

(10) 動的荷重における亀裂の等価的な力学特性について

(株) 情報数理研究所 ○ 韓 思雄

(株) 情報数理研究所 中井仁彦

埼玉大学工学部 浜島良吉

A Numerical Model for Crack-Propagating under Dynamic Loads

Sixiong HAN, Inf. & Math. Sci. Lab. Inc.

Yoshihiko NAKAI, Inf. & Math. Sci. Lab. Inc.

Ryokichi HAMAJIMA, Saitama University

Abstract

This paper deals with the problem of plane waves in a body embeds cracks. A numerical method, called equivalent nodal force (ENF) method which instead of modeling the crack directly, the effect of cracks is translated into that of an equivalent nodal force in a numerical procedure, is used to evaluate the mechanical effects of cracks. In this paper, we make an extension of this method for describing crack-propagating phenomenon by combination with a conventional mechanical model.

1. はじめに

材料の亀裂の微視的な力学効果を考慮する必要がある波動問題に対しての解析手法としては従来の有限要素法に代表されるように亀裂を陽的にモデリング化し、これを数値解析に組み込むもの、と直接積分方程式を解くことにより理論解または数値解を求める二種類がある。前者の方法では支配方程式の空間での離散スキームが亀裂の幾何学特性に依存し、亀裂の進展などの力学現象を記述できる範囲が制限されるという問題点があり、後者の方法では初期・境界条件によって解ける問題の数が限られている。

著者らは亀裂を直接にモデリングするかわりに、その等価的な力学効果に注目して新しい数値解析モデルである等価節点力法 (Equivalent Nodal Force Method) を提案した^{1),2),3)}。この数値解析法では平面波動場における亀裂の力学効果を等価的な節点力に置き換え、結果として不連続材料をそれと等価的な連続体として取り扱うことになる。この方法としては上に述べた二つの手法の中間に位置すると思われる。本報告では [1] の結果を踏まえて、この等価節点力法を従来の力学モデルと結合し、平面波動場における亀裂の進展を記述できる力学モデルを提案した。また数値解析を実施し、亀裂の進行状況が提案した力学モデルにより正確にシミュレーションされることを確認した。

2. 波動場における亀裂の等価的な力学効果と亀裂進展の定式化

図1に示すような N 個の亀裂を含む物体 D を考える。第 k 番目の亀裂の長さを $2l^k$ とし、亀裂の中心にローカル座標系 $O_k\zeta$ を置く。亀裂上にある座標値 ξ が $\xi = x_0^k + \tau^k\zeta$, $-l^k \leq \zeta \leq l^k$ で表示され、 ζ がローカル座標系上の座標値である。ここで x_0^k は全体座標系における k 番目亀裂の中心点の座標で、 τ^k はその亀裂上にある単位ベクトルである

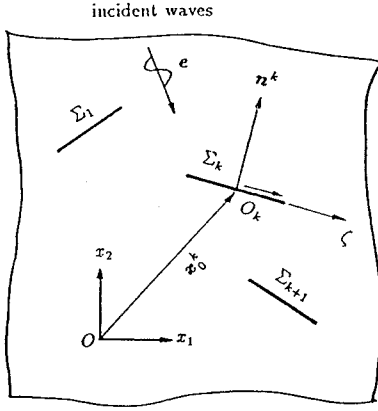


Fig.1 Configuration of cracks²⁾

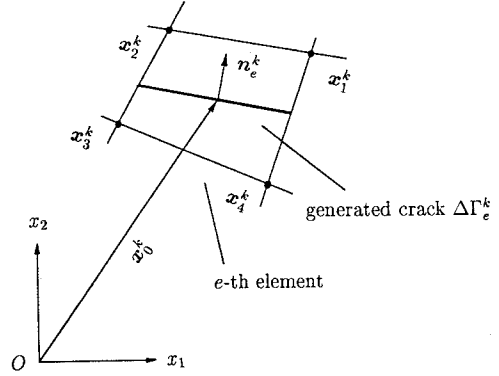


Fig.2 Crack generated in a 4-noded isoparametric element

等価節点力法は波動場における材料内の亀裂の力学効果を有限要素法を用いる数値解析モデルに節点力として評価する。すなわち、不連続波動場における支配方程式 ([1] の式 (17)) が

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{P\} + \{P^*\} \quad (1)$$

となる。ここで $[M]$ 、 $[K]$ と $\{P\}$ はそれぞれ材料が連続体とした場合の質量マトリックス、剛性マトリックス及び荷重ベクトルを表す。不連続性効果を表す等価的な節点力は次式で与えられる。

$$\{P^*\} = \sum_{S_e} \int_{D_e} ([N]^e)^T \{F\} dV \quad (2)$$

ただし $[N]^e$ は要素の形状関数を表し、関数 F は次式で与えられる。

$$F(x, t) = \sum_{S_e} \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_e^k} \rho f^k(x, x_0^k + \tau^k\zeta, t) d\zeta \quad (3)$$

ここで S_e は e 番目の要素の領域で、 $\Gamma_e^k = \Sigma_k \cap S_e$ は k 番目の亀裂が e 番目の要素に占める領域を表す。 f^k は物体力関数である¹⁾。

第 k 番目の亀裂 Σ_k の長さが $\Delta\Sigma'_k$ 進展したとすれば、[2] の式 (27) により

$$\Delta F(x, t) = \sum_{S_e} \int_{\Delta \Gamma_e^k} f(x, \xi, t) dl(\xi) \quad (4)$$

となる。それに対応する等価節点力の増分は次式となる。

$$\{\Delta P^*\} = \sum_{S_e} \int_{D_e} ([N]^e)^T \{\Delta F\} dV \quad (5)$$

ところが、要素内で亀裂の発生により変位が不連続となるとともに亀裂表面の応力の解放が生じ、これにより亀裂周辺の波動場に影響を与える。すなわち、亀裂の進展・発生などの力学現象は変位波動場だけで考えるのは不十分と思われる。[1] の式 (9) における亀裂の表面力を考慮する項を残す必要がある。変位波動と同じような変換を行い、亀裂が発生すると判定された要素に対して、繰り返し計算の次のステップには要素における亀裂の生成により放出された応力波の効果に関するタームとして次の節点力

$$\{\Delta P^o\} = \sum_{S_e} \int_{\Delta \Gamma_e^k} ([N]^e)^T ([\sigma]^T \{n_e^k\}) dl \quad (6)$$

を増分荷重として加えて計算する必要がある。 $\{n_e^k\}$ は $\Delta \Gamma_e^k$ の単位法線ベクトルである (図 2)。

要素に生成される亀裂の法線ベクトルはせん断破壊と引っ張り破壊状態に対してそれぞれ最大せん断応力方向と最大引っ張り応力方向に一致すると考える⁴⁾。各要素における破壊判定が次の Mohr-Coulomb 基準により行われる。

$$\tau_c = C - \sigma_N \tan \phi \quad (7)$$

ただし、式に $\sigma_N = (\sigma_{11} + \sigma_{33})/2$ 。また C と ϕ はそれぞれ粘着力と摩擦角を表す。

数値解析は次のようなプロセスで行う：

- $|\tau_{max}| < |\tau_c|$ (τ_{max} が最大せん断応力) の場合には、要素が弾性状態で、次のステップへ
- $|\tau_{max}| \geq |\tau_c|$ の場合には、要素が破壊状態にあって、 $\sigma_N \leq C \cot \phi$ の時せん断破壊で、 $\sigma_N > C \cot \phi$ のとき、引っ張り破壊である。

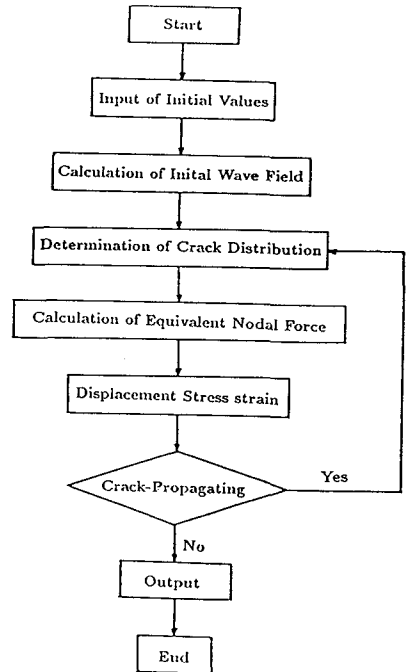


Fig.3 Flow chart of ENF method

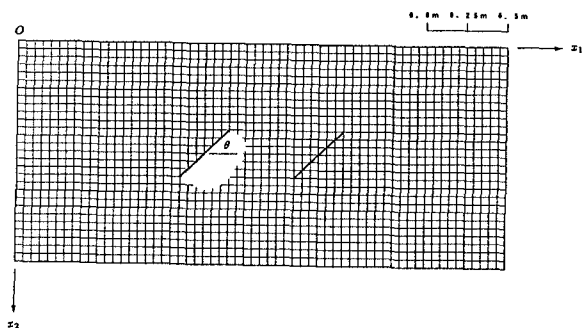
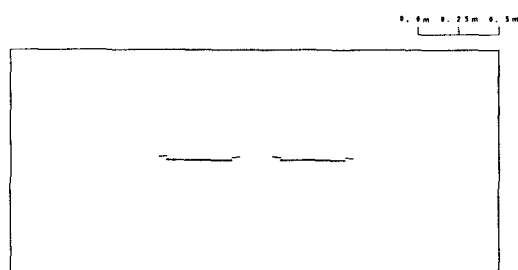
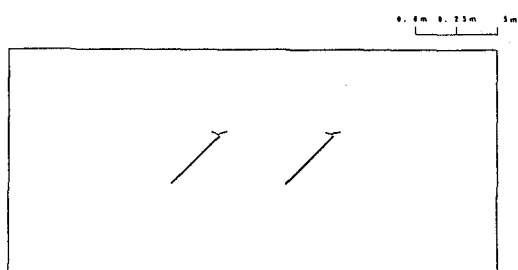


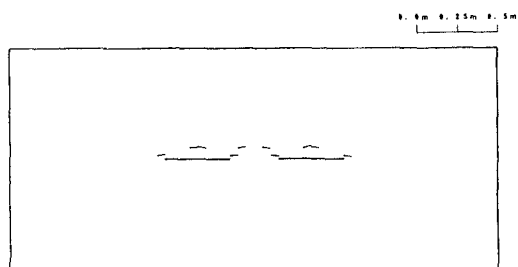
Fig.4 Specimen for numerical calculation



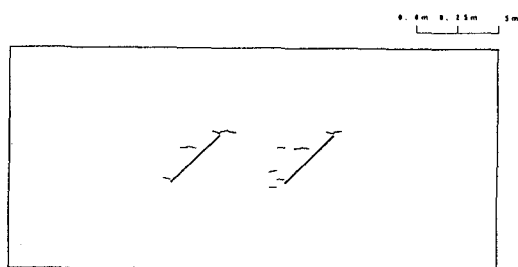
(a) $t = 0.03s$



(c) $t = 0.03s$



(b) $t = 0.07s$



(d) $t = 0.07s$

Fig.5 Progressive crack-propagating

生成した亀裂が要素内のつぎの点を通過すると考える

$$x_0^k = \sum_{p=1}^q x_p^k / q \quad (8)$$

ここに x_p^k がこの要素の p 番目の節点座標値で、 q がその要素の総節点数を表す。

以上をまとめると、この解析プロセスが図3のフローチャートに示される。

3. 解析例

数値計算モデルを図4に示す。また材料係数は： $V_p = 2000\text{m/s}$, $V_s = 1600\text{m/s}$, $\rho = 2.5\text{t/m}^3$, $C = 2.0\text{Mpa}$, $\phi = 30^\circ$ 。シミュレーション用の供試体の大きさは $3.0 \times 1.4\text{m}^2$ の長方形で、数値解析のメッシュはすべて $0.05 \times 0.05\text{m}^2$ の正方形である。供試体には図4に示す2本の亀裂が配置され、 $\theta = 0^\circ, 90^\circ$ の二ケースを計算した。

入力波動場は $u_i^I(x) = d_i A_L e^{x \cdot P}$ とし、変位と進行波ベクトルは $d_i = p_i = \delta_{3i}$ とする。入力変位波の振幅 $A_L = 0.012\text{cm}$, 周波数 $f = 50\text{Hz}$ とし、時間スキーム 50ms の中心差分法を用いた。

時間ごとの亀裂発生状態の結果をまとめて、図5に示す。図から亀裂進展の様子が正確にシミュレートされているがわかる。

今回提案したモデルが亀裂の発生状態を正確に記述できるかどうかのみについて考察した。著者らは現在、より特殊な問題に対して理論解と比較しながら、実際問題に関連し各力学量に対してさらに詳細な検討を行っている。

参考文献

- [1] Han, S. et al, 'A numerical evaluation method of waves in rock mass with cracks', 土木学会論文集, 412(III-12), pp.173-182(1989).
- [2] Han, S. et al, 'An analysis method for elastic wave propagation in material involving cracks', *Int. J. Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 10(6), pp.313-322(1991).
- [3] Han, S. et al, 'Numerical modeling for scattering of waves in three-dimensional cracked material', *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*(accepted for publication).
- [4] ジェーガー J. C.(飯田汲事訳), 弾性・破壊・流動論, 共立全書, 1980.