

(24)円形または楕円形トンネルを有する粘弾性岩盤の逆解析

清水建設(株)	正会員	熊坂博夫
山梨大学大学院	学生会員	○ 柴田善央
清水建設(株)	正会員	桜井英行
山梨大学工学部	正会員	平島健一

Back Analysis of Circular or Elliptical Tunnel in Viscoelastic Rock Masses

Hiroo KUMASAKA	Shimizu Corporation
Yoshihisa SHIBATA	Yamanashi University
Hideyuki SAKURAI	Shimizu Corporation
Ken-ichi HIRASHIMA	Yamanashi University

Abstract

In this paper, a back analytical method for the excavation of a circular or an elliptic tunnel in a viscoelastic medium under in-plane and out-of-plane loadings is obtained by use of the theory of linear viscoelasticity and the correspondence principle. The time-dependent behavior of the material of the ground is assumed to be represented by typical rheology models such as Kelvin-, Standard-, and Burgers-models. The practical availabilities of this back analysis are shown by several graphical representations and by the numerical results applied to some virtual measurement data.

1. はじめに

地下構造物等の設置・施工に際し、地山の力学特性値を正確に把握することは安全性、安定性に対し極めて重要であり、種々の現場計測結果から地山の力学特性を推定するための逆解析が行われてきた。

これまでに提案された逆解析法のうち、理論的厳密解による場合は、弾性体を仮定し、かつトンネル断面形は円形断面、荷重状態は静水圧としたものが多い。本論文では弾性問題に対し著者らが最近発表した幾つかの成果^{1)~4)}を踏まえて線形粘弾性体の円形・楕円形の素掘りトンネル周辺における応力、変位等を求めた厳密解としての順解析を応用し、トンネル周辺位置での時間経過に伴う変位から地山の变形係数や初期応力等を推定する逆解析法と、具体的な数値結果を提示する。

2. 解析理論

2-1. 等方性弾性体内の楕円形トンネル問題に対する厳密解

Fig.1 に示すように、奥行き方向に対して形状および荷重変化のない一定断面の楕円形境界 L を有する無限に広がった領域を設定し、その複素平面を $z = x + iy$ とする。この z -平面から ζ -平面への写像関数として次のように設定する。

$$z = \omega(\zeta) = R_0(\zeta + m/\zeta), \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad R_0 = \frac{1}{2}(a+b), \quad m = \frac{a-b}{a+b} \dots\dots\dots (1)$$

上式中の a, b は楕円形境界 L の半軸長さを表す。

この写像関数の ζ -平面上では Fig.1(a) の複素平面上の境界 L が Fig.1(b) の単位円の境界に対応する。

2-1-1 面内問題^{1),2)}

楕円形境界 L に沿うように設定した直交曲線座標系 (ξ, η) での任意位置における応力、変位は複素関数 $\Phi(\zeta), \Psi(\zeta)$ を用いて次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} + \frac{8iG}{\kappa + 1} \bar{\omega} &= 4\Phi^I(\zeta), \quad \sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} = \sigma_x + \sigma_y, \\ \sigma_{\eta} - \sigma_{\xi} + 2i\tau_{\xi\eta} &= (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})e^{2i\phi} \\ &= 2\left\{ \overline{\omega(\zeta)} \cdot \Phi^{II} + \Psi^{II}(\zeta) \right\} e^{2i\phi}, \\ u_{\xi} - iu_{\eta} &= (u_x - iu_y)e^{i\phi} \\ &= \frac{1}{2G} \left[\kappa \overline{\Phi(\zeta)} - \left\{ \overline{\omega(\zeta)} \cdot \Phi^I(\zeta) + \Psi^I(\zeta) \right\} \right] e^{i\phi}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$e^{i\phi} = \frac{\zeta}{|\zeta|} \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}, \quad e^{2i\phi} = \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega(\zeta)}}. \quad (3)$$

上式中の上添え字 I, II は、 z に関してのそれぞれ 1, 2 回の微分を、プライム記号' は ζ による微分を意味する。また、上付きバーは共役を表す。 G はせん断弾性係数、 ν はポアソン比、 κ は平面応力状態のとき $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ 、平面ひずみ状態のとき $\kappa = 3 - 4\nu$ で与えられる。

(無限遠に一様応力 $\sigma_x^{\infty}, \sigma_y^{\infty}, \tau_{xy}^{\infty}$ が作用する場合)

Fig.2 に示したような無限遠方から一様応力 $\sigma_x^{\infty}, \sigma_y^{\infty}, \tau_{xy}^{\infty}$ および $\bar{\omega}^{\infty}$ が作用する場合の線形粘弾性体に対し、式(2)の複素応力関数 $\Phi(\zeta), \Psi(\zeta)$ は次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\zeta) &= R_0 \left\{ A\zeta + \frac{1}{k_0} \cdot \frac{1}{\zeta} (m\bar{A} + 2\bar{B}) \right\}, \quad \Phi^I(\zeta) = \frac{R_0}{\omega'(\zeta)} \left\{ A - \frac{1}{k_0} \cdot \frac{1}{\zeta^2} (m\bar{A} + 2\bar{B}) \right\}, \\ \Phi^{II}(\zeta) &= -\frac{\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^2} \cdot \Phi^I(\zeta) + \frac{R_0}{[\omega'(\zeta)]^2} \cdot \frac{1}{k_0} \cdot \frac{2}{\zeta^3} (m\bar{A} + 2\bar{B}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\Psi^I(\zeta) = \chi(\zeta) - \bar{\omega}(1/\zeta) \cdot \Phi^I(\zeta), \quad \Psi^{II}(\zeta) = \chi^I(\zeta) - \bar{\omega}(1/\zeta) \cdot \Phi^{II}(\zeta) - \frac{\bar{\omega}'(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \cdot \Phi^I(\zeta). \quad (5)$$

$$\omega'(\zeta) = R_0(1 - m/\zeta^2), \quad \omega''(\zeta) = 2mR_0/\zeta^3, \quad \bar{\omega}(1/\zeta) = R_0(m\zeta + 1/\zeta), \quad \bar{\omega}'(1/\zeta) = R_0(m - 1/\zeta^2). \quad (6)$$

式(5)中の $\chi(\zeta), \chi^I(\zeta), A, B$ は次のとおりである。

$$\chi(\zeta) = R_0 \left\{ (mA + 2B)\zeta + k_0 \cdot \frac{\bar{A}}{\zeta^2} \right\}, \quad \chi^I(\zeta) = \frac{R_0}{\omega'(\zeta)} \left\{ (mA + 2B) - 2k_0 \cdot \frac{\bar{A}}{\zeta^3} \right\}. \quad (7)$$

$$A = \frac{1}{4} (\sigma_x^{\infty} + \sigma_y^{\infty}) + \frac{2iG}{\kappa + 1} \bar{\omega}^{\infty}, \quad B = \frac{1}{4} (\sigma_x^{\infty} + \sigma_y^{\infty} + 2i\tau_{xy}^{\infty}). \quad (8)$$

また、係数 k_0 は楕円形境界 L の境界条件が自由境界のとき $k_0 = -1$ 、固定(剛体)境界のとき $k_0 = 1$ をとる。

2-1-2. 面外せん断荷重問題^{3),4)}

面内荷重問題の場合と同様に、Fig.2 の楕円形境界 L に沿う面内の直交曲線座標系 (ξ, η) での応力、変位は複素関数 $F(\zeta)$ を用いて次式で与えられる。

$$\tau_{\xi z} - i\tau_{\eta z} = (\tau_{xz} - i\tau_{yz})e^{i\phi} = F^I(\zeta) \cdot e^{i\phi}, \quad u_z = \frac{1}{2G} \{ F(\zeta) + \overline{F(\zeta)} \} = \frac{1}{G} \text{Re}[F(\zeta)], \quad e^{i\phi} = \frac{\zeta}{|\zeta|} \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}. \quad (9)$$

(無限遠に一様なせん断応力 $\tau_{xz}^{\infty}, \tau_{yz}^{\infty}$ が作用する場合)

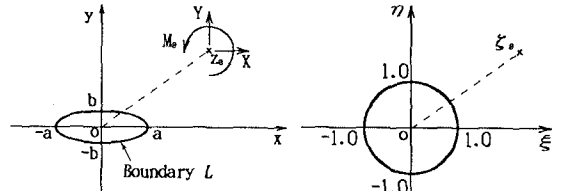


Fig.1 Physical plane with elliptic boundary L and its mapping plane. (a) z -plane, (b) ζ -plane.

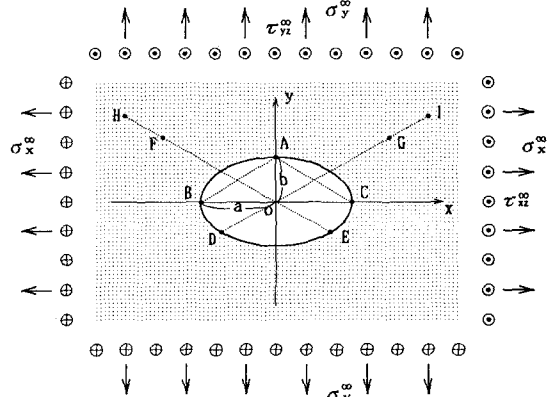


Fig.2 In-plane and out-of-plane problem of infinite medium with elliptic boundary L under $\sigma_x^{\infty}, \sigma_y^{\infty}, \tau_{xy}^{\infty}, \tau_{xz}^{\infty}$ and τ_{yz}^{∞} applied at infinity.

線形弾性体に対し、式 (9) における複素関数 $F(\zeta)$, $F^I(\zeta)$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} F(\zeta) &= R_0(C\zeta - k_1\bar{C}/\zeta), \\ F^I(\zeta) &= R_0(C + k_1\bar{C}/\zeta^2), \\ C &= \tau_{xz}^\infty - i\tau_{yz}^\infty. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

上式中の係数 k_1 は楕円形境界 L が自由境界のとき $k_1 = -1$ 、固定 (剛体) 境界のとき $k_1 = 1$ をとる。

2-2. 内部に楕円形境界を有する線形粘弾性問題の解

釣合式、幾何式は弾性体のみならず粘弾性体の場合も全く同一のものが成立する。これに対し、線形粘弾性体においては時間依存性応力-ひずみ関係となり、それぞれの線形粘弾性モデルにより異なる。

応力成分 τ_{ij} を偏差成分 s_{ij} と体積成分 σ_{ij} に分解すると、線形粘弾性体の構成式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} P_1(D)P_2(D)\tau_{ij} &= Q_1(D)P_2(D)e_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}[P_1(D)Q_2(D) - Q_1(D)P_2(D)]e, \\ P_1(D)s_{ij} &= Q_1(D)e_{ij}, \quad P_2(D)\sigma = Q_2(D)e. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 D は $\partial/\partial t$ なる微分演算子である。

$P_k(D), Q_k(D)$ ($k=1, 2$) は Fig.3 に表す一般的な線形粘弾性モデルに対し Table-1 のように与えられる。

式 (3) の $s_{ij}, e_{ij}, \sigma, e$ は時刻 $t=0$ ですべての零条件を満足するものと仮定し、両辺の Laplace 変換を実行する。そのとき、 $\tilde{G}(s), \tilde{K}(s), \tilde{\lambda}(s)$ に対して次の関係が成立する。

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{2} \frac{Q_1(s)}{P_1(s)}, \quad \tilde{K}(s) = \frac{1}{3} \frac{Q_2(s)}{P_2(s)}, \quad \tilde{\lambda}(s) = \tilde{K}(s) - \frac{2}{3} \tilde{G}(s). \quad \dots\dots\dots (12)$$

同様に、 $\tilde{E}(s), \tilde{\nu}(s)$ に対して、次の関係が成立する。

$$\tilde{E}(s) = \frac{3Q_1(s)Q_2(s)}{2P_1(s)Q_2(s) + P_2(s)Q_1(s)}, \quad \tilde{\nu}(s) = \frac{P_1(s)Q_2(s) - Q_1(s)P_2(s)}{2P_1(s)Q_2(s) + P_2(s)Q_1(s)}. \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで線形粘弾性体に対する対応原理によれば、前節の、内部に楕円形境界 L を有する弾性体の厳密解がそのまま今対象としている粘弾性体に対する Laplace 変換解となる。したがって、式 (12), (13) の粘弾性定数 $\tilde{G}, \tilde{\lambda}, \tilde{K}, \tilde{E}, \tilde{\nu}$ を逆 Laplace 変換し、代入することにより粘弾性解が得られる。

3. 楕円形トンネルを有する粘弾性岩盤の逆解析³⁾

逆解析法として、前節において述べた、内部に楕円形境界を有する線形粘弾性問題の厳密解を用いた直接定式化法を用いる。

ここで採用する粘弾性モデルとして、前節で示した Burgers-Elastic モデルを採用する。同定パラメータは面内荷重問題に対し、Fig.3(e) における $\nu_1, \nu_2, \eta_1, \eta_2$, 体積弾性係数 K , および σ_x^∞ とし、同様に面外せん断荷重問題に対し、 $\nu_1, \nu_2, \eta_1, \eta_2$, 地山の面外荷重 τ_0^∞ , 作用方向角 ϕ とする。

入力データは、A-B, A-C, B-C, O-A 各測点で測定された変位量 $\Delta L_{AB}, \Delta L_{AC}, \Delta L_{BC}, \Delta L_{OA}$ と、次に示す D-G, E-F, G-I, F-H 間の半径方向変位とする。

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\Delta L_{AB}}{L_{AB}}, \quad \varepsilon_{AC} = \frac{\Delta L_{AC}}{L_{AC}}, \quad \varepsilon_{BC} = \frac{\Delta L_{BC}}{L_{BC}}, \quad \varepsilon_{OA} = \frac{\Delta L_{OA}}{L_{OA}}. \quad \dots\dots\dots (14)$$

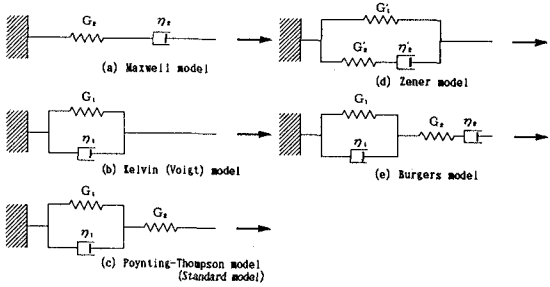


Fig.3 Various linear viscoelastic models.

Table-1 Differential operators $P_1(D)$ and $Q_1(D)$ for various linear viscoelastic models.

Model	$P_1(D)$	$Q_1(D)$
(a) Maxwell	$\frac{G_1}{\eta_1}D + 1$	$2\eta_2 D$
(b) Kelvin	1	$2(G_1 + \eta_1 D)$
(c) Standard	$D + \frac{G_1}{\eta_1} \left(1 + \frac{G_2}{G_1}\right)$	$2 \left\{ G_2 D + \frac{G_1 G_2}{\eta_1} \right\}$
(d) Zener	$D + \frac{G_1}{\eta_1}$	$2 \left\{ (G_1 + G_2) D + \frac{G_1 G_2}{\eta_1} \right\}$
(e) Burgers	$\frac{G_1 G_2}{G_1 \eta_1} D^2 + \left(\frac{G_1}{\eta_1} + \frac{G_2}{\eta_1} + \frac{G_1}{\eta_2} \right) D + 1$	$2 \left(\frac{G_1 G_2}{\eta_1} D^2 + \eta_2 D \right)$

D-G, E-F, G-I, F-H 間の半径方向変位をそれぞれ $u_{r1}, u_{r2}, u_{r3}, u_{r4}$ とし、以上の 8 データを入力する。

A~I 各点の変位は、式 (2), (3) に前述の同定パラメータを与えることにより求めることができる。これにより、 $\varepsilon_{AB}, \varepsilon_{AC}, \varepsilon_{BC}, \varepsilon_{OA}, u_{r1}, u_{r2}, u_{r3}, u_{r4}$ を決定でき、それぞれ $\varepsilon_{AB}^*, \varepsilon_{AC}^*, \varepsilon_{BC}^*, \varepsilon_{OA}^*, u_{r1}^*, u_{r2}^*, u_{r3}^*, u_{r4}^*$ とする。さらに同定パラメータを変化させて入力データとこれらの値との関係が次の関係を満たすまで繰り返し計算を行い、最適な同定パラメータを決定する。

$$(\varepsilon_{AB} - \varepsilon_{AB}^*)^2 + (\varepsilon_{AC} - \varepsilon_{AC}^*)^2 + (\varepsilon_{BC} - \varepsilon_{BC}^*)^2 + (\varepsilon_{OA} - \varepsilon_{OA}^*)^2 + (u_{r1} - u_{r1}^*)^2 + (u_{r2} - u_{r2}^*)^2 + (u_{r3} - u_{r3}^*)^2 + (u_{r4} - u_{r4}^*)^2 < \varepsilon_{er}^* \quad (15)$$

ここに、 ε_{er}^* は許容誤差を表す。

同様に、面外問題に対して奥行き方向の変位を $\Delta L_{zAB}, \Delta L_{zAC}, \Delta L_{zBC}, \Delta L_{zOA}$ とし、次の入力データを採用する。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{AB} &= \frac{\Delta L_{zAB}}{L_{AB}}, & \varepsilon_{AC} &= \frac{\Delta L_{zAC}}{L_{AC}}, \\ \varepsilon_{BC} &= \frac{\Delta L_{zBC}}{L_{BC}}, & \varepsilon_{OA} &= \frac{\Delta L_{zOA}}{L_{OA}}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

そして、次式の関係が満足するまでパラメータを変化させて繰り返し計算を行い、最適な同定パラメータを決定する。

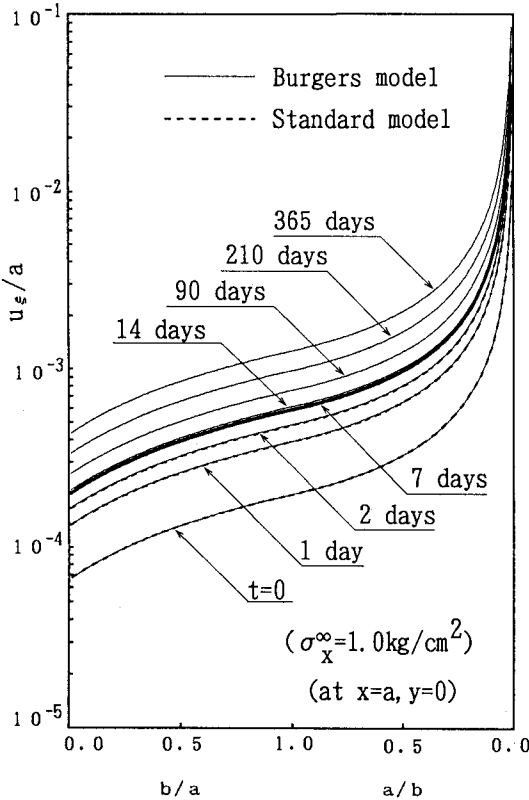


Fig.5 Time variations of displacement at the typical points of free boundary of elliptic tunnel for the cases of Burgers and Standard models, u_z at $x=a, y=0$.

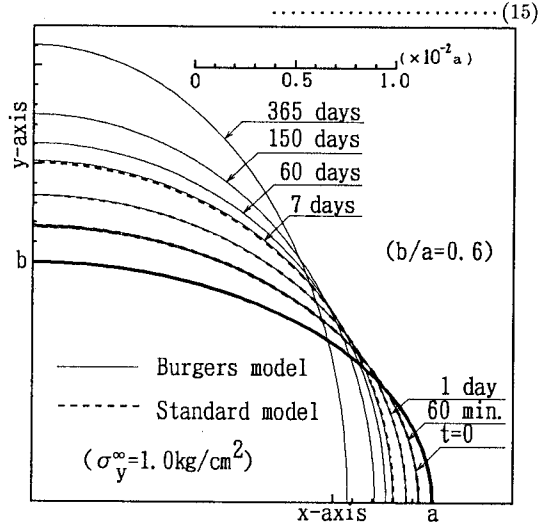


Fig.4 Time variations of composed displacement of free boundary of elliptic tunnel ($b/a = 0.6$) for the cases of Burgers and Standard models, stress σ .

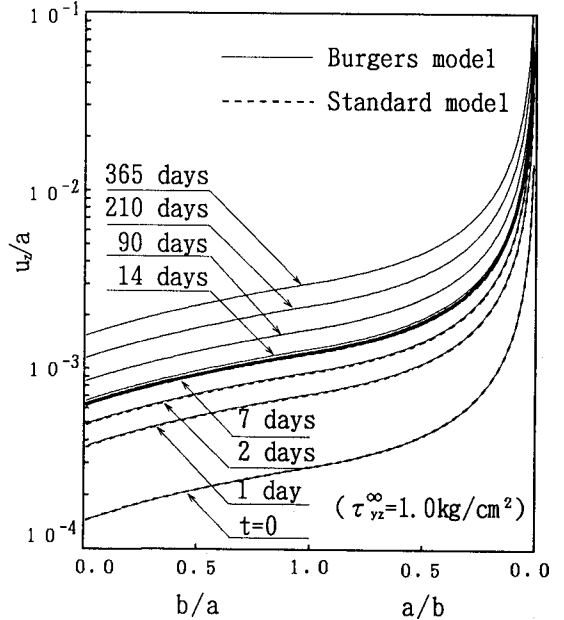


Fig.6 Time variations of displacement u_z at $\theta = 90^\circ$ (i.e. $x=0, y=b$) of free boundary of elliptic tunnel for the cases of Burgers model and Standard model.

Table-2 Input data for strains and displacements.

day	ϵ_{AB}	ϵ_{AC}	ϵ_{BC}	ϵ_{OA}	u_{r1}	u_{r2}	u_{r3}	u_{r4}
1 day	0.628E-05	-0.872E-05	0.628E-05	0.479E-04	0.135E-03	0.135E-03	0.830E-05	0.830E-05
7 days	0.126E-04	-0.899E-05	0.126E-04	0.727E-04	0.212E-03	0.212E-03	0.157E-04	0.157E-04

$$\left. \begin{aligned} &(\epsilon_{AB} - \epsilon_{AB}^*)^2 + (\epsilon_{AC} - \epsilon_{AC}^*)^2 + (\epsilon_{BC} - \epsilon_{BC}^*)^2 \\ &+ (\epsilon_{OA} - \epsilon_{OA}^*)^2 < \epsilon_{cr}^* \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Table-3 Input data for strains.

day	ϵ_{AB}	ϵ_{AC}	ϵ_{BC}	ϵ_{OA}
1 day	0.110E-03	-0.641E-04	-0.495E-12	0.107E-03
7 days	0.190E-03	0.111E-03	-0.856E-12	0.185E-03

Table-4 The inverse solution for Table-2.

$$G_1 = 0.2100E+05 \quad G_2 = 0.5200E+05$$

$$\eta_1 = 0.5000E+08 \quad \eta_2 = 0.4700E+10$$

$$K = 0.5100E+05 \quad \sigma_x = 0.0000E+00$$

$$\text{誤差}^2 = 0.2865E-10$$

Table-5 The inverse solution for Table-3.

$$G_1 = 0.2100E+05 \quad G_2 = 0.5000E+05$$

$$\eta_1 = 0.5900E+08 \quad \eta_2 = 0.3810E+10$$

$$\beta = 0.4500E+02 \quad \tau = 0.1414E+01$$

$$\text{誤差}^2 = 0.9239E-11$$

4. 数値計算例

2-2において境界Lが自由境界であり、無限遠荷重 $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$ 作用下での境界Lにおいて生じる合成変位(その点での法線方向および接線方向の変位成分をベクトル合成したもの)を楕円形トンネルの形状比として $b/a = 0.6$ とした場合の代表的な数値例をFig.4に示す。粘弾性モデルとしてBurgers-ElasticモデルおよびStandard-Elasticモデルの両方について示されている。Standard-Elasticモデルにおいては荷重作用後7日で変形の進行が停止し、収束するのに対し、Burgers-Elasticモデルでは変形は継続する。

次に、この楕円形状比 b/a の全ての場合についてプロットしたものがFig.5、Fig.6である。Standardモデル

では7日で変形の進行が停止するのに対し、Burgersモデルは収束せず、それ以降も変形は継続する。

次に上述の方法を用いた逆解析の一例を示す。Table-2、Table-3はそれぞれ面内問題、面外問題の入力データを示す。この表に示す値としたものを用いる。

Table-4、Table-5にそれらの入力データを用いた場合の逆解析結果を示す。誤差の二乗和は 10^{-10} 程度となり、ひずみのオーダーが 10^{-3} であることから判断して良好な結果が得られた。

5. おわりに

本論文では、線形粘弾性体内に掘削された円形または楕円形トンネル周辺の応力、変位に対する厳密解を応用し、その逆解析法を提示した。十分長いトンネルに対して任意方向傾斜の3次元的な主応力荷重下での変形係数を算定することができた。

参考文献

- 1) 平島健一・木村清和・広瀬幸雄：だ円形の空孔または剛体介在物を有する面内・面外問題の解析解とその応用(第1報、等方性面内問題に対する基礎理論)，日本機械学会論文集(A編)，Vol.57，No.540，pp.1897~1904，1991.
- 2) 平島健一・木村清和・広瀬幸雄：だ円形の空孔または剛体介在物を有する面内・面外問題の解析解とその応用(第2報、等方性面内問題に対する数値計算例)，日本機械学会論文集(A編)，Vol.57，No.542，pp.2516~2522，1991.
- 3) 平島健一・川上哲太郎・藤原紀夫・山下幸夫：弾性厳密解に基づく円形・楕円形トンネルを有する等方性および異方性岩盤の逆解析，土木学会論文集，No.439/III-17，pp.1~8，1991.
- 4) 平島健一・川上哲太郎・藤原紀夫・山下幸夫：面外せん断荷重下の等方性・異方性弾性岩盤内の素掘トンネル掘削問題に関する順解析および逆解析，土木学会論文集，No.436/III-16，pp.37~45，1991.