

(52) 凍結移動境界を考慮した地盤凍結の連成解析

大成建設（株）土木設計部 ○スレイク・アジェイ
大成建設（株）土木設計部 田中 良弘

Ground Freezing Analysis Involving Coupling of Heat, Seepage and Stress Fields with Moving Phase Change Boundary

AJAI SULEKH, TAISEI CORP.
YOSHIHIRO TANAKA, TAISEI CORP.

ABSTRACT

Ground freezing phenomena involve the interaction of heat, seepage and stress fields. Hitherto, numerical results for the ground freezing problem with coupled heat, seepage and stress fields have scarcely been presented. In the present paper, the governing equations for **coupling** of the three fields are based on mixture theory. A detailed mathematical formulation is presented here for the discretization of the coupled governing equations on a **moving mesh** system. In other words, a general finite element numerical procedure is proposed for the coupled ground freezing problem wherein the elements are allowed to deform continuously.

In the formulation, it is assumed that the phase change occurs at a single discrete temperature, i.e., the phase change region is considered to be infinitely thin. The interface between the frozen and unfrozen domains is treated as a **moving boundary** and the latent heat effects are included in the 'Stefan condition or the energy-jump condition' at this boundary.

In the numerical procedure, the movement of the mesh is dictated by the 'Stefan condition'. This approach of continuous mesh movement helps in always keeping the phase change moving boundary on element boundaries. This avoids the difficulties faced in interpolation of variables.

1. はじめに

近年、液化天然ガスの地下タンク貯蔵や岩盤内貯蔵、あるいはシールド発進のための凍結工法などの需要から、地盤／岩盤内の熱移動問題を解明する必要性が高まりつつある。また、寒冷地におけるインフラストラクチャーの開発にあたり凍結融解は、不可避の問題である。地盤における凍結現象は、極めて複雑かつ困難な問題である。それは、熱移動過程における土粒子、間隙水と空気の高相問題、そして熱移動に伴い土粒子骨格に発生する応力・変形問題を相互連成として扱う必要があるためである。更に問題を難しくしているのは、凍結前面において潜熱によるエネルギーの跳躍が起きるのでエネルギー跳躍条件 (Stefan Condition) を満足しなければならない事である。この凍結境界は時間と共に移動するので、内部移動境界としてモデル化する必要がある。

従来の研究においては、熱移動問題と間隙水を含む応力問題とを、別々に解いているのが現状であり、三者の相互連成を取り扱った試みはない。また、凍結境界を求めるにあたっては、熱問題から仮定の凍結面を逆解析的に求めているのが現状であり、'Stefan Condition'を完全に満足していない。

Harlan (1973)は、熱と間隙水との連成を考慮したモデルにより凍上現象を説明した。Hopke (1980)は、凍結土内に生ずる凍結圧と上載荷重が釣り合うと考えて、上載荷重がある場合の凍上現象を解析した。O'Neill & Miller (1985)も凍結土内に剛体氷モデルを考え、アイス・レンズの時間的／空間的発生を解析した。市川 (1989)は、熱・間隙水・応力場の連成を考慮したモデルを提案しFEMの解法を適用しているが、固定したFEMメッシュを用いているので、凍結境界面を正確に追跡出来ていない。

本論文は、基本的に市川(1989)の手法に基づいているが、凍結境界面における'Stefan Condition'を厳密に取り入れるため、凍結境界面を時間と共に移動させる手法を提案するものである。解析手法としてFEMを適用し、凍結境界面の移動は予測・修正子法により決定し、またメッシュの移動は全領域に及ぶ。

2. 支配方程式と境界条件

多相問題に対する熱・間隙水・応力場の連成解析は、多孔質体の混合理論に基づいて導かれる。その際の仮定条件として、以下の項目を考える。

- 土粒子と間隙水（凍結＆未凍結）の多孔質体は、弾塑性体モデルや非線形弾性モデルを扱える。
- 間隙水は、非圧縮性流体とする。
- 土粒子の実質部分と間隙水の局所的な温度差がない。
- 完全飽和状態の地盤を考える。
- 凍結地盤内においては、間隙水の移動を無視する。（しかし、木下(1977)やNakano (1991)により凍結地盤内において未凍結の間隙水が存在し、応力場に影響を与えることが実験的に求められている）
- 未凍結地盤内の間隙水は、Darcy則に従う。
- 凍結境界の遷移区間の厚みはないとする。従って、土粒子の粒径は小さいとする。

図-1に示すように、凍結領域 Γ_1 と、未凍結領域 Γ_2 の二次元二相問題を考えると、それぞれの領域において以下のような支配方程式が与えられる。

(1) 土粒子・間隙水の平衡則

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Gamma_1 \quad (1-a); \quad \frac{\partial (\sigma'_{ij} - p\delta_{ij})}{\partial x_j} = 0 \quad \text{in } \Gamma_2 \quad (1-b)$$

ここで、 σ'_{ij} ：有効応力、 p ：間隙水圧、 δ_{ij} ：Kronecker delta、 $(\dot{\cdot})$ ：時間に関する微分、 x_i ：座標系を示す。また、土粒子間に働く引張応力は+とし、間隙水圧の圧縮力は+とする。

(2) 間隙水の質量保存則

凍結領域 Γ_1 については、流体の流れがないので連続の式は必要ない。未凍結領域 Γ_2 における間隙水は、以下に示すようなDarcy則を取り込んだかたちの、連続の式を満足する必要がある。

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{k}{\mu_w} \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) + \dot{e}_v + \bar{a} \dot{\theta} = 0 \quad \text{in } \Gamma_2 \quad (2)$$

ここで、 h は水頭ポテンシャルで $h = p/p_w + x_2$

により表され、 $\bar{a}$ は温度変化に伴う土粒子と間隙水混合体の体積膨張係数で $\bar{a} = a_s(1-n) + a_w n$ により表される。また、 k ：固有透水係数、 μ_w ：水の粘性係数、 p_w ：水の密度、 e_v ：土粒子骨格のひずみの体積分、 a_s ：土粒子の体積膨張係数、 a_w ：水の体積膨張係数、 n ：間隙率、 θ ：温度である。

(3) 土粒子・間隙水のエネルギー保存則

土粒子の実質部分と間隙水または氷の温度差がないとする仮定し、またフーリエ則を適用することにより、エネルギー支配方程式は以下のように与えられる。

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{c} \dot{\theta})}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{K}^1 \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) - \phi = 0 \quad \text{in } \Gamma_1 \quad (3-a); \quad \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{c} \dot{\theta})}{\partial t} + \rho_w c_w v_{wi} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{K}^2 \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) - \phi = 0 \quad \text{in } \Gamma_2 \quad (3-b)$$

ここで、 $\bar{\rho}^1, \bar{c}^1, \bar{K}^1, \bar{\rho}^2, \bar{c}^2, \bar{K}^2$ はそれぞれ、領域 Γ_1, Γ_2 における土粒子と間隙水の混合体の密度、比熱、熱伝導率である。混合体の密度 $\bar{\rho}$ 、および比熱 $\bar{c}$ は、それぞれ $\bar{\rho} = \rho_s(1-n) + \rho_w n$ 、および $\bar{c} = c_s(1-n) + c_w n$ のように土粒子実質部分に関する量（下添字s）と水に関する量（下添字w）で表される。また、 v_{wi} ：間隙水の平均流速、 ϕ ：単位体積当たりの内部発熱量である。

なお、平衡則に導入される構成則は増分形として、次式により与えられる。

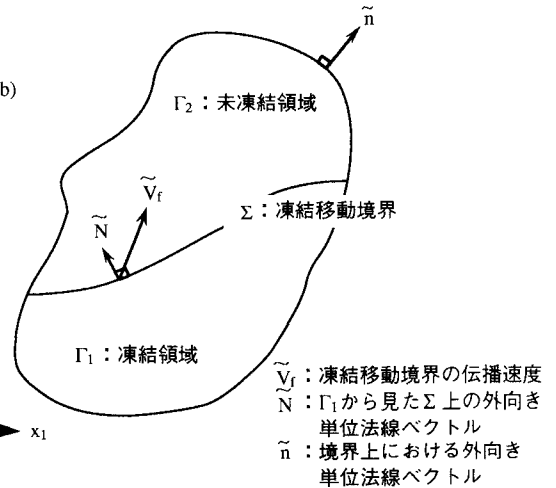


図-1 凍結境界値問題の領域と座標系の定義

$$\dot{\sigma}_{ij} = \bar{D}_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - a_s \dot{\theta} \delta_{kl}/3) \quad (4)$$

ここで、 $\bar{D}_{ijkl}$ ：弾塑性まで考えた弾（塑）性テンソル、 $\dot{\epsilon}_{kl}$ ：ひずみ速度である。

以上述べた支配方程式は、変数場（ u ：変位、 p ：圧力、 θ ：温度）に対して空間座標 x_i の二階偏微分方程式になっているので、その境界条件は以下ようになる。

まず、凍結領域 Γ_1 と未凍結領域 Γ_2 との間にある内部凍結移動境界 Σ において、以下に示すエネルギー跳躍条件(Stefan Condition)を満足する必要がある。

$$(\bar{K}^{-1} \partial \theta / \partial N)_1 - (\bar{K}^{-2} \partial \theta / \partial N)_2 = \Lambda V_N = \Lambda \tilde{V}_f \cdot \tilde{N} \quad \text{on } \Sigma \quad (5-a) \quad ; \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_f \quad \text{on } \Sigma \quad (5-b)$$

ここで、 Λ ：土の潜熱（ $\Lambda = n \Lambda_w$ ）、 V_N ：凍結境界での法線方向の凍結速度、 $\tilde{N}$ ： Σ 上の法線ベクトル
 $\tilde{V}_f$ ： Σ 上の速度ベクトル、 θ_f ：相変化の温度を示している。（図-1 参照）

次に、外部境界 S において以下に示すような、3つの支配方程式に対応した境界条件が必要である。

$$(a) \text{ 変位境界条件: } \hat{u}_i = \hat{u}_i \quad \text{on } S_u \times [0, \infty) \quad (6-a)$$

$$(b) \text{ 応力境界条件 (不透水): } \hat{\sigma}_{ij} n_j = (\hat{\sigma}_{ij} - \hat{p} \delta_{ij}) n_j = \hat{t}_i \quad \text{on } S_t \times [0, \infty) \quad (6-b)$$

$$(c) \text{ 応力境界条件 (透水): } \hat{\sigma}_{ij} n_j = (\hat{\sigma}_{ij} + \hat{p} \delta_{ij}) n_j = \hat{t}_i \quad \text{on } S_t' \times [0, \infty) \quad (6-c)$$

$$(d) \text{ 圧力境界条件: } \hat{p} = \hat{p} \quad \text{on } S_p \times [0, \infty) \quad (6-d)$$

$$(e) \text{ 流量境界条件: } -(k/\mu_w) n_i \rho_w \partial(\hat{p}/\rho_w + x_2)/\partial x_i = \hat{q} \quad \text{on } S_q \times [0, \infty) \quad (6-e)$$

$$(f) \text{ 温度境界条件: } \hat{\theta} = \hat{\theta} \quad \text{on } S_\theta \times [0, \infty) \quad (6-f)$$

$$(g) \text{ 熱流量境界条件: } \rho_w C_w v_w n_i \hat{\theta} - \bar{K} n_i \partial \theta / \partial x_i = \hat{Q} \quad \text{on } S_Q \times [0, \infty) \quad (6-g)$$

ここで、 q ：水の流出入量、 n_i ：単位法線ベクトル に対応した方向余弦、 Q ：熱流速、 t_i ：応力成分、 $(\hat{\cdot})$ ：境界上で与えられた値を表している。なお、 $S_u \times [0, \infty)$ は境界 S_u において時刻歴 $[0, \infty)$ で境界条件が満足されなければならないことを示している。

3. 有限要素法による数値解法

以上述べてきた多相の熱・間隙水・応力場の連成境界値問題に対して、有限要素法による数値解析手法を適用して時刻歴で問題を解く。ここでは、仮想仕事式を微分方程式系に適用して、最終的に有限次元の代数方程式を得、これを解くことにより近似解を得る。ここでは、仮想仕事式に関する誘導を省略して、内部凍結移動境界での解析スキームや、離散化されたマトリックスの式に注力する。

離散化されたメッシュは時間と共に移動するものと考え、エレメントの各節点上での変位 u 、圧力 p 、温度 θ は、形状関数を適用して以下のように表せる。

$$u(x, t) \approx \sum_{j=1}^r N_{uj}(x, t) U_j(t) \quad (7-a) \quad ; \quad p(x, t) \approx \sum_{j=1}^s N_{pj}(x, t) P_j(t) \quad (7-b) \quad ; \quad \theta(x, t) \approx \sum_{j=1}^l N_{\theta j}(x, t) \Theta_j(t) \quad (7-c)$$

ここに、 $N_{uj}, N_{pj}, N_{\theta j}$ ：変位、圧力、温度に関する形状関数、 U_j, P_j, Θ_j ：節点変位、節点圧力、節点温度のベクトルをそれぞれ表す。内部凍結境界が移動すると共に全体のメッシュも移動するので、形状関数が空間および時間の関数になっているところが、従来の解析手法と大きく異なるところである。支配方程式が増分形で表現されているため、変位、圧力、温度を時間に関して微分すると以下の式が得られる。

$$\dot{u}(x, t) = N_{uj} \frac{\partial U_j}{\partial t} + U_j \frac{\partial N_{uj}}{\partial t} \quad (8-a) \quad ; \quad \dot{p}(x, t) = N_{pj} \frac{\partial P_j}{\partial t} + P_j \frac{\partial N_{pj}}{\partial t} \quad (8-b) \quad ; \quad \dot{\theta}(x, t) = N_{\theta j} \frac{\partial \Theta_j}{\partial t} + \Theta_j \frac{\partial N_{\theta j}}{\partial t} \quad (8-c)$$

式(8)の第2項は、メッシュの移動を示すものであるが、流体分野での研究のLynch and Gray (1978)によれば、この項はメッシュでの速度ベクトルと形状関数の空間微分ベクトルの内積により表される。

$$\frac{\partial N_{uj}}{\partial t} = -\tilde{v}_{mu} \cdot \tilde{\nabla} N_{uj} \quad (9-a); \quad \frac{\partial N_{pj}}{\partial t} = -\tilde{v}_{mp} \cdot \tilde{\nabla} N_{pj} \quad (9-b); \quad \frac{\partial N_{\theta j}}{\partial t} = -\tilde{v}_{m\theta} \cdot \tilde{\nabla} N_{\theta j} \quad (9-c)$$

ここで、 $\tilde{v}_{mu}, \tilde{v}_{mp}, \tilde{v}_{m\theta}$: 変位、圧力、温度に関する節点速度ベクトルで、 $\tilde{v}_{mu} = \tilde{v}_i N_{ui}; \tilde{v}_{mp} = \tilde{v}_i N_{pi}; \tilde{v}_{m\theta} = \tilde{v}_i N_{\theta i}$ のように表される。また、 $\tilde{v}_i$: 全ての節点での x_i 系速度成分ベクトルを示す。式(9)を式(8)に代入すると、以下の式が得られる。

$$\dot{u}(x,t) = N_{uj} \frac{\partial U_j}{\partial t} - U_j (\tilde{v}_{mu} \cdot \tilde{\nabla} N_{uj}) \quad (10-a); \quad \dot{p}(x,t) = N_{pj} \frac{\partial P_j}{\partial t} - P_j (\tilde{v}_{mp} \cdot \tilde{\nabla} N_{pj}) \quad (10-b); \quad \dot{\theta}(x,t) = N_{\theta j} \frac{\partial \Theta_j}{\partial t} - \Theta_j (\tilde{v}_{m\theta} \cdot \tilde{\nabla} N_{\theta j}) \quad (10-c)$$

式(7 & 10)を用いて、Galerkin法を適用することにより、凍結領域 Γ_1 と未凍結領域 Γ_2 に対して支配方程式を離散化したマトリックス形式の式が以下のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} K\dot{U} - (K_1 + K_2)U &= \dot{F} \\ \text{NO EQUATION} \\ M\dot{\Theta} - (C_1 + C - H_2)\Theta &= Q_2 \end{aligned} \right\} \text{in } \Gamma_1 \quad (11); \quad \left. \begin{aligned} K\dot{U} - (L - L')\dot{P} - (K_1 + K_2)U + (L_5 - L'_1)P &= \dot{F} \\ L^T\dot{U} - (L_1^T + L_2^T)U + H_1P + T\dot{\Theta} + T_1\Theta &= Q \\ M\dot{\Theta} - (C_1 + C - H_2)\Theta &= Q_2 \end{aligned} \right\} \text{in } \Gamma_2 \quad (12)$$

ここで、式中のマトリックスまたはベクトルは、式(13)により与えられる。

$$\begin{aligned} K &= \int_V B_3^T DB_3 dV, K_1 = \int_V B_1^T DB_1 dV, K_2 = \int_V B_2^T DB_2 dV, L = \int_V \hat{B} N_p dV, L' = \int_{S_f} N_{\theta}^T n N_p dS, L'_1 = \int_{S_f} (\tilde{v}_{mp} \cdot \tilde{\nabla} N_p)^T N_{\theta} dS, \\ L_5 &= \int_V (\tilde{v}_{mp} \cdot \tilde{\nabla} N_p)^T \hat{B} dS, \dot{F} = \int_{S_1} N_u^T \hat{t} dS + \int_{S_f} N_{\theta}^T \hat{t} dS + \int_V B_3^T D \dot{\epsilon}_0 dV, \dot{\epsilon}_0 = (\bar{a} \dot{\theta}/3) \{1, 1, 0\}^T, L_1 = \int_V \hat{B}_1^T N_p dV, \\ L_2 &= \int_V \hat{B}_2^T N_p dV, H_1 = \int_V \frac{k}{\rho_w \mu_w} \nabla N_p^T \nabla N_p dV, T = \int_V \bar{a} N_p^T N_p dV, T_1 = \int_V \bar{a} (\tilde{v}_{m\theta} \cdot \tilde{\nabla} N_{\theta})^T N_p dV, \\ Q &= \int_V \frac{k}{\rho_w \mu_w} \nabla N_p^T \nabla x_2 dV - \int_{S_q} N_p^T \hat{q} dS, \nabla x_2 = \{0, -1\}^T, M = \int_V \bar{\rho} \bar{C} N_{\theta}^T N_{\theta} dV, C_1 = \int_V \bar{\rho} \bar{C} (\tilde{v}_{m\theta} \cdot \tilde{\nabla} N_{\theta})^T N_{\theta} dV, \\ C &= \int_V \rho_w C_w (\tilde{v}_w \cdot \tilde{\nabla} N_{\theta})^T N_{\theta} dV, H_2 = \int_V \bar{K} \nabla N_{\theta}^T \nabla N_{\theta} dV, Q_2 = \int_V N_{\theta}^T \phi dV - \int_{S_Q} N_{\theta}^T \hat{Q} dS \\ B_3 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{u1}}{\partial x_1} & 0 & -\frac{\partial N_{ur}}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{u1}}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_{ur}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_{u1}}{\partial x_2} & \frac{\partial N_{u1}}{\partial x_1} & -\frac{\partial N_{ur}}{\partial x_2} & \frac{\partial N_{ur}}{\partial x_1} \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} \left(\tilde{v}_1 \frac{\partial N_{ui}}{\partial x_1}\right) \cdot \tilde{\nabla} N_{u1} & 0 & -\left(\tilde{v}_1 \frac{\partial N_{ui}}{\partial x_1}\right) \cdot \tilde{\nabla} N_{ur} & 0 \\ 0 & \left(\tilde{v}_1 \frac{\partial N_{ui}}{\partial x_2}\right) \cdot \tilde{\nabla} N_{u1} & 0 & \left(\tilde{v}_1 \frac{\partial N_{ui}}{\partial x_2}\right) \cdot \tilde{\nabla} N_{ur} \\ \left(\tilde{v}_1 \frac{\partial N_{ui}}{\partial x_2}\right) \cdot \tilde{\nabla} N_{u1} & \left(\tilde{v}_1 \frac{\partial N_{ui}}{\partial x_1}\right) \cdot \tilde{\nabla} N_{u1} & -\left(\tilde{v}_1 \frac{\partial N_{ui}}{\partial x_2}\right) \cdot \tilde{\nabla} N_{ur} & \left(\tilde{v}_1 \frac{\partial N_{ui}}{\partial x_1}\right) \cdot \tilde{\nabla} N_{ur} \end{bmatrix}, \\ B_5 &= \begin{bmatrix} \tilde{v}_{mu} \cdot \frac{\partial (\tilde{\nabla} N_{u1})}{\partial x_1} & 0 & -\tilde{v}_{mu} \cdot \frac{\partial (\tilde{\nabla} N_{ur})}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \tilde{v}_{mu} \cdot \frac{\partial (\tilde{\nabla} N_{u1})}{\partial x_2} & 0 & \tilde{v}_{mu} \cdot \frac{\partial (\tilde{\nabla} N_{ur})}{\partial x_2} \\ \tilde{v}_{mu} \cdot \frac{\partial (\tilde{\nabla} N_{u1})}{\partial x_2} & \tilde{v}_{mu} \cdot \frac{\partial (\tilde{\nabla} N_{u1})}{\partial x_1} & -\tilde{v}_{mu} \cdot \frac{\partial (\tilde{\nabla} N_{ur})}{\partial x_2} & \tilde{v}_{mu} \cdot \frac{\partial (\tilde{\nabla} N_{ur})}{\partial x_1} \end{bmatrix}, \hat{B} = \left\{ \frac{\partial N_{u1}}{\partial x_1}, \frac{\partial N_{u1}}{\partial x_2}, -\frac{\partial N_{ur}}{\partial x_1}, \frac{\partial N_{ur}}{\partial x_2} \right\}, \\ \hat{B}_1 &= \left\{ \left(\tilde{v}_1 \frac{\partial N_{ui}}{\partial x_1}\right) \cdot \tilde{\nabla} N_{u1}, \left(\tilde{v}_1 \frac{\partial N_{ui}}{\partial x_2}\right) \cdot \tilde{\nabla} N_{u1}, -\left(\tilde{v}_1 \frac{\partial N_{ui}}{\partial x_1}\right) \cdot \tilde{\nabla} N_{ur}, \left(\tilde{v}_1 \frac{\partial N_{ui}}{\partial x_2}\right) \cdot \tilde{\nabla} N_{ur} \right\}, \\ \hat{B}_2 &= \left\{ \tilde{v}_{mu} \cdot \frac{\partial (\tilde{\nabla} N_{u1})}{\partial x_1}, \tilde{v}_{mu} \cdot \frac{\partial (\tilde{\nabla} N_{u1})}{\partial x_2}, -\tilde{v}_{mu} \cdot \frac{\partial (\tilde{\nabla} N_{ur})}{\partial x_1}, \tilde{v}_{mu} \cdot \frac{\partial (\tilde{\nabla} N_{ur})}{\partial x_2} \right\} \end{aligned}$$

4. 時刻歴のシミュレーション・アルゴリズム

式(11 & 12)により与えられる凍結領域および未凍結領域における支配方程式は、時間微分に注目すれ

ば式 (14) に示すように、X に関する 1 階の連立常微分方程式となる。

$$\begin{aligned}
 & A_1 \dot{X}_1 + B_1 X_1 = G_1 \quad \text{in } \Gamma_1 \quad (14-a); \quad A_2 \dot{X}_2 + B_2 X_2 = G_2 \quad \text{in } \Gamma_2 \quad (14-b) \\
 & A_1 = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} -(K_1 + K_2) & 0 \\ 0 & -(C_1 + C - H_2) \end{bmatrix}; G_1 = \begin{bmatrix} \dot{F} \\ Q_2 \end{bmatrix}; X_1 = \begin{bmatrix} U \\ \Theta \end{bmatrix}; A_2 \dot{X}_2 + B_2 X_2 = G_2 \quad (15-a) \\
 & A_2 = \begin{bmatrix} K & -(L-L') & 0 \\ L^T & 0 & T \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} -(K_1 + K_2) & (L_2 - L_1') & 0 \\ -(L_1^T + L_2^T) & H_1 & T_1 \\ 0 & 0 & -(C_1 + C - H_2) \end{bmatrix}; G_2 = \begin{bmatrix} \dot{F} \\ Q \\ Q_2 \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} U \\ P \\ \Theta \end{bmatrix} \quad (15-b)
 \end{aligned}$$

時間領域で解法として差分法を適用し、式 (14) を時間 t^* について解く。(O'Neill & Lynch 1979)

$$t^* = t_k + \alpha (t_{k+1} - t_k), \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (16-a)$$

$$\frac{d(X_j)}{dt}(t^*) \approx \frac{(X_j)^{k+1} - (X_j)^k}{(t_{k+1} - t_k)} \quad (16-b); \quad X_j(t^*) \approx \alpha (X_j)^{k+1} + (1 - \alpha)(X_j)^k \quad (16-c)$$

ここで、 α : 時間きざみを決めるパラメーターで、 X_j の時間微分は、式 (16-b) のように近似する。式 (16) を各時間ステップごとに式 (15) に代入することで、次の時間ステップ(k+1)の未知変数を求める事が出来る。このプロセスでは、予測子・修正子法 (predictor-corrector method) を適用して収束計算を実施している。次に、凍結境界の移動方法であるが、これも同じ様に以下に示す Stefan Condition を満足するように収束計算を行う。

$$\Lambda V_N = (\bar{K}^1 \partial \theta / \partial N)_1 - (\bar{K}^2 \partial \theta / \partial N)_2 = \bar{K}^1 (T_G)_1 - \bar{K}^2 (T_G)_2 \quad (17)$$

内部移動凍結境界上における時間 t^* における法線方向の移動速度 V_N は、以下の式により求める。

$$V_N(at^*) \equiv \frac{s^{k+1} - s^k}{t_{k+1} - t_k} = \frac{1}{\Lambda} [\bar{K}^1 (\bar{T}_G)_1 - \bar{K}^2 (\bar{T}_G)_2] \quad (18)$$

$$(\bar{T}_G)_1 = \beta (T_G)^{k+1} + (1 - \beta)(T_G)^k \quad (19-a); \quad (\bar{T}_G)_2 = \beta (T_G)^{k+1} + (1 - \beta)(T_G)^k \quad (19-b); \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

ここで、 s^k : t_k における凍結境界上の法線方向の座標、 β : 時間きざみを決めるパラメーターを示す。式 (19) を予測子・修正子法により求め式 (18) に代入することで法線速度と移動凍結境界の次の時間における位置が求められる。

5. 結 論

本論文では、多孔質体の混合理論に基づいて、熱・間隙水・応力場の連成問題をFEMにより数値解析する手法の定式化を行った。その際、内部凍結境界に課せられたエネルギー・跳躍条件を満足させるため、時間と共にFEM要素節点を移動させる、計算アルゴリズムを提案した。

<参考文献>

- 1) 市川康明, 1989, '地盤中の熱伝導と熱輸送の数値解析', 土と基礎, 第37巻11号, pp. 81-91
- 2) 木下誠一, 1977, '土の低温特性', 土と基礎, 第25巻7号, pp. 5-9
- 3) R.L.Harlan, 1973, 'Analysis of coupled heat-fluid transport in partially frozen soil', Water Resource Research, Vol.9, No.5.
- 4) S.W.Hopke, 1980, 'A model for frost heave including overburden', Cold Regions Science and Technology (3), pp. 111-127.
- 5) K.O'Neill & R.D.Miller, 1985, 'Exploration of a rigid ice model of frost heave', Water Resource Research, Vol.21, No.3.
- 6) Y.Nakano, 'Transport of water through frozen soils', Ground Freezing 91, Balkema, Rotterdam, pp. 65-70.
- 7) D.R.Lynch & W.G.Gray, 1978, 'Finite element simulation of shallow water problems with moving boundaries', in Finite Elements in Water Resources, Vol.11 (Eds. C.A.Brebbia, W.G.Gray and G.F.Pinder, Pentech Press, London).
- 8) K.O'Neill & D.R.Lynch, 1979, 'A finite element solution for porous medium freezing, using Hermite basis functions and a continuously deforming coordinate system', Int. Conf. Num. Meth. Thermal Problems, Swansea, Wales.