

(9)要素変形を考慮した不連続体解析による脆性材料の 変形強度解析

三井建設(株) ○鈴木隆次
埼玉大学工学部 正会員 浜島良吉

Displacement and strength analysis of brittle material through
discontinuous analysis considering elemental deformation

Takatsugu SUZUKI, Mitsui Construction Co., Ltd.
Ryokichi HAMAJIMA, Saitama University

Abstract

As the structure of concrete, rock masses, etc. becomes larger in size, the size has a more significant effect in the analysis of such a structure consisting of brittle materials. For the overall evaluation of such a structure, a strain softening analysis must be made through the discontinuous analysis considering the elemental deformations.

In this paper, analysis was made using both modified virtual stress method and modified virtual displacement method. As the result, it has been made clear that while only two-dimensional triangular elements are applicable in the modified virtual stress method, the three-dimensional arbitrary polygonal elements are applicable in the modified virtual displacement method, which this has a very wide application and can also facilitate the strain softening analysis.

1. はじめに

コンクリート、岩盤等の構造物が大型化するにつれ、こうした脆性材料からなる構造物の解析における寸法効果は極めて重要である。こうした寸法効果に関しては、連続体的なアプローチと不連続体的なアプローチがなされているが、おそらく両者を兼ね備えた形での解析が必要とされるように思われる。そうした見地から、本研究では要素変形を考慮し、かつ、滑り、開口の不連続性をも考慮し得る解析手法について述べる。

要素境界上での変位の連続性や応力のつり合い条件をゆるめた変分原理として、Pian¹⁾によって提案された modified potential energy principle 及び modified complementary energy principle は、鷲津¹⁾により仮の名称と断られてハイブリット型ポテンシャルエネルギーの原理及びハイブリット型のコンプリメンタリエネルギーの原理、さらに、ハイブリット型仮想仕事の原理、ハイブリット型補仮想仕事の原理として定式化され紹介されている。このハイブリット型という名称は一般にはその内容がわかりづらく、ここでは modified virtual stress method 及び modified virtual displacement method に対し修正仮想応力法、及び修正仮想変位法とした。

2. 要素内変形を考慮した不連続体解析の定式化

2.1 修正仮想応力法に基づく定式化

これまで modified stress model が主として研究されているが、Pian が述べているように、これは要素内で仮定する応力の自由度と要素境界上で仮定する変位の自由度との適当な組み合わせの選択である。一般的に3次元場で以下のように定式化される¹⁾

$$\sum_e \iiint_{V_e} \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \sum_s \delta \iint_{S_{ab}} \mu_i (T_i^{(a)} + T_i^{(b)}) dS - \iint_{S_u} \bar{u}_i \delta T_i dS = 0 \quad (1)$$

割はメッシュジェネレータとしても適しており、3次元地殻構造解析には威力を発揮する。また式(7)の定式化は式(5)の修正仮想変位法に基づくものであり、動的解析、有限変形解析、さらに熱、流体、応力との連成解析への発展その他通常の有限要素法と同様の解析が可能である。

3. 亀裂進展に伴う境界辺の応力解放

修正仮想応力法では亀裂開口面での応力を解放するといった解析が出来ないが、本解析においては、要素境界面の応力の解放が可能である。

3.1 応力解放に必要な等価荷重

外力のなす仮想仕事 δW_0 は次式で与えられる。

$$\delta W_0 = [\{u^*\}^T \{\varepsilon^*\}^T] \begin{bmatrix} \{F_u\} \\ \{F_\varepsilon\} \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここで、 $\{F_u\}$ 、 $\{F_\varepsilon\}$ は等価荷重である。ここで $\{F_u\}$ 、 $\{F_\varepsilon\}$ はそれぞれ要素重心点に作用する等価荷重及び要素内にひずみ $\{\varepsilon\}$ を生じさせる等価荷重である。

境界辺上の表面力のなす仮想仕事 δW_i は次式で与えられる。

$$\delta W_i = \int \{\delta^*\}^T \{\sigma_{spg}\} ds \quad (9)$$

ここで、 $\{\sigma_{spg}\}$ は解放すべきバネ応力であり、要素境界辺上で線形変化し、相対変位 $\{\delta\}$ を用い $\{\sigma_{spg}\} = [DH] \{\delta\}$ で与えられる。これより

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int (\{u^*\}^T [B_{du}]^T + \{\varepsilon^*\}^T [B_{d\varepsilon}]^T) [DH] \{\delta\} ds \\ &= \int (\{u^*\}^T [B_{du}]^T + \{\varepsilon^*\}^T [B_{d\varepsilon}]^T) [DH] ([B_{du}]\{u\} + [B_{d\varepsilon}]\{\varepsilon\}) ds \\ &= \{u^*\}^T ([k_{uu}]\{u\} + [k_{u\varepsilon}]\{\varepsilon\}) + \{\varepsilon^*\}^T ([k_{\varepsilon u}]\{u\} + [k_{\varepsilon\varepsilon}]\{\varepsilon\}) \end{aligned} \quad (10)$$

従って、仮想仕事の原理 $\delta W_0 = \delta W_i$ より解放力 $\{F_u\}$ 、 $\{F_\varepsilon\}$ は次のようになる。

$$\therefore \{u^*\}^T \{F_u\} + \{\varepsilon^*\}^T \{F_\varepsilon\} \quad (11)$$

従って、解放力 $\{F_u\}$ 、 $\{F_\varepsilon\}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \{F_u\} &= [k_{uu}]\{u\} + [k_{u\varepsilon}]\{\varepsilon\} \\ \{F_\varepsilon\} &= [k_{\varepsilon u}]\{u\} + [k_{\varepsilon\varepsilon}]\{\varepsilon\} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $[k_{uu}]$ 、 $[k_{u\varepsilon}]$ 、 $[k_{\varepsilon u}]$ 、 $[k_{\varepsilon\varepsilon}]$ はバネ剛性行列

$\{u\}$ はバネを構成する2要素の剛体変位

$\{\varepsilon\}$ はバネを構成する2要素の要素内ひずみ

3.2 簡易計算法に基づく応力解放

式(9)において $\{\sigma_{spg}\}$ を境界辺の midpoint の応力 $\{\sigma_{spg}\}_m$ で代表することにすれば式(10)は以下のようになる。

$$\delta W_i = \int (\{u^*\}^T [B_{du}]^T + \{\varepsilon^*\}^T [B_{d\varepsilon}]^T) \{\sigma_{spg}\}_m ds \quad (13)$$

となり積分は容易に得られるが、境界辺の midpoint で代表される均一応力分布を考えるため境界辺のモーメント成分を無視することになり、これに対する影響度をチェックする必要がある。図-1 にバネ境界応力の考え方の模式図を示す。

4. 解析例

4.1 荷重制御に基づく応力解放

引張破壊による応力解放をチェックするため図-2 に示すモデルに対し A-B 境界線上、下側の要素に下向き荷重を作用させた場合の解析を行った。物性値を表-1 に、解析結果の変位図を図-3 (a)、(b)、図-4 (a)、(b) に示す。図-3 は要素内剛性を非常に大きくして RBSM に近づけた計算手法 (Limit

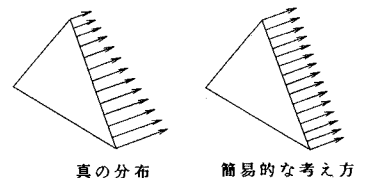


図-1 バネ境界応力分布の考え方

ここに

$$\begin{aligned} (\delta \sigma_{ij})_{,j} &= 0; \quad V \text{内} \\ \delta T_i &= 0; \quad S_0 \text{上} \end{aligned} \quad (2)$$

を満足しなければならない。

ここで $\sum_a, \sum_b$ はそれぞれ境界辺及び要素毎に重ね合わせることを意味する。また、 $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ は要素内のひずみ及び応力であり $T_i^{(a)}, T_i^{(b)}$ は要素(a), (b)境界辺における境界応力、そして μ_i は Lagrange の未定乗数である。また u_i は変位境界 S_0 上の変位であり T_i は応力境界 S_σ 上の応力である。ここで材料の降伏条件式、仮想ひび割れモデルは、ラグランジェの未定乗数を用いて式(1)の変分原理に導入される。この修正仮想応力法により、2次元問題としてコンクリート3点曲げにおける引張り破壊軟化解析等を行ったが、以下のような問題点を有することが明らかとなった。

- ① 3角形要素以外の適用が困難である。
- ② 3次元への適用が困難である。
- ③ ひずみ軟化度が大きくなると解析不能となるが、これに対して、境界辺の応力を解放するといった解析が出来ない。そのためコンクリート、岩盤といった引張り亀裂の卓越する問題には不向きである。
- ④ 定式化が複雑であり、熱、流体との連成解析が困難である。

こうしたことを踏まえて以下の修正仮想変位法による定式化をおこない、引張り破壊に基づく亀裂面の応力解放についての検討を行った。

2.2 修正仮想変位法に基づく定式化

修正仮想変位法は一般的に3次元場で以下のように定式化される¹⁾

$$\sum_a \iiint_{V_a} [\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - \bar{F}_i \delta u_i] dV - \sum_b \iint_{S_{ab}} \lambda_i (u_i^{(a)} - u_i^{(b)}) dS - \iint_{S_\sigma} \bar{T}_i \delta u_i dS = 0 \quad (3)$$

ここに

$$\begin{aligned} 2 \delta \varepsilon_{ij} &= (\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i}; \quad V \text{内} \\ \delta u_i &= 0; \quad S_0 \text{上} \end{aligned} \quad (4)$$

を満足しなければならない。ここで $u_i^{(a)}, u_i^{(b)}$ は要素(a), (b)境界辺における変位である。

2次元場においては結局以下のように書き表される

$$\sum_a \iint \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dA + \sum_b \int f_i \delta (\delta_i) ds - \sum_a \iint \bar{F}_i \delta u_i - \sum_b \int \bar{T}_i \delta u_i ds = 0 \quad (5)$$

ここで式(3)におけるLagrangeの未定乗数 λ_i は物理的には2つの要素境界辺における境界力 f_i であり、 δ_i はそこにおける相対変位である。

ここで変位関数に対しては要素重心点の剛体変位 $\{u\}$ 、要素内ひずみ $\{\varepsilon\}$ の和で表す。ここで変位関数は

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(y-y_g) \\ 0 & 1 & x-x_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} x-x_g & 0 & (y-y_g)/2 \\ 0 & y-y_g & (x-x_g)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ただし x_g, y_g は要素重心点の座標値である。

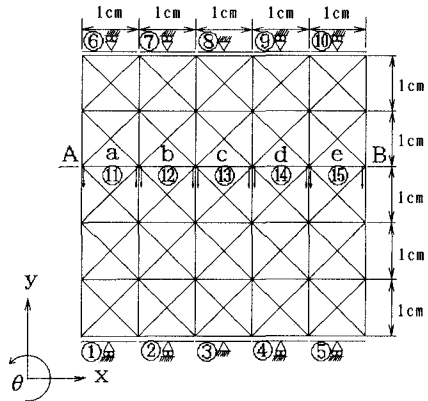
これより次式が得られる

$$\begin{aligned} \sum_a [K_{uu}]\{u\} + \sum_b [K_{ue}]\{\varepsilon\} &= \{F_u\} \\ \sum_b [K_{eu}]\{u\} + \sum_b ([K_{ee}] + A[D])\{\varepsilon\} &= \{F_\varepsilon\} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで第一近似 $[K_{uu}]\{u\} = \{F_u\}$ は剛体バネモデルの解である。これは要素内の剛性が大きくその結果要素内のひずみが小さくなった場合に相当する。これに対し要素間の剛性を大きくすればこの解は従来の有限要素法の解に近づくことになる。

本解析法では剛体変位と要素内歪を分離した形で解が得られるが、これによって要素毎に変形を独自に定めることができ、その結果として要素間での相対変位を求めることが可能となり不連続体としての解析が可能となる。また式(6)のように変位関数を選ぶことにより要素形状の制約がなくなり任意の多角形モデルを使用することができ、結晶構造モデルに適したボロノイ分割の使用が可能となる。このボロノイ分

RBSM)、図-4 は要素間剛性を非常に大きくして F E M に近づけた計算手法 (Limit FESM) による解析結果であり、両方とも (a) が要素境界辺の応力を簡易的な考え方で計算したもの、(b) が厳密な考え方で計算したものである。その結果 Limit RBSM、Limit FESM とともに簡易的な考え方の場合引張破壊後も応力が残留し、変形の誤差が大きいくことがわかった。



境界条件 要素①②④⑤⑥⑦⑨⑩; $v = \theta = 0, \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$
 要素③⑧; $u = v = \theta = 0, \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$
 荷重条件 要素①②③④⑤; $f u_y = -1.0 \text{ (kgf)}$
 $f \varepsilon_y = -0.166666 \text{ (kgf)}$

図-2 引張破壊による応力解放チェックの計算モデル

表-1 引張破壊による応力解放チェックの計算モデルの物性値

弾性係数(kgf/cm ²)	1.0
ポアソン比	0.3
粘着力(kgf/cm ²)	300.0
内部摩擦角(°)	0.0
板厚(cm)	1.0
引張強度(kgf/cm ²)	
要素 abcde	0.5
それ以外	5.0

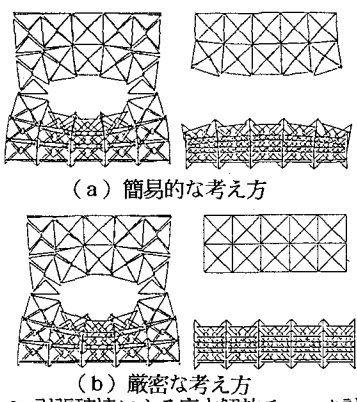


図-3 引張破壊による応力解放チェック計算結果 (Limit RBSM)

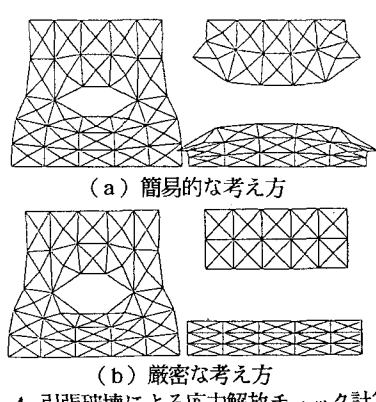


図-4 引張破壊による応力解放チェック計算結果 (Limit FESM)

4.2 変位制御に基づく応力解放 (梁の3点曲げモデルの解析)

修正仮想変位法による応力解析の例として、Refaiら²⁾が仮想ひび割れモデルで解析した梁の3点曲げモデルの解析を行った。図-5、6に解析モデルの寸法、メッシュ分割図を示す。また表-2に物性値を示す。Refaiらは引張強度に対してひずみ軟化則を与えた解析を行っているが、ここでは変位制御による引張軟化解析が可能であることを検討するため、極端な場合として要素境界応力が許容引張応力に達した場合、応力を全て解放する解析を行った。また引張亀裂進展とそれに伴う荷重低下を追跡することに主眼を置き、要素内及び要素境界でのせん断降伏は生じないものとした。さらに中央に亀裂がある場合と無い場合、Limit RBSMとLimit FESMとで整理し、表-3に示す形で行った。図-7はケース2の亀裂の進展状況を表す変形図であり、図-8の荷重変位図との対応から亀裂進展に伴い強度が低下し、最終的には梁が分割され無応力状態になることをよく表現している。初期亀裂が無い場合の梁理論から求めたピーク強度は411kgfであり解析結果が高めに出ているが、要素分割が粗く要素境界辺中央部で応力を判定しているため大きめに出て

いるといえる。図-9はケース1とケース2とを、図10はケース3とケース4とにおける載荷点の鉛直下向きの変位と載荷点の荷重Pとの関係を比較したものである。両図より亀裂の有無に関わらずLimit RBSMはLimit FESMと比べて最大荷重値はやや大きめに、最終変位は約2倍となっている。

表-2 梁の3点曲げの計算モデルの物性値

弾性係数(kgf/cm ²)	381000.0
ポアソン比	0.2
圧縮強度(kgf/cm ²)	552.0
引張強度(kgf/cm ²)	30.0

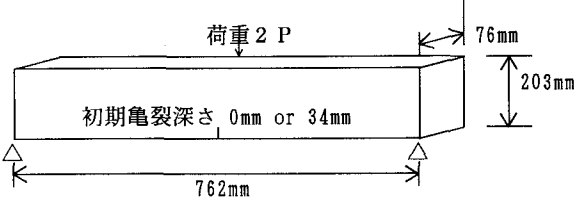


図-5 梁の3点曲げ計算モデルの寸法

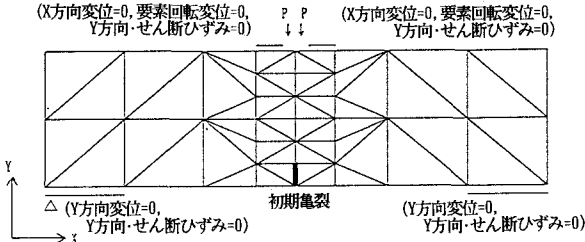


図-6 梁の3点曲げ計算モデルのメッシュ分割図

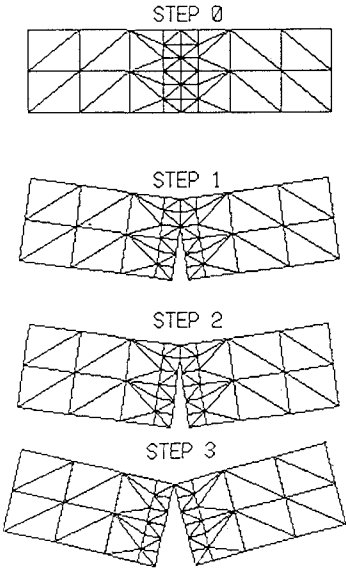


図-7 梁の3点曲げ計算モデルの亀裂進展状況
(Limit FESM、亀裂なし、変位制御)

表-3 解析ケース

	Limit RBSM	Limit FESM
亀裂無	ケース1	ケース2
亀裂有	ケース3	ケース4

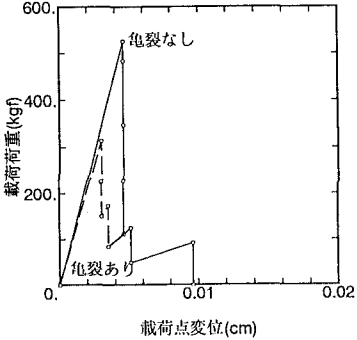


図-8 初期亀裂の有無による荷重-変位関係の違い
(Limit FESM)

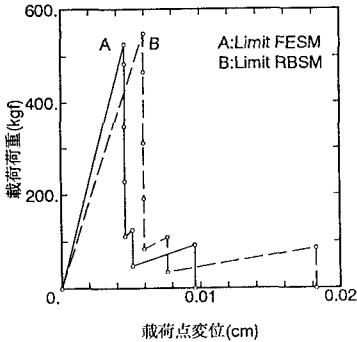


図-9 解析手法の違いによる荷重-変位関係の違い
(Limit FESMとLimit RBSM、初期亀裂なし)

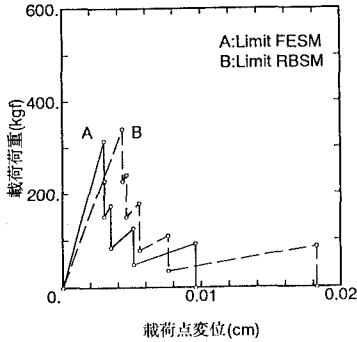


図-10 解析手法の違いによる荷重-変位関係の違い
(Limit FESMとLimit RBSM、初期亀裂あり)

参考文献

1) 鷲津, "コンピュータによる構造工学講座: 弾性学の変分原理概論", 培風館(1972)
2) Refai T.M, et al, "MODELING OF FRACTURE PROCESS IN PRENOTCHED CONCRETE BEAMS TO EXAMINE SIZE EFFECTS", SEM/RELEM, Int. Conf. on Fracture of Concrete and Rock, Houston, Texas, pp. 487-495(1987)