

(59) CEM (Combined Element Method) による連続体・不連続体の統一解析の試み

近畿大学理工学部 久武 勝保
(株)地崎工業 ○村上 敏夫
近畿大学大学院 森 孝高

Approach for Simulating the Behavior of Continuous
and Discontinuous Materials by CEM

Masayasu HISATAKE, Kinki University
Toshio MURAKAMI, Chizaki-Kogyo Co., Ltd.
Yoshitaka MORI, Kinki University

Abstract

Soil and Rock masses, when their stresses are relatively smaller than their strengths, may behave as continuous material, but when the stresses increase, they may behave as discontinuous one. Usual DEM provides the capability of simulating behavior of discontinuous mass, but does not account for the continuity of mass.

The CEM(Combined Element Method), which is proposed here, allows tensile force between particles in contact in order to express continuous and discontinuous behavior of materials. The several numerical simulations are reported and the numerical results show that this method is applicable to the problems on continuous and discontinuous materials.

1. はじめに

強度に比べて応力が小なる場合には連続体として挙動する地盤であっても、応力がある値に達すると不連続体として挙動する場合があるが、しかしこの様な、地盤の連続体・不連続体としての挙動を一貫して解析するのは容易なことではない。本研究では、個々の要素の接触における結合・分離状態を力学的に表現することにより、材料の連続体及び不連続体挙動を統一的に解析するCEM (Combined Element method)を開発したので、その定式化及びその数値解析例を示すこととする。

2. 提案手法の概要

従来の個別要素法では、要素間に挿入した図-1(1)に示すような弾性スプリングと粘性ダッシュボットの並列結合からなる二方向二組の力学モデルによって、接触時の要素間力を計算するのが一般的である。

これに対し本手法では、図-1(2)に示すように要素の接触に際し有限の幅を持たせた単位奥行き接触面を仮定し、この接触面の法線および接線方向に力学モデルを分布させている。この結果、接触する要素間に働く力として従来の法線方向力、接線方向力の二力の他にDEMで取り扱われていない接触面でのモーメント力が評価できることになる。また、要素間力に引張力を導入することにより要素どうしを結合させることができ、巨視的に連続体とみなせる構造体をつくりだすことが可能となった。さらに、引張力の限界値として定義されるパラメータ(後述する粘着力)を導入し、結合の強弱や要素の分離を表現できるようにした。

従って、ガムテープの上を転がしたボールが粘着力により減速、停止する挙動や、地盤の弾性的変形から破壊に至る一貫した挙動をシミュレートすることが可能となる。

2. 1 接触判定と相対変位

任意の時刻 t における要素の位置座標と回転量は、接触力から決まる加速度を陽に含む時間増分 Δt の差分近似式で求めることができ、接触力はこの新たに計算される位置座標および回転量から再計算され逐次更新される。

図-2 に示す要素 i, j について、相対的な位置関係を明らかにするため、前述の位置座標と回転量を用い時刻 $t - \Delta t$ から時刻 t に至る時間 Δt での以下の三量を定義する。

$\Delta \delta_{ij}(t)$: 時間 Δt での中心間距離の増分

$\Delta \theta_i(t)$: 時間 Δt での要素 i の回転量の増分 — 時間 Δt での n 軸と X 軸がつくる角度の増分

$\Delta \theta_j(t)$: 時間 Δt での要素 j の回転量の増分 — 時間 Δt での n 軸と X 軸がつくる角度の増分

ここで、 n 軸は要素中心を結ぶ軸とし、中心間距離の増分は接近する場合を正、回転量は反時計回りを正

接触の判定は、要素中心間距離が両要素の半径の和より初めて小さくなるときとし、この時刻を接触開始時刻とする。この時刻から現在の時刻までの、上記 3 量の和をとった量をそれぞれ、 $\delta_{ij}(t)$ 、 $\theta_i(t)$ 、 $\theta_j(t)$ とし、それらを相対変位と定義する。

2. 2 接触面の位置と接触面上の変位分布の仮定

接触面の位置を図-3 に示す n 軸に直交する平面と仮定し、式 (1) の $r_i'(t)$ 、 $r_j'(t)$ で与える。

$$\begin{aligned} r_i'(t) &= r_i - \delta_{ij}(t) \cdot \{r_j / (r_i + r_j)\} \\ r_j'(t) &= r_j - \delta_{ij}(t) \cdot \{r_i / (r_i + r_j)\} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 r_i 、 r_j は要素 i 、要素 j の各々の半径

この接触面に図-1 (1) のように分布配置した力学モデルに変位分布を与えることで要素間の接触力を得ることができる。この変位分布を図-3 の要素 i, j に固定した n 軸と x 軸がつくる局所座標を用い、それぞれの軸方向成分に分けて表わす。法線 (n 軸) 方向の変位分布 $u_n(t, x)$ は、接近による要素の重なりを近似するように仮定した変位成分 $u_n^{\delta}(t, x)$ (図-4 (1) 参照) と要素 i 、要素 j の回転により生じる変位成分 $u_n^{\theta^i}(t, x)$ 、 $u_n^{\theta^j}(t, x)$ (図-4 (2) 参照) からなるものとして、前述の相対変位を用い次式で与える。

$$u_n(t, x) = u_n^{\delta}(t, x) + u_n^{\theta^i}(t, x) + u_n^{\theta^j}(t, x) \quad (2)$$

ここで

$$u_n^{\delta}(t, x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{r_i + r_j}{r_i \cdot r_j} x^2 + \delta_{ij}(t)$$

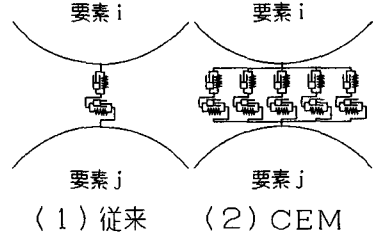


図-1 力学モデル

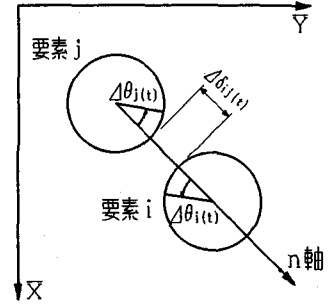


図-2 要素の相対位置

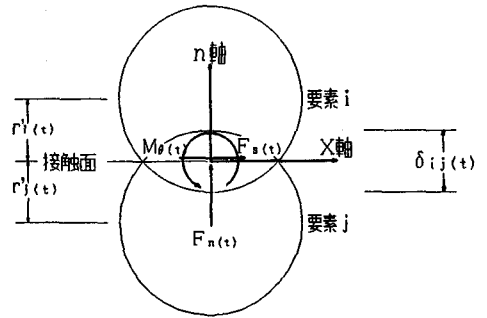


図-3 接触面の位置

$$\begin{aligned} u_n^{\theta i}(t, x) &= -\sin \theta_i(t) \cdot X - r_i'(t) (1 - \cos \theta_i(t)) \\ u_n^{\theta j}(t, x) &= +\sin \theta_j(t) \cdot X - r_j'(t) (1 - \cos \theta_j(t)) \end{aligned}$$

接線方向（x 軸方向）の変位分布 $u_s(t, x)$ は要素の回転による変位成分 $u_s^{\theta i}(t, x)$ 、 $u_s^{\theta j}(t, x)$ （図-4（2）参照）により次式で与える。

$$u_s(t, x) = u_s^{\theta i}(t, x) + u_s^{\theta j}(t, x) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } u_s^{\theta i}(t, x) &= +(1 - \cos \theta_i(t)) \cdot X - r_i'(t) \cdot \sin \theta_i(t) \\ u_s^{\theta j}(t, x) &= -(1 - \cos \theta_j(t)) \cdot X - r_j'(t) \cdot \sin \theta_j(t) \end{aligned}$$

2. 3 粘着力と摩擦を考慮した分布力の計算

接触面上の、法線方向および接線方向の分布力、 $f_n(t, x)$ （要素 i を押す場合を正）、 $f_s(t, x)$ （要素 i を反時計回りに回転させる場合を正）は、それぞれの方向の変位分布 $u_n(t, x)$ 、 $u_s(t, x)$ により、次式（4）で計算する。

$$\begin{aligned} f_n(t, x) &= k_n \cdot u_n(t, x) + \eta_n \cdot (u_n(t, x) - u_n(t - \Delta t, x)) / \Delta t \\ f_s(t, x) &= k_s \cdot u_s(t, x) + \eta_s \cdot (u_s(t, x) - u_s(t - \Delta t, x)) / \Delta t \end{aligned} \quad (4)$$

ここで k_n 、 k_s および η_n 、 η_s はそれぞれ単位面積あたりの法線方向、接線方向のばね定数と粘性係数である。粘性係数 η_n 、 η_s については時刻 $t - \Delta t$ での接触面積 b （後述する式（8）の接触領域に単位奥行きを乗じたもの）と 2 要素の質量の小さいほうの質量 m およびばね定数 k_n 、 k_s により式（5）で決定される。 ζ_n 、 ζ_s は法線および接線方向の減衰の程度を与える無次元量である。この値をゼロとした場合、エネルギーの減衰はない。

$$\begin{aligned} \eta_n &= \zeta_n \cdot 2 \sqrt{m k_n / b} \\ \eta_s &= \zeta_s \cdot 2 \sqrt{m k_s / b} \end{aligned} \quad (5)$$

要素の結合と滑りを考慮するために、引張力の限界値を定める量として粘着力（ c ）、摩擦抵抗力に対して摩擦係数（ μ ）を導入する。この c 、 μ の二量により、 $f_n(t, x)$ 、 $f_s(t, x)$ のとる値を以下のように場合分けする。

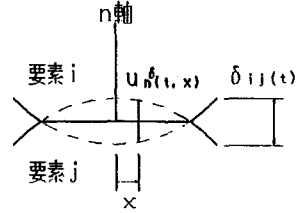
$$f_n(t, x) > 0 \text{ の場合} \quad |f_s(t, x)| > |c| + \mu f_n(t, x) \text{ のとき} \quad |f_s(t, x)| = |c| + \mu f_n(t, x) \quad (6)$$

$$f_n(t, x) \leq 0 \text{ の場合} \quad \sqrt{f_n(t, x)^2 + f_s(t, x)^2} > |c| \text{ のとき} \quad f_n(t, x) = 0, f_s(t, x) = 0 \quad (7)$$

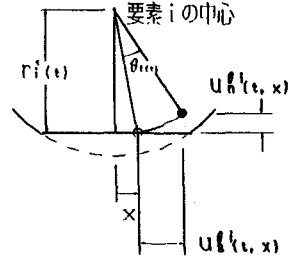
2. 4 接触領域の定義と接触力の計算

要素の結合・分離の判定と前述の分布力が生じる接触面上の範囲を決めるため、以下の三領域を定義する。

$$\begin{aligned} \text{領域 I : } f_n(t, x) &\geq 0 \text{ を満足する圧縮領域} \\ \text{領域 II : } f_n(t, x) &\leq 0 \text{ において } \sqrt{f_n(t, x)^2 + f_s(t, x)^2} \leq |c| \text{ を満たす引張領域} \\ \text{領域 III : 時刻 } t - \Delta t &\text{ における接触領域} \end{aligned} \quad (8)$$



(1) 接近による変位成分



(2) 回転による変位成分

図-4 接触面上の変位成分

時刻 t における接触領域は、圧縮領域（領域Ⅰ）と、履歴を考慮した引張領域、すなわち過去に接触領域であった部分にのみ引張力が生じうるとした引張領域（領域Ⅱ∩領域Ⅲ）の和集合として、式（９）で定める。この接触領域が消滅するとき、要素は完全に分離したものと判定する。

$$\text{接触領域} = \{ \text{領域Ⅰ} \cup (\text{領域Ⅱ} \cap \text{領域Ⅲ}) \} \tag{9}$$

要素 i に作用する接触力、 $F_{n(i)}$ 、 $F_{s(i)}$ 、 $M_{\theta(i)}$ （図－３参照）は、式（４）、（６）、（７）で決められる分布力を、この接触領域で積分して得られる。

$$F_{n(i)} = \int f_n(t, x) \, dX, \quad F_{s(i)} = \int f_s(t, x) \, dX, \quad M_{\theta(i)} = \int f_n(t, x) \cdot X \, dX \tag{10}$$

着目する要素 i に接触する統べての要素について式（１０）から上記の三つの接触力の和を求めることで次の時間ステップでの要素 i の加速度が計算できる。

3. 数値シミュレーション

3. 1 棒状結合モデルでのシミュレーション

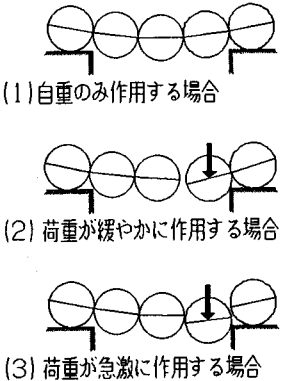
図－５に示すような５個の要素を棒状に連結したモデルを両端で支持し、そのひとつの要素に緩やかに荷重を作用させた場合と急激に作用させた場合の状況を図－５（２），（３）に示す。曲げやせん断破壊のようなモードが現われており、本手法の特徴を端的に示している。

3. 2 一軸圧縮試験を擬したシミュレーション

本手法を用い、直径 d の異なる２種類の要素（ $d=0.30\text{cm}$ 、 $d=0.16\text{cm}$ ）に表１の定数を与えパッキングし、図－９（１）の要素の結合による自立状態をつくりだす。次に、上部の壁を定速度（ 1cm/sec ）で降下させ、破壊にいたるまでの計算をおこなった。これに先立ち、適当な時間間隔を決定するために、直径 $d=0.16\text{cm}$ の要素１個を取り出し、壁に 1cm/sec の速度（ V ）で衝突させ、その跳ね返り速度

（ V' ）と時間間隔の関係を調べてみたので結果を図－６、７に示す。同図より、粒子と壁との定数が $\zeta_n=1.0$ 、 $k_n=2.0 \times 10^7 \text{ dyn/cm}^2$ のときの安定な解を得るための上限の時間間隔は、 $\Delta t=1.0 \times 10^{-4} \text{ sec}$ 程度であることが確認された。なお解析では、 $\Delta t=0.25 \times 10^{-4}$ を用いている。

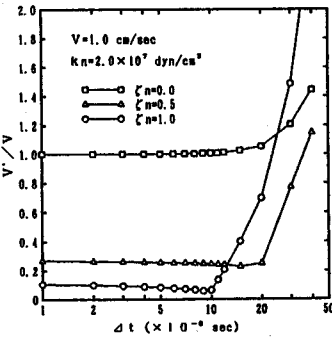
図－８は圧縮する過程で得られる上壁に作用する合力 P とそのときの供試体の高さ H の関係を表わすもので、粘着力をタイプ１の半分としたタイプ２の場合のほうが、合力 P は小さくなっている。



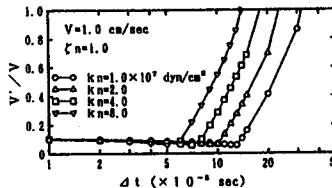
図－５ 棒状結合モデル

表－１ 解析に用いた定数

要素の密度 ρ	2.5gr/cm ³	
重力	980 cm/sec ²	
計算間隔 Δt	0.00025 sec	
	要素と要素	要素と壁
k_n (dyn/cm ²)	1.00×10^7	2.00×10^7
ζ_n	1.0	1.0
k_s (dyn/cm ²)	0.25×10^7	0.50×10^7
ζ_s	1.0	1.0
μ	0.0	0.176
タイプ１、タイプ３		
c (dyn/cm ²)	1.00×10^5	0.0
タイプ２		
c (dyn/cm ²)	0.50×10^5	0.0



図－６ 減衰と時間間隔



図－７ バネ定数と時間間隔

タイプ3は、接触領域の決定方法をタイプ1、2の場合と異ならせ、圧縮前の状態（図-9（1）の自立状態）で接触していた要素間のみ、その接触面上に引張分布力が生じることを許し、かつその範囲も圧縮前の接触領域の大きさを越えないように計算を行なった例である。このように条件を変えた結果、圧縮にともない以前より距離が接近する要素間では接触領域が拡大すると同時に引張分布が生じることを許される範囲も拡大され、結合の度合いが強くなる効果があるタイプ1に対して、そうではないタイプ3では、Pのピークが小さく現れている。

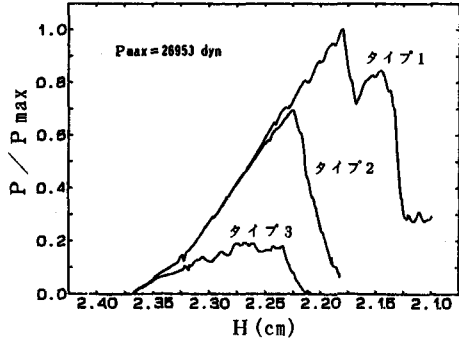


図-8 HとPの曲線

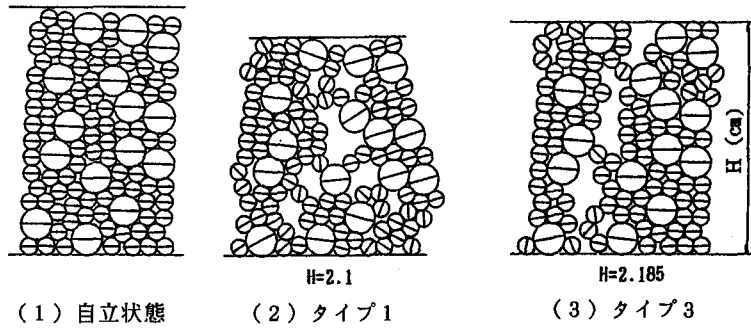


図-9 供試体の変形

3. 3 斜面上部への載荷シミュレーション

直径が0.75cm〜1.39cmの範囲にある4種類の要素に表-2の定数を与え、約60°の傾斜角をもつ斜面を作成し、その肩部へ載荷板に見立てた壁を一定の速度で押し下げるシミュレーションをおこなった。図-10は、載荷開始からその途中までの要素中心の軌跡を図化したものである。載荷部右端から左り斜め下にかけて、動きの激しい要素と緩やかな要素の境界が現れており、滑りなどの地盤の不連続な挙動があったことを示している。

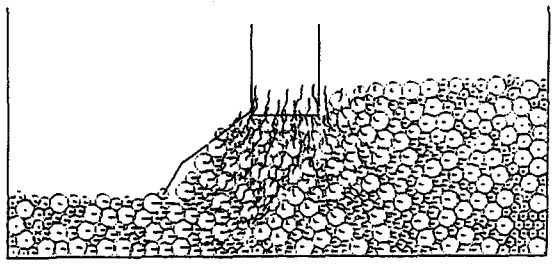


図-10 要素中心の軌跡

表-2 解析に用いた定数

要素の密度 ρ	2.5gr/cm ³	
重力	980 cm/sec ²	
計算間隔 Δt	0.000040 sec	
	要素と要素	要素と壁
k_n (dyn/cm ³)	1.00×10^7	2.00×10^7
ζ_n	1.0	1.0
k_s (dyn/cm ³)	0.25×10^7	0.50×10^7
ζ_s	1.0	1.0
μ	0.839	0.839
c (dyn/cm ²)	1.00×10^6	1.00×10^6

4. おわりに

本研究において、接触する要素の結合・分離状態を力学的に表現することにより、材料の連続体・不連続体挙動を統一的に解析するCEMを提案した。さらに、定性的ではあるがその数値解析例を示し、本手法の有効性を確認した。

---参考文献--- 木山英郎、藤村 尚：カンドルの離散剛要素法を用いた岩質粒状体の重力流動の解析、土木学会論文報告集、NO. 333, pp. 137-146、1983、他