

(60) 不連続面を含む3次元境界要素法解析手順の開発

山口大学工学部 正会員 ○水田義明

山口大学工学部 栗山 憲

山口大学工学部 渡部智一

A Three Dimensional Boundary Element Method for Models Including Discontinuous Planes

Yoshiaki MIZUTA, Yamaguchi University

Ken KURIYAMA, Yamaguchi University

Tomokazu WATANABE, Yamaguchi University

Abstract

The authors have developed a computing system for three dimensional elastic analysis by the distribution of constant displacement discontinuities over a boundary divided into triangular element. Use of the triangular element allows the extension of the Displacement Discontinuity Method to include the boundary value problems with any structural shape of boundary in three dimensions, although the method is not very useful unless the boundaries include faults/cracks. The three dimensional solution of various "expressions of influence coefficients" has been theoretically derived through integration over a triangular element and its partial differentiations. The accuracy of the results, which are numerically calculated by the procedure, is demonstrated by comparison with the strict solutions of displacement and stresses around a penny-shaped crack in tension and shear. Furthermore, excavation-induced displacements and stresses which are numerically calculated for a spherical cavity are also compared with the strict solutions.

1. はじめに

最近におけるコンピューターの高性能化と低価格化に伴い、地下空洞まわりの弾性応力や変位の3次元解析がしばしば行われるようになってきている。また、実際の地層における不連続な構造をその解析に導入することが強く望まれている。そこで筆者らは不連続性地層内にある空洞のまわりの岩盤の挙動を予測するための数値解析システム、すなわち、数値積分を用いない「仮想応力法-変位くい違い法連成解析」を確立することを目差している。そして、まず、より正確な境界の形状近似ができるように3角形面要素による要素分割が可能な3次元変位くい違い法解析手順を開発した。

2. 影響係数

弾性体内に設けられた境界上の一つの3角形面要素を考える。またその要素自身の局所座標を $O - x y z$ とし、 z 軸は要素面に垂直であるものとする。その面要素全体にわたって均一に分布する変位くい違い (D_x , D_y , D_z) によって任意の点 (x , y , z) に誘起される変位成分と応力成分はつぎのように書き表すことができる [1,2]。

$$\begin{aligned}
u_x &= \{ [2(1-\nu)f_z - zf_{xx}]D_x - zf_{xy}D_y - [(1-2\nu)f_x + zf_{xz}]D_z \} / 8\pi(1-\nu) \\
u_y &= \{ -zf_{xy}D_x + [2(1-\nu)f_z - zf_{yy}]D_y - [(1-2\nu)f_y + zf_{yz}]D_z \} / 8\pi(1-\nu) \\
u_z &= \{ [(1-2\nu)f_x - zf_{xz}]D_x + [(1-2\nu)f_y - zf_{yz}]D_y + [2(1-\nu)f_z - zf_{zz}]D_z \} / 8\pi(1-\nu)
\end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= G \cdot \{ [2f_{xx} - zf_{xxx}]D_x + [2\nu f_{yz} - zf_{xxy}]D_y + [f_{zz} + (1-2\nu)f_{yy} - zf_{xxz}]D_z \} / 4\pi(1-\nu) \\
\sigma_y &= G \cdot \{ [2\nu f_{xz} - zf_{xyy}]D_x + [2f_{yz} - zf_{yyy}]D_y + [f_{zz} + (1-2\nu)f_{xx} - zf_{yyz}]D_z \} / 4\pi(1-\nu) \\
\sigma_z &= G \cdot \{ -zf_{xzz}D_x - zf_{yzz}D_y + [f_{zz} - zf_{zzz}]D_z \} / 4\pi(1-\nu) \\
\tau_{xy} &= G \cdot \{ [(1-\nu)f_{yz} - zf_{xxy}]D_x + [(1-\nu)f_{xz} - zf_{xyy}]D_y - [(1-2\nu)f_{xy} + zf_{xyx}]D_z \} / 4\pi(1-\nu) \\
\tau_{yz} &= G \cdot \{ [-\nu f_{xy} + zf_{xyx}]D_x + [f_{zz} + \nu f_{xx} - zf_{yyz}]D_y - zf_{yzz}D_z \} / 4\pi(1-\nu) \\
\tau_{zx} &= G \cdot \{ [f_{zz} + \nu f_{yy} - zf_{xxz}]D_x - [\nu f_{xy} + zf_{xyx}]D_y - zf_{xzz}D_z \} / 4\pi(1-\nu)
\end{aligned} \quad (2)$$

ただし G は剛性率, ν はポアソン比そして D_x, D_y および D_z は変位 u の x, y および z 成分である。また, $f_x, f_y, \dots, f_{zzz}$ はつぎに述べる関数 f のそれぞれの添字に関する, 偏導関数である。三つの頂点 $P_1(x_1, y_1, 0), P_2(x_2, y_2, 0), P_3(x_3, y_3, 0)$ の3角形から点 $P(x, y, z)$ に対する影響関数 $f(x, y, z)$ はつぎのように表わされる。

$$f(x, y, z) = \int \int [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{-1/2} d\xi d\eta \quad (3)$$

(3)式の積分は, 三つの頂点の位置に関して, Stokesの定理[3]を用いることにより実際に行うことができ, その結果は近く出版される文献[4]に記されている。また文献[4]には(1)および(2)式に出てくるいろいろな f の導関数も示されている。

したがって, $\Delta P_1 P_2 P_3$ 上の変位 u の違いによって誘起される P 点の変位と応力はそれらの導関数を用いて計算することができる。

3. 解析手順

モデル化されたある境界がいくつかの要素に分割されたとき, それらの要素の位置, 形, 面積および方向は一般には互いに異なっている筈である。そこで各要素の変位 u の違い成分はその要素自身の座標系に関して表現せざるを得ない。各要素に対応する局所座標系は図1で示されるように定義される。すなわち, x, y および z 軸の方向はそれぞれ $\vec{A}, \vec{B}$ および $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ の方向である。ただし $\vec{A} = \overrightarrow{P_1 P_2}, \vec{B} = \overrightarrow{P_1 P_3}, \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ および $\vec{A} \times \vec{B}$ は外積を意味する。よって P_1, P_2 および P_3 が反時計まわりに入力されると z 軸はつねに要素面に垂直である。なお, 原点は最初の頂点 P_1 の位置に置かれるものとする。

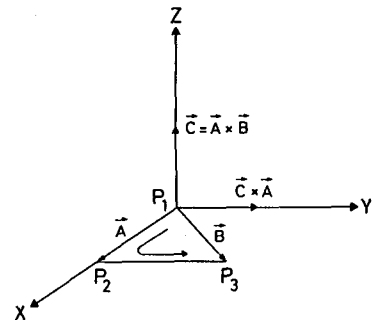


図1 各要素の局所座標系

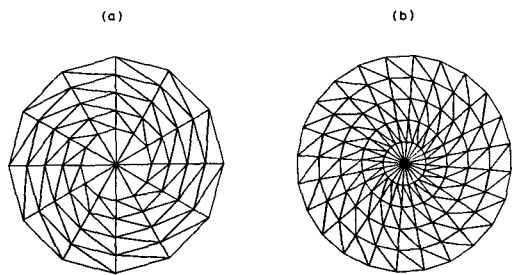


図2 円形き裂の3角形要素分割;

(a) 108要素, (b) 216要素

各要素の変位 u の違い成分が決まれば上に述べた式から任意の点の挙動がわかるが, それらの変位 u の違い成分を決定する手順は長方形要素を用いる場合の3次元変位 u の違い法の手順[1]と全く同じである。

4. 円形き裂モデルの数値解析

4.1 モデル

単位半径の円形き裂 (penny-shaped crack) を、それぞれの頂点が円形境界面上にある108および216個の3角形からなる多角形でモデル化した。図2はそれら二つのモデルの要素分割を示す。図から分かるように、要素分割は3角形の頂点が同心円の上にくるように成されており、モデル(a)では中心部で同心円が粗くなっている。円形き裂モデルではすべての要素が同一平面上にある。そのようなモデルにおいては、ある要素の重心が他の要素の一辺の延長上にくることがあり、その場合計算がうまく成されない。したがって、そうならないような要素分割を行う必要がある。

4.2 厳密解

(1) 引張応力場

1軸引張応力場内の円形き裂の形成によって誘起される応力や変形は、円形き裂内に流体圧を作用させた場合の応力や変形と正確に等しく、その解は文献[5]に示されている。

(2) せん断応力場

扁長回転楕円体空かのまわりの応力や変位の解はすでに与えられている[5]。これらの解から、つぎの変換を行えば、z軸を回転軸とする扁平回転楕円体空かに対する解も得られる。

$$q \rightarrow i\xi, \quad \bar{q} \rightarrow i\bar{\xi}, \quad p \rightarrow \bar{\eta}, \quad \bar{p} \rightarrow \eta$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{q^2 - p^2}} \rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}}$$

$$Q = 1 + \frac{q}{2} \ln \frac{q-1}{q+1} \rightarrow Q = 1 - \xi \operatorname{arccot} \xi$$

上式中の各記号の意味はつぎのようである。

$$q = \operatorname{ch} \alpha, \quad \bar{q} = \operatorname{sh} \alpha, \quad p = \cos \beta, \quad \bar{p} = \sin \beta$$

$$\xi = \operatorname{sh} u, \quad \bar{\xi} = \operatorname{ch} u, \quad \eta = \cos v, \quad \bar{\eta} = \sin v$$

すなわち、 α と β は扁長回転体座標であり、 u と v は扁平回転楕円体座標であって、それらは直角座標とつぎのような関係にある。

$$x = \overline{cqp} \cos \gamma = c \bar{\xi} \eta \cos \gamma \quad y = \overline{cqps} \sin \gamma = c \xi \bar{\eta} \sin \gamma \quad z = cqp = c \xi \eta$$

ここに c は回転半径である。

例えば、単位のせん断応力場 ($\tau_{uv} = 1$) に扁平回転楕円体空かが形成されることにより誘起されるせん断応力 τ_{uv} は、 τ_{pq} から導かれる。また導かれた結果は文献[4]に示されている。

円形き裂は非常に薄い扁平回転楕円体空かとして近似でき、クラックのアスペクト比 (短軸/長軸) は、境界面上の u 座標を u_0 とすれば、 $\xi_0/\bar{\xi}_0 = \operatorname{sh} u_0/\operatorname{ch} u_0$ で定まる。また、クラック形成によって誘起される τ_{xx} の x 軸および z 軸に沿う分布はそれぞれ $\gamma = 0$, $\eta = 1$ および $\gamma = 0$, $\eta = 0$ として計算できる。

もちろん引張応力場に対する変位や応力も計算できるので、それらを厳密解から得られる値と比較した。その結果、アスペクト比を0.0001以下にすれば差は0.02%以下となることがわかった。そこで、 τ_{uv} 分布を求める計算においてもアスペクト比を0.0001とした。

4.3 数値解

(1) 引張応力場

1 軸引張荷重を受けた弾性体内の円形き裂の垂直変位分布が上に述べた数値解析手順により求められる。図3(a)はその解析結果であり、(a-1)は108要素モデルから得られたもの、(a-2)は216要素から得られたもので、それぞれ厳密解と比較されている。き裂まわりの弾性体内の三つの直応力成分も計算された。108要素モデルから得られたき裂面内のそれらの分布は図3(b)に示され、それぞれ厳密解と比較されている。

図3(a)から、変位くい違い法は円形き裂の開口変位を過大評価しているが、要素数が増えると厳密解に近づくことが分かる。また図3(b)から、き裂面上の三つの直応力成分の分布は数値解と厳密解とで大差のないことがわかる。

(2) せん断応力場

x 軸に沿った τ_{zx} の分布は図4(a)に示され、z 軸に沿った分布は同図(b)に示されている。数値解析の結果と厳密解とはよく似ており、このことから変位くい違い法による数値解析手順はせん断応力の解析にも適用し得ることを示すものと思われる。

5. 球かモデルの数値解析

1 軸応力場および静水圧応力場にある球かモデルに対しても数値解析が行われた。球状の境界は48, 120および528の3 角形面から成る三つの多面体で近似され、それら三つのモデルから得られた結果は厳密解と比較された。その結果は、境界の変位分布についても、境界外側の弾性体内の応力成分の分布についても、数値解と厳密解とに大差なく、要素分割の数が増すにつれてその差が小さくなることが示された。その詳細は文献[4]に述べられている。

6. 結論

ここに提案された境界面を3 角形面要素に分割する変位くい違い法は岩盤開発設計に関する多くの3 次元問題に適用できるものと考えられる。またこの方法は不連続性岩盤、破碎性岩盤または人

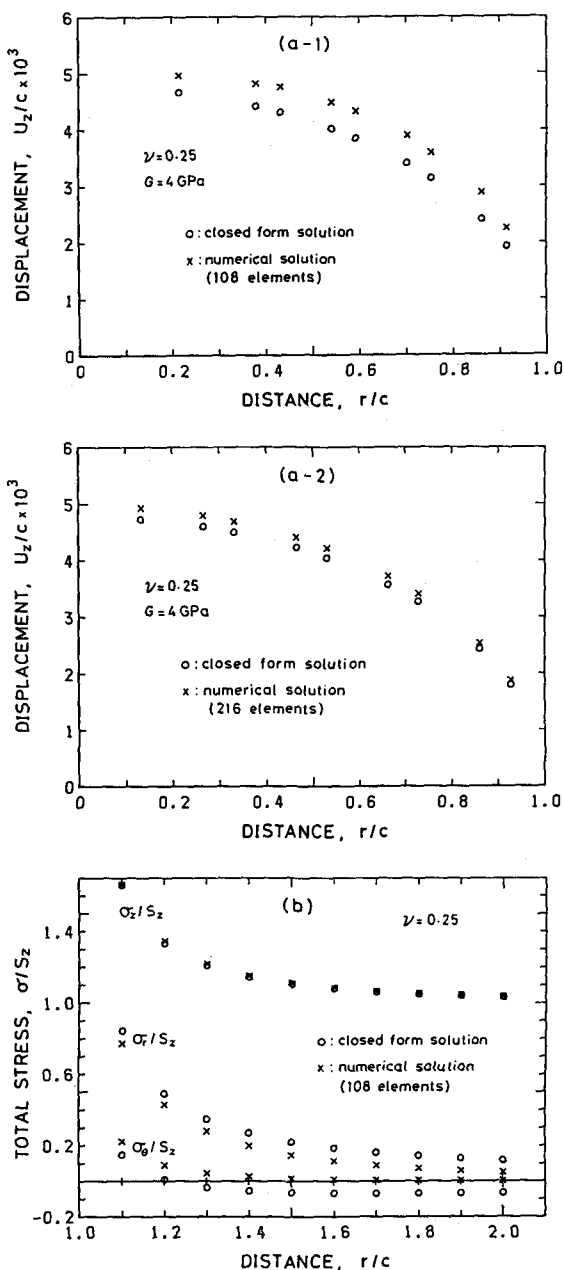


図3 引張応力場内の円形き裂に関する数値解の例；
(a-1) 108要素モデルの開口変位，
(a-2) 216要素による開口変位，
(b) 108要素モデルのき裂面上の三つの直応力成分（全応力分布）

工的に（水圧破碎等によって）破碎された岩盤の境界要素法によるモデル化に有用であり、これを通常用いられている仮想応力法と組み合わせればとくに有用である。

筆者らは、境界面を3角形面要素に分割し、かつ数値積分を用いない3次元仮想応力法手順についてもこれを確立しつつある。仮想応力法および仮想応力法-変位くい違い法連成解析については別の機会に報告させて頂く。なお、同一平面上の境界面の要素分割を容易にするために、たとえば、影響係数に関する積分については、自分自身および隣り合う要素では解析的に、それ以外では数値的に実行するといった方法も考えた方が良いかもしれない。

【参考文献】

1. Clough, S. L. and Starfield, A. M., Boundary element methods in solid mechanics, George Allen & Unwin, London (1983).
2. Mizuta, Y. and Lee, Hi Keun, A study on applicability of three dimensional elastic analysis by displacement discontinuity method, Suiyōkwai-Shi, 20, 2, 146-154 (1984).
3. Kellogg, O. D., Foundations of potential theory, Springer, Berlin (1929).
4. Kuriyama, K. and Mizuta, Y., Three dimensional elastic analysis by displacement discontinuity method with boundary division into triangular leaf elements, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., in contribution (1991).
5. 宮本 博, 3次元弾性論, 裳華房 (1967).

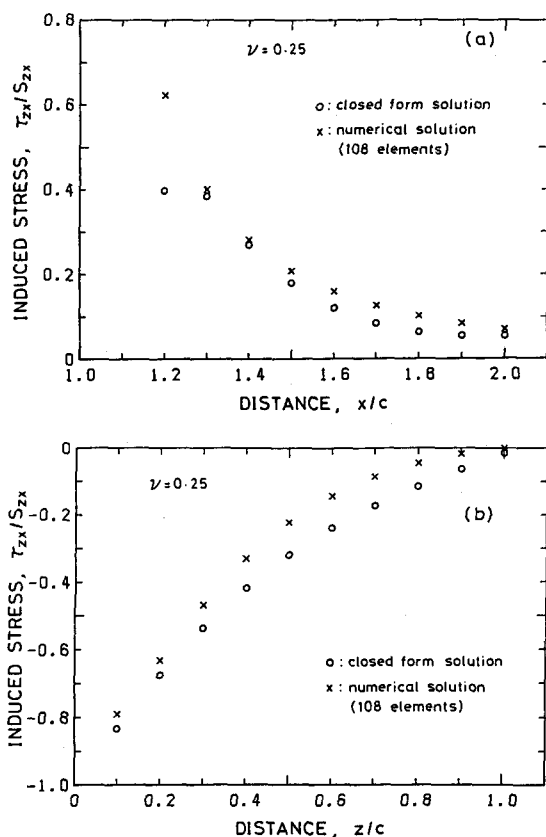


図4 せん断応力場の円形き裂に関する数値解の例；

- (a)108要素モデルのき裂面上に誘起される τ_{zx} 分布
(b)108要素モデルのz軸上に誘起される τ_{zx} 分布