

## (61) 不連続変形法(DDA)とその岩盤工学への適用について

京都大学工学部 正会員 大西有三

鹿島建設(株) 正会員 佐々木猛

### Discontinuous Deformation Analysis and its application to rock mechanics problems

Yuzo OHNISI, Kyoto University

Takeshi SASAKI, Kajima Corporation

#### Abstract

The Discontinuous Deformation Analysis (DDA) is developed by G.H. Shi and R.G. Goodman<sup>1),2),3)</sup> which comes with in the category of a kind of hybrid displacement type model of the finite element method (H. Washizu, 1972). It solves a finite element type of mesh where all the elements are isolated blocks and bounded by pre-existing discontinuities under kinematics conditions of dynamic and quasi-static motion.

This paper describe an outline of the DDA theory, comparison of the other methods and discussed in the results of some models of rock mechanics problems. The authors applied elastic-plastic yield criteria of Drucker-Prager associated constitutive laws for the above DDA theory. The stability of rock slopes and rock caverns with different joints sets models are analyzed by using DDA and compared with the results of the finite element method.

#### 1. はじめに

不連続変形法(DDA)は、G.H. Shi (1984)<sup>1)</sup>によって開発された。本手法は、任意の弾性体の多角形で構成されるブロック相互の運動を動的、準静的に解析することができる。ブロック間の運動を解析する手法はこれまでに、有限要素法(FEM)と併用して用いられる結合バネ要素(Ngo, 1967)、ジョイント要素(R.G. Goodman, et al 1968)、個別要素法(DEM, P.A. Cundall, 1974)、剛体バネモデル(RBSM、川井、1976)などが提案され実用化されている<sup>4),5)</sup>。DDAは基本的に、弾性力学の中でFEMのハイブリッド変位型モデル(鷲津、1972)の範疇に分類される<sup>7)</sup>。これは、川井(1980)が提案したEBSM(Elastic Body Spring Model)と同等のものである。また、すでに大西(1983)らはDEMに基づくこの考え方を導入している<sup>6)</sup>。しかし、この解析は、要素形状がひずみの関数であり要素間の接触状態が幾何学的非線形問題となるため非線形の方程式を収束するまで繰り返し解く必要があり実用に至っていなかった。G.H. Shiは、DDAの非線形の釣り合い方程式にブロック間の貫入によるポテンシャルエネルギーを最小二乗法で評価する制約条件を設け、これを最小にするようにペナルティ法を導入する手法を開発した。この手法を用いることにより、ブロック間の貫入量を一定の誤差範囲以内に収める解が能率よく求められる。著者らは、DDAを用いて不連続面が存在する斜面や空洞周辺の安定性を検討するため、ブロックの変形特性にDrucker-Pragerの弾塑性構成則を導入した<sup>8)</sup>。以上の手法を用いて、異なる走向/傾斜の節理群が存在する斜面と空洞のモデルについて解析しその問題点についても検討した。また、有限要素法による同様のモデルの弾塑性解析の結果<sup>9)</sup>と比較した。

#### 2. DDA解析理論の概要<sup>3)</sup>

1節でも述べたように、DDAはFEMの一種であるのでその定式化もFEMと同様の手順を踏む。ただし、未知数は、要素の剛体変位、剛体回転、ひずみである。要素の剛性は、ひずみエネルギーを最小化することによって得られる。ブロック間の接触は、ブロックの辺と隅角が接した場合、辺に垂直な法線方向バネと辺

に平行なせん断バネが設定される。この接触マトリックスは、貫入による最小二乗ひずみエネルギーをペナルティ法により貫入量が一定量以下になるように繰り返し解かれる。以下にその特徴を述べる。

- (1) ひずみエネルギーの最小化原理を用いているため、FEMと同様に解の唯一性が保証される。
- (2) 順解析および逆解析ができる。
- (3) 動的、静的問題が同じ定式化により計算される。
- (4) ブロック要素に任意の構成則が導入できる(弾性、非線形、弾塑性、粘性など)。
- (5) 任意の接触条件(Mohr-Coulomb則など)、境界条件(強制変位など)、荷重条件(熱応力、初期応力、初期ひずみ、慣性力、線分布荷重など)、ロックボルト要素などが設定できる。

次に順解析の場合についてその概要を述べる。(詳細は、文献3)を参照されたい。)

## 2.1 未知数と要素形状関数

ブロック内の応力とひずみが一定であると仮定すれば、2次元の場合、未知数は(1)式で表される。

$$\{D_i\} = \{u_0 \ v_0 \ \gamma_0 \ \epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy}\}^T \quad \text{-----(1)}$$

ここに、 $u_0, v_0$  : 剛体変位、 $\gamma_0$  : 剛体回転であり、回転中心ではスピンの角度である。 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  : 軸およびせん断ひずみである。ブロック内の変位  $u, v$  を座標  $x, y$  の関数として(2)式で表す。これは、FEMの

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y, \quad v = b_1 + b_2 x + b_3 y \quad \text{-----(2)}$$

三角形ひずみ一定要素と同等である。(1)式の未知数を(2)式で表すと(3),(4)式の関係になる。

$$u_0 = a_1 + a_2 x_0 + a_3 y_0, \quad v_0 = b_1 + b_2 x_0 + b_3 y_0, \quad \gamma_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (b_2 - a_3) \quad \text{-----(3)}$$

ここに  $x_0, y_0$  は剛体変位をもとめる点の座標であり、一般にはブロックの重心である。

$$\epsilon_x = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} = a_2, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = b_3, \quad \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (b_2 + a_3) \quad \text{-----(4)}$$

(3),(4)式を用いて、これを(2)式に代入し未知数  $\{D_i\}$  で整理すると(5)式が得られる。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(y-y_0) & (x-x_0) & 0 & (y-y_0) \\ 0 & 1 & (x-x_0) & 0 & (y-y_0) & (x-x_0) \end{bmatrix} \{D_i\} = [T_i] \{D_i\} \quad \text{---(5)}$$

(5)式は変形と要素形状の関係を示す。これを用いて各ステップで要素形状が更新される。

## 2.2 要素のひずみエネルギーと剛性マトリックス

要素のひずみエネルギーはFEMと同様に2次元平面ひずみ仮定の場合、(6)式で表される。

$$\Pi_e = \iint \frac{1}{2} (\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y + \gamma_{xy} \tau_{xy}) dx dy = \iint \frac{1}{2} \{\epsilon_i\}^T \{\sigma_i\} dx dy = \frac{1}{2} \{\epsilon_i\}^T [E] \{\epsilon_i\} dx dy = \frac{S}{2} \{\epsilon_0\}^T [E_0] \{D_i\} \quad (6)$$

ここに、 $[E]$  : 応力-ひずみマトリックス、 $\{\epsilon_i\}$  : ひずみベクトル、 $\{\sigma_i\}$  : 応力ベクトルである。

$$\{\sigma_i\} = [E] \{\epsilon_i\}, \quad \{\epsilon_i\} = \{ \epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy} \}^T, \quad \{\sigma_i\} = \{ \sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy} \}^T, \quad \{\epsilon_0\} = \{ 0 \ 0 \ 0 \ \epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy} \}^T \quad (7)$$

また、 $S$  : ブロックの面積、 $[0]$  :  $3 \times 3$  の0マトリックス、 $[E_0]$  :  $6 \times 6$  のブロックの応力-ひずみマトリックス。

$$[E] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/(2(1-\nu)) \end{bmatrix}, \quad [E_0] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [E] \end{bmatrix} \quad \text{---(8)}$$

ブロックの剛性マトリックス  $[k_{ii}]$  は(6)式のポテンシャルエネルギーを最小化することによって得られる。

$$[k_{rs}] = \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial d_{ri} \partial d_{si}} = \frac{S}{2} \frac{\partial^2}{\partial d_{ri} \partial d_{si}} [D_i]^T [E_0] [D_i] = S [E_0] = [K_{ii}] = [K_e] \quad \text{----(9)}$$

## 2.3 ブロックの運動と釣り合い方程式

ブロックの運動は、ブロック間の貫入量  $d$  による最小自乗的なエネルギーを(10)式で定義する。また、貫入量  $d$  は、要素の座標の関数  $\{e_i\}, \{g_i\}$  と  $i, j$  ブロックの未知数  $\{D_i\}, \{D_j\}$  で表すことができる。

$$\Pi_K = \frac{P}{2} d^2 \quad \text{---(10)}, \quad d = \frac{S_0}{l} + \{e_i\}^T \{D_i\} + \{g_i\}^T \{D_j\} \quad \text{---(11)}$$

ここに、 $P$ ：十分大きな正の値のペナルティ係数、 $S_0$ ：貫入の面積である。(11)式を(10)式に代入し、(10)式の貫入量 $d$ をある一定値以下の制約条件で解くために、 $\Pi_K$ を最小化すると(12)式のように左辺の係数項に $[K_{ij}]$ 、 $[K_{ij}]$ 、 $[K_{ji}]$ 、 $[K_{ji}]$ の $6 \times 6$ の4つの連成マトリックスと右辺に $\{F_i\}$ 、 $\{F_j\}$ の外力項があらわれる。

$$[k_{rs}] = \frac{\partial^2 \Pi_K}{\partial d_{ri} \partial d_{sj}} = [K_{ii}] + [K_{ij}] + [K_{ji}] + [K_{jj}] = [K_\lambda] \quad , \quad \{F_i\} + \{F_j\} = \{F_\lambda\} \quad \text{-----}(12)$$

これらの操作を全ブロックについて行い、更に、同様の操作で右辺の係数マトリックスに、慣性力 $[K_a]$ 、点の拘束 $[K_{pp}]$ を左辺の外力ベクトルとして、初期応力 $\{F_{s0}\}$ 、点荷重 $\{F_p\}$ 、慣性力 $\{F_a\}$ 、接触力 $\{F_\lambda\}$ を求める。これらを全て重ね合わせて(13)式のブロック全体の釣り合い方程式が得られる。

$$([K_e] + [K_\lambda] + [K_a] + [K_{pp}])\{D\} = (\{F_{s0}\} + \{F_p\} + \{F_a\} + \{F_\lambda\}) \quad \text{---(13)}$$

ここに、 $[K_a]$ ：慣性力マトリックス $= 2M[t_i]/\Delta^2$ 、 $M$ ：ブロックの物体力、 $\Delta$ ：時間刻み、 $[K_{pp}]$ ：固定条件マトリックス $= P[T_i]^T[T_i]$ 、 $P$ ：十分大きな正の値、 $\{F_{s0}\}$ ：初期応力ベクトル $= S\{s_0\} = S(0 \ 0 \ 0 \ \sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy})^T$ 、 $S$ ：ブロックの面積、 $\{F_p\}$ ：点荷重ベクトル $= [T_i]^T\{f_x \ f_y\}^T$ 、 $f_x$ 、 $f_y$ ： $x, y$ 方向の点荷重、 $\{F_b\}$ ：物体力ベクトル $= \{f_x \ S \ f_y \ S \ 0 \ 0 \ 0\}^T$ 、 $f_x$ 、 $f_y$ ： $x, y$ 方向の物体力、 $\{F_a\}$ ：慣性力ベクトル $= (2M/\Delta)(\int \int [T_i]^T[T_i] dx dy)\{V_0\}$ 、 $V_0$ ：初期速度(動の場合のみ初速を与える)、 $\{V_1\}$ ：1ステップ目の速度 $= \Delta(\partial^2[D(t)]/\partial t^2) + \{V_0\} = (2/\Delta)\{D\} - \{V_0\}$  ----(14)、(次ステップから動的、静的も同じ定式化)である。全体釣り合い方程式(13)は、適当な時間ステップ $\Delta$ で(15)式の連立方程式を解くことによって得られる。

$$[K^i]\{\Delta D^i\} = (\{F^i\} + \{F_\lambda\}) \quad , \quad \{\Delta D^i\} = [K^i]^{-1}(\{F^i\} + \{F_\lambda\}) \quad , \quad \{D\} = \Sigma\{\Delta D^i\} \quad \text{---(15)}$$

ただし、各時間ステップで貫入量 $d$ をある一定値以下の制約条件で解くために、収束計算が必要である。

(15)式の中身は、例えば(16)式のように要素の剛性 $[K_{eij}]$ が対角に並び、要素間の連成 $[K_{\lambda ij}]$ が

$$\begin{bmatrix} [K_{e11}] & [K_{\lambda11}] & [0] & [0] \\ [K_{\lambda21}] & [K_{e22}] & [K_{\lambda23}] & [0] \\ [0] & [K_{\lambda32}] & [K_{e33}] & [K_{\lambda34}] \\ [0] & [0] & [K_{\lambda43}] & [K_{e44}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta D_1\} \\ \{\Delta D_2\} \\ \{\Delta D_3\} \\ \{\Delta D_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \\ \{F_4\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F_{\lambda1}\} \\ \{F_{\lambda2}\} \\ \{F_{\lambda3}\} \\ \{F_{\lambda4}\} \end{Bmatrix} \quad \text{---(16)}$$

非対角項となる対称行列である。二次元の場合、これらは、 $6 \times 6$ をサブマトリックスとしたブロック Cholesky法によって解かれる。解の数値的安定性は、剛体変位に対して慣性力マトリックス $[K_a]$ が時間刻みの $1/\Delta^2$ に比例するため、時間刻み $\Delta$ を小さくすることにより得られる。

### 3. 岩盤工学への適用について

DDAは2節で述べたように、解析手法がFEMの一種であるためブロックに種々の構成則の導入が可能である。岩盤工学への適用に際しても、FEMで苦手な不連続面を自然にモデル化することができる。また、ブロックを弾性体(または弾塑性体)としているため初期応力が設定でき、特に被りの深いトンネルなどの応力解放による掘削問題の解析が可能である。また、岩塊の崩壊過程などもブロックを弾塑性体と仮定することにより個々のブロックの破壊を直接求めることができる。著者らは、異なる節理群の組合せを有する岩盤斜面や空洞の安定性をみるため、本手法にDrucker-Pragerの関連流れ則による弾塑性構成則を導入した<sup>9)</sup>。

$$F = \alpha J_1 + J_2^{1/2} - \bar{\sigma}/\sqrt{3} = 0 \quad , \quad J_1 = \sigma_{ii} \quad , \quad J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad , \quad \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\sin^2 \phi}{(3 + \sin^2 \phi)}} \quad , \quad \bar{\sigma} = C(3(1 - 12\alpha^2)) \quad \text{---(17)}$$

ここに、 $J_1, J_2$ ：応力の不変量、 $S_{ij}$ ：偏差応力、 $C$ ：粘着力、 $\phi$ ：内部摩擦角である。また、応力の増分は、ブロックの各ステップでの剛体回転量 $\Delta\gamma_0$ に伴う座標回転に対する応力の重ね合わせ性の修正をJaumann共回転微分で表わし、回転前後の応力を重ね合わせる。

$$[\dot{\sigma}_{ij}] = [\Delta\sigma_{ij}] + [\sigma_{ik}][\Delta W_{kj}] + [\sigma_{jk}][\Delta W_{ki}] \quad , \quad [\sigma_{ij}]^{t+\Delta t} = [\sigma_{ij}]^t + [\dot{\sigma}_{ij}]\Delta t \quad \text{---(18)}$$

ここに、 $[\Delta W_{ij}]$ ：剛体回転増分マトリックス( $2 \times 2$ )、 $\cdot$ ：時間微分 $\partial/\partial t$ 、 $[\dot{\sigma}_{ij}]$ ：応力速度テンソル、 $[\Delta\sigma_{ij}]$ ：応力増分テンソル、 $\Delta t$ ：時間刻みである。

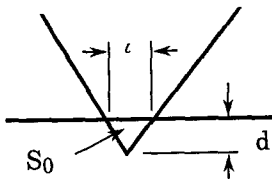
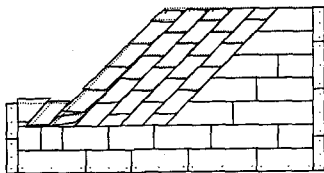
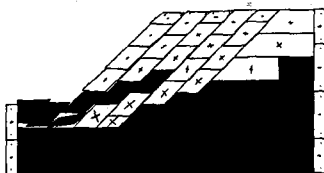


図-1 ブロックの接触

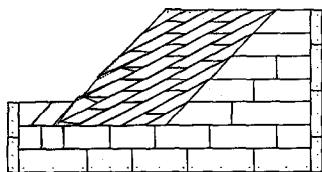


(a)変形図



(b)主応力および塑性領域

図-2 ケース1.1

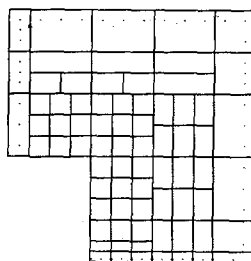


(a)変形図

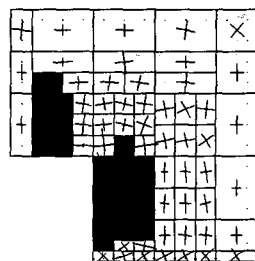


(b)主応力および塑性領域

図-3 ケース1.2

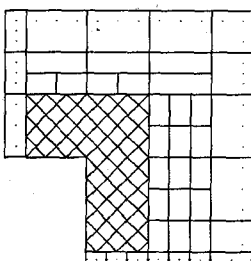


(a)変形図

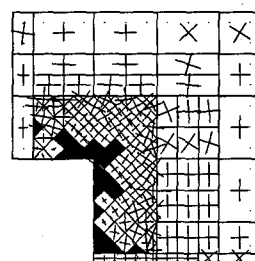


(b)主応力および塑性領域

図-4 ケース2.1

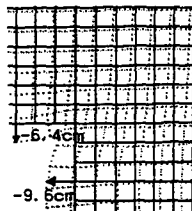


(a)変形図

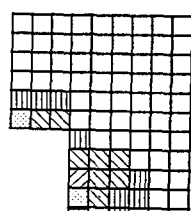


(b)主応力および塑性領域

図-5 ケース2.2



(a)変形図



(b)塑性領域

図-6 FEM解析による結果<sup>9)</sup>

表-1 解析ケースおよび条件

| 条件       | ケース-1.1                         | ケース-1.2                         | ケース-2.1                       | ケース-2.2                       |
|----------|---------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 計算ステップ   | 20                              | 20                              | 20                            | 20                            |
| 時間刻み(増分) | 0.5                             | 0.5                             | 0.5                           | 0.5                           |
| ペナルティ係数  | 100,000,000                     | 100,000,000                     | 1,000,000,000                 | 1,000,000,000                 |
| 最大変位率    | 0.01                            | 0.01                            | 0.01                          | 0.01                          |
| 単位体積重量   | 2.5                             | 2.5                             | 2.5                           | 2.5                           |
| 慣性力      | $B_x=0, B_y=-2.5$               | $B_x=0, B_y=-2.5$               | $B_x=0, B_y=-2.5$             | $B_x=0, B_y=-2.5$             |
| 弾性係数     | 10,000tf/m <sup>2</sup>         | 10,000tf/m <sup>2</sup>         | 100,000tf/m <sup>2</sup>      | 100,000tf/m <sup>2</sup>      |
| ポアソン比    | 0.24                            | 0.24                            | 0.25                          | 0.25                          |
| ブロックの強度  | $C=5, \psi=40^\circ$            | $C=5, \psi=40^\circ$            | $C=50, \psi=45^\circ$         | $C=50, \psi=45^\circ$         |
| 摩擦特性     | $C=0, \psi=0^\circ$             | $C=0, \psi=0^\circ$             | $C=0, \psi=0^\circ$           | $C=0, \psi=0^\circ$           |
| 加工硬化係数   | 50tf/m <sup>2</sup>             | 50tf/m <sup>2</sup>             | 500tf/m <sup>2</sup>          | 500tf/m <sup>2</sup>          |
| 荷重       | 斜面上部に60tf                       | 斜面上部に60tf                       | 0                             | 0                             |
| 初期応力     | $\sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=0$ | $\sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=0$ | $\sigma_x=\sigma_y=500tf/m^2$ | $\sigma_x=\sigma_y=500tf/m^2$ |

#### 4. 解析モデルおよび結果の考察

前節までの理論と岩盤工学への適用性を確かめるため、解析モデルとして(1)斜面の安定性、(2)被りの深い空洞の掘削の2ケースについて異なる走行/傾斜の節理群の組合せを想定したモデルの検討を行った。ブロックの接触機構としてMohr - Coulomb の摩擦則を採用している。即ち、ブロック間の法線方向の接触力 $R_n > 0$ 、および法線直角方向の接触力 $R_s < \sigma_n \tan \psi + C$ の場合その方向の接触の連成バネが作用する。表-1にこれらに用いた解析条件を示す。ケース1.1、1.2は斜面に対して水平な節理群と45°(ケース1.1)および30°の節理群の組合せを想定した場合である。図-2~3にこれらの変形および主応力図を示す。主応力図中の色塗りの部分は塑性領域を示す。これらは、節理群の傾斜による応力分布の違いがみられ斜面上部に与えた荷重が下端のブロックまで伝わっている。また、力の伝わり方の違いにより塑性領域の大きさが異なっている。ケース2.1、2.2は初期応力が500tf/m<sup>2</sup>の静水圧状態の比較的深い被りを想定した地山に空洞を掘削した場合の応力解放によるモデルである。節理群の傾斜をそれぞれ90°(ケース2.1)および45°(ケース2.2)の組合せとした。図-4~5にこれらの変形および主応力図を示す。これらでは、節理群の傾斜により塑性領域が異なっている。図-6にFEMによるケース2.1と同様の条件による結果を示した<sup>9)</sup>。変形量、塑性領域の傾向は良い一致を示しているものと思われる。しかし、主応力分布はモデル形状にかなり支配されている。また、一点にブロックの隅角部が集中するケース2.1、2.2のようなモデルでは、非常に収束が悪くなる。これは接触機構のバネの設定法が原因と思われる。総収束回数は、ケース1.1、1.2で120~140、ケース2.1、2.2では450~600程度である。

#### 5. むすび

本報告では、DDAの岩盤工学への適用について、その実用性を確かめるため若干の検討を行った。それらは、FEMとDEMの中間的な結果が得られた。また、変形や応力分布はFEMと良く一致しており一応の精度がある。構成則、接触機構、ロックボルトなどの力学モデルはFEMと同様の発展性がある。しかし、接触機構の収束計算には問題もあり、今後、これらの改良法について検討して行く予定である。

謝辞：最後に本報告をまとめるのに際し、DDA実用化研究委員会の皆さまには貴重な御意見、御示唆を頂いた。ここに紙面をもって深勘なる謝意を表します。

#### 参考文献

- 1) G.H.Shi ,R.E. Goodman ,“ Discontinuous Deformation Analysis ” ,Proc. 25th U.S.Symposium on Rock Mechanics, pp.269~277, 1984
- 2) G.H.Shi ,R.E. Goodman ,“ Tow Dimensional Discontinuous Deformation Analysis ” ,Int. J. Anal. Methods Geomech. , Vol. 9, pp. 541~556, 1985
- 3) G.H.Shi “ Block system modeling by Discontinuous Deformation Analysis ” , Univ. of California , Berkeley ,Dept. of Civil Eng. August, 1989
- 4) P.A. Cundall ,“ A computer model for Rock - Mass Behavior using interactive graphics for the input and output of geometrical data ” , A Report for U.S. Army, 1974
- 5) 川井忠彦, “難散化極限解析法に関する最近の話題” 生研セミナーテキスト, 昭和61年9月(1986)
- 6) 大西有三、安倍吉生、長野恵一, “変形を考慮したDEM(個別要素法)”, 土木学会第15回岩盤力学シンポジウム, pp.136~140, 1983
- 7) 鷲津久一郎, “弾性学の変分原理概論”, 日本鋼構造協会、コンピュータによる構造工学講座、II-3(A)、培風館
- 8) 庄子幹雄、佐々木猛、森川誠司, “有限変形理論による不連続面を有する岩盤掘削モデルの弾塑性解析”、岩の力学連合会、第7回岩の力学国内シンポジウム講演論文集, pp.449~454, 1988
- 9) 佐々木猛, “有限要素法による節理性岩盤の複合降伏モデルに関する検討”、土木学会第46回年次学術講演会講演概要集、第3部, pp.550~551, 1991