sigma_c' = \begin{cases} \sigma_c & (\varepsilon_t^p = 0) \\ \sigma_c^* & (\varepsilon_t^p = \varepsilon_t^f - \varepsilon_t^e) \\ \sigma_c - E' \varepsilon_t^p & (\varepsilon_t^p \leq \varepsilon_t^f - \varepsilon_t^e) \end{cases} \quad (8)$$

ただし、 $E' = (\sigma_c - \sigma_c^*)/(\alpha - 1) \varepsilon_t^e$ 、肩文字のeとpがそれぞれに、弾性増分と塑性増分を表す。

関連流動則によれば、塑性ひずみの間には
 $\varepsilon_r^p + h \varepsilon_t^p = 0$; $d \varepsilon_z^p = 0$

$$d \varepsilon_r^p / d \varepsilon_t^p = -K_p^* \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 K_p^* は次に示すダイレタンシー係数である。
 $K_p^* = (1 + \sin \phi^*) / (1 - \sin \phi^*)$

一方、全ひずみは次式によって表される。

$$\varepsilon_t = \varepsilon_t^e + \varepsilon_t^p; \quad \varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p \quad \dots\dots\dots (10)$$

したがって、変形調和方程式が次のように導かれる。

$$\frac{\partial u}{\partial r} + K_p^* \left(\frac{u}{r} \right) + \frac{K_p^*}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = -(\varepsilon_r^e + K_p^* \varepsilon_t^e)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \varepsilon_{rt}^e \quad \dots\dots\dots (11)$$

式中、 u と v は放射方向変位(内空向きを負とする)と接線方向変位を表す。 ε_r^e 、 ε_t^e と ε_{rt}^e は弾塑性境界上のひずみである。簡略のため、 ε_{rt}^e は式(11)を解くときに無視される。そうすれば、空洞形成によって弾塑性境界に生じるひずみ ε_r^e と ε_t^e は

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^e &= (1/2G) \{ \sigma_r^e - P_o - S_o(4\mu - 1) \cos 2\theta \} \\ \varepsilon_t^e &= -(1/2G) \{ \sigma_r^e - P_o + S_o(4\mu - 3) \cos 2\theta \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (12)$$

と導かれる。 G と μ は地山のせん断係数とポアソン比で、 σ_r^e は弾塑性境界上の半径方向応力である。さて、 σ_r^e はHookeの法則および破壊規準式を満足することより次のように誘導される。

$$\sigma_r^e = \frac{2\tau_{10}}{K_p - 1} \left(1 + 2\lambda \frac{K_p - 1}{K_p + 1} \cos 2\theta \right) - \frac{\sigma_c}{K_p - 1} \quad \dots\dots\dots (13)$$

括弧内の第2項は S_o によるもので、 θ に依存する。

これから、塑性ひずみ ε_t^p が次のように求められる。

$$\varepsilon_t^p = H_n \{ (R_o/r)^{1+K_p^*} - 1 \} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 H_n は次に示す非静水圧係数である。
 $H_n = (P_o + S_o \cos 2\theta - \sigma_r^e) / (G(1 + K_p^*))$

(2) 弾塑性応力

2つの塑性領域の応力は、降伏規準および釣合方程式を、弾塑性境界ならびに $r = R_f$ において応力が連続する条件を用いて連立積分すれば、その解を得る。

塑性流動領域においては、

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_c}{1 - K_p} + D_1 \left(\frac{R_o}{r} \right)^{1-K_p} + D_2 \left(\frac{R_f}{r} \right)^{1-K_p} \\ \sigma_t &= \sigma_c^* + K_p \sigma_r \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ただし、

$$D_1 = \frac{2\tau_{10}}{K_p - 1} + \frac{4S_o \cos 2\theta}{K_p + 1} + \frac{H_n E' (1 + K_p^*)}{(K_p - 1)(K_p^* + K_p)}$$

$$D_2 = \frac{(1 + K_p^*)(\sigma_c - \sigma_c^* + E' H_n)}{(1 - K_p)(K_p^* + K_p)}$$

また、ひずみ軟化領域においては、

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -F_1 + D_1 (R_o/r)^{1-K_p} \\ \sigma_t &= \sigma_c' + K_p \sigma_r \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、

$$F_1 = \frac{(1 + K_p^*) \sigma_c - (1 - K_p) \sigma_c' + (1 + K_p^*) H_n E'}{(K_p - 1)(K_p^* + K_p)}$$

一方、弾性域の応力は、複素関数論によると

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_t &= 2P_o - 4\tau_{10} R_o [\phi'(z)] \\ \sigma_t - \sigma_r + 2i\tau_{10} r &= 2S_o \dots\dots\dots (17) \\ &\quad - 2\tau_{10} [z\psi''(z) + \chi'(z)] e^{2i\theta} \end{aligned}$$

ただし、 $\phi(z)$ と $\chi(z)$ は複素応力関数であって、境界条件を満足するように定められる。

4. 塑性領域モードと塑性半径

載荷経路が領域ⅢaおよびⅢbにある場合、塑性領域は全周または部分的せん断破壊を示す。さらに塑性流動領域の有無を考えれば、4種類の破壊モード($H_1 \sim H_4$)に分類することができ、Fig. 4に示すように、塑性半径(R_o 、 R_f)と塑性角(θ_1 、 θ_2)によって定義される。 θ_1 は弾塑性境界面の円周上の境界角を、また θ_2 は塑性流動領域の円周上の境界角を表すものである。この図によると、空洞の壁面が弾性壁面($90^\circ \sim \theta_1$)、ひずみ軟化壁面($\theta_1 \sim \theta_2$)と塑性流動壁面($\theta_2 \sim 0^\circ$)からなることが分かる。

範囲 $0 \leq \theta \leq \theta_2$ に対し、壁面では $\sigma_r = p_i$ (支保圧)のため、式(15)より塑性半径が次のように導かれる。

$$\begin{aligned} R_o &= a \left(\frac{D_1 + D_2 \zeta^{1-K_p}}{p_i + \sigma_c^* / (K_p - 1)} \right)^{1/K_p - 1} \\ R_f &= \zeta R_o \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

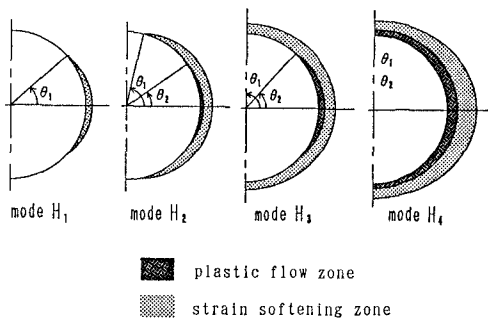


Fig.4 A classification of the failure modes around an unsupported opening.

式中の定数 ζ は、 $r = \zeta R_e$ のとき $\sigma_c' = \sigma_c^*$ という関係式を用いて式(8)中の第(3)式を簡略すれば、
 $\zeta = (E' H_n / (E' H_n - \sigma_c^* + \sigma_c))^{1/(1+K_p)}$ (19)
と表されるようになる。 ζ は地山の力学的性質のみならず、初期応力状態にも依存する。

なお、計算範囲 $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$ に対しては、式(16)を壁面上境界条件を用いて解けば、次式が得られる。
 $F(R_e) = p_i + F_1 - D_1 (R_e/\alpha)^{1-K_p} = 0$... (20)
式中の係数 F_1 に含む σ_c' は R_e の関数でもあるため、 R_e が解析的に解かれる。

一般には、側圧係数 $k < 1$ であるため、天盤部と下盤部よりも側壁では塑性流動領域が生じやすいので、 $\theta = 0^\circ$ 、 $R_f = 1$ および $\theta = 90^\circ$ 、 $R_f = 1$ を式(18)に代入すれば、領域Ⅲaでの塑性流動領域の発生を区別する分界線 $b-b$ 、また領域Ⅲbでの塑性流動領域の閉合程度を区別する境界線 $a-a$ を定義する方程式が求められる。それで、载荷経路が領域Ⅲaの $b-b$ 線より下であれば、破壊モード H_1 、 $b-b$ 線より上はモード H_2 、また領域Ⅲbの $a-a$ 線より左側であれば、モード H_3 、その右側ならば、モード H_4 が発生すると予測できる。

塑性角 θ_1 と θ_2 は、 $p_{ie}(\theta_1) = p_i$ と式(18)の第

(2)式 $R_f(\theta_2) = 1$ に基づいて求められる。

5. 典型的モデルの解について

(1) 静水圧モデル

静水圧状態の解析は本手法の一特例として、

$$k = 1, \text{ または } S_o = 0 \dots \dots \dots (21)$$

したがって、塑性破壊を生じる载荷経路はFig. 2の水平軸の $P_o/\sigma_c \geq 1/2$ の部分に帰され、塑性領域は軸対称かつ閉合的である。なお、式(21)を式(18)、式(15)と式(16)に代入すれば、静水圧モデルの解が得られる。

(2) 完全弾塑性モデル

完全弾塑性モデルは、ぜい性率 α が無限大値を取るときのひずみ軟化モデルとも言えるので、

$$\sigma_c^* = \sigma_c, K_p^* = 1 \dots \dots \dots (22)$$

上式および式(21)を用いて式(18)を簡略すれば、完全弾塑性モデルの解が求められる。

6. 解析例と考察

以下では前章までに導かれた一般解を用いて典型的な初期応力および地山の条件下について数値計算と考察を行う。なお、岩盤はヤング率 $E = 1.5$ GPa、ポアソン比を $\mu = 0.25$ とする等方体であるとし、内部摩擦角を $\phi = 30^\circ$ 、ダイレタンシー角を $\phi^* = 20^\circ$ 、また $\alpha = 2$ 、 $\sigma_c^*/\sigma_c = 0.6$ とする。

解析手順は、まず、载荷経路に従い、塑性角 θ_1 と θ_2 を求め、式(18)より範囲 $0 \sim \theta_2$ においての2つの塑性半径 R_o と R_f を、式(20)より範囲 $\theta_2 \sim \theta_1$ における塑性半径 R_o を求める；塑性応力は、 $0 \sim \theta_2$ では $a \leq r \leq R_f$ と $R_f \leq r \leq R_o$ に分けて解析されるが、範囲 $\theta_2 \sim \theta_1$ ならびに $a \leq r \leq R_o$ では、式(16)を用いて求める。方位角 θ に対し以上の計算を繰り返せば、各領域の応力および塑性領域の最終形状が決定される。

Fig. 5は、代表的な破壊モード $H_1 \sim H_4$ を示す解析結果であるが、入力データ($P_o/\sigma_c : S_o/\sigma_c$)として、

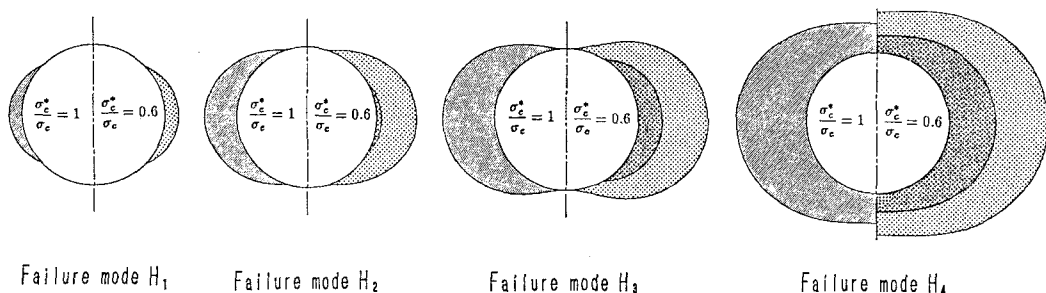


Fig.5 Comparisons of the analyzed solutions for the plastic zones by the elasto-plastic model(left) and the strain softening model(right).

破壊モード $H_1 \sim H_4$ がそれぞれ 0.5:0.2:1.0:0.3:1.5:0.5:2.5:0.5 と仮定されている。比較のため、対称軸の右にひずみ軟化モデルの解析結果を、左に弾塑性モデルの解析結果 ($\sigma_c^*/\sigma_c = 1$; $K_p^* = 1$) を示してある。同じ载荷経路であっても、塑性領域の区分に対する両モデルの解が相当に異なることがこの図より分かる。

Fig. 6は、空洞の断面積で無次元した塑性領域面積と载荷経路との関係を領域Ⅲbについて示したものである。

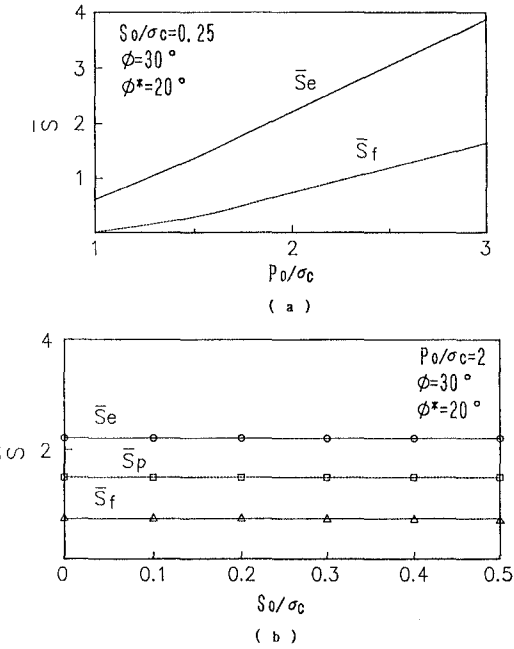


Fig.6 Relationship between the plastic areas and initial stress paths.

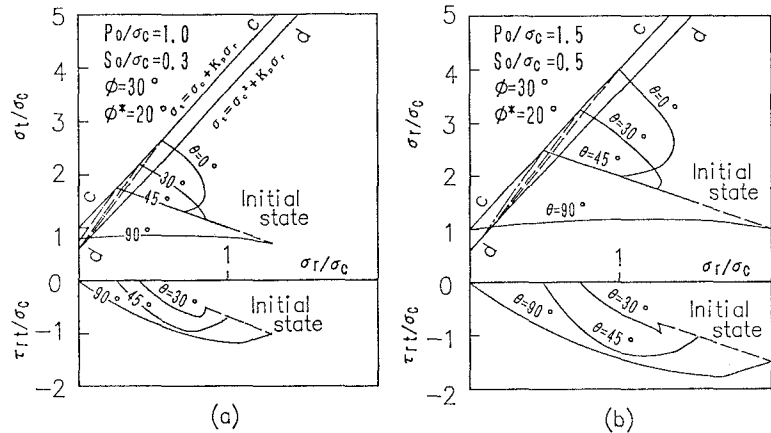


Fig.7 Stress loci on the circumference of an unsupported opening.

る。 $\bar{S}_e$ と $\bar{S}_f$ がひずみ軟化モデルに基づいた全塑性領域の無次元面積と流動領域の無次元面積を、 $\bar{S}_p$ が完全弾塑性モデルに基づいた無次元塑性面積を表す。 S_0/σ_c を一定とすれば、 P_0/σ_c が大きくなるとともに、塑性面積が線形的に増加するが、 P_0/σ_c を一定とすれば、 S_0/σ_c に依存せず一定になることが分かる。それで、初期地山応力を P_0 、 S_0 と分解すれば、空洞周辺に生ずる塑性領域の規模が P_0 に、また塑性領域の形が S_0 に支配されると考えられる。

Fig. 7は、Fig. 5に示したモード H_2 と H_3 について、 $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ および 90° の壁面上の4箇所での応力変化経路を示す。この図より2つのことが説明できる。1つは、非静水圧の場合は壁面の各箇所での応力経路が相当異なり、 $k < 1$ ならば水平軸の近くほどせん断破壊が生じやすくなり、塑性半径が大きくなる。もう1つは、同計算角であっても壁面応力の変化経路がその塑性化程度(あるいは破壊モード)の違いによって異なるが、降伏線 c c と d d の間を線形的に変化する。

7. 結 論

本研究においては、ひずみ軟化およびダイレタンシー特性を考慮した非静水圧状態における円形空洞の弾塑性挙動を解析する手法を示した。初期地山応力の载荷経路を詳細に検討した上で、周辺岩盤の弾塑性挙動と4つの破壊モードおよび塑性半径に関するより一般的な解を導き出した。本解析は典型的なモデルにも適用することができた。またパラメータスタディによって、非静水圧状態における地下空洞の弾塑性挙動は初

期応力状態、地山岩盤のひずみ軟化およびダイレタンシー特性に大いに影響されることを定量的に示した。

参考文献

- 1) Pan, Y. W. & Chen, Y. M. : Rock Mechanics and Rock Engineering, 23, 1990.
- 2) Detournay, E. & John, M. St. : Rock Mechanics and Rock Engineering, 21, 1988.
- 3) 菅原他 : 日本鉱業会誌, 104 [1203], 1988.