

(55) 有限変形理論による岩質材料のせん断帯の生成

山口大学工学部		サトウ・ラズロ
京都大学工学部	正会員	○ 矢富 盟祥
山口大学大学院		岸田 晋
山口大学工学部	正会員	中川 浩二

SHEAR BAND FORMATIONS FOR ROCK-LIKE MATERIALS AT FINITE DEFORMATION

László SZABÓ	Yamaguchi University
Chikayoshi YATOMI	Kyoto University
Susumu KISHIDA	Yamaguchi University
Koji NAKAGAWA	Yamaguchi University

Abstract

Shear bands are a common occurrence in frictional materials (soils, rocks). The general formulation of localization of deformation into shear bands in the small deformation range is well established. In several cases, however, the small elastoplastic formulation is not satisfactory. The main objective of the paper is the investigation of shear band localization phenomena in finite inelastic deformation processes. The plastic hardening modulus for localization is given in an explicit form for an arbitrary rate independent non-associative plasticity at large strain. Numerical results for the critical orientations and the corresponding hardening modulus are derived for the Mohr-Coulomb and the Drucker-Prager models.

1. はじめに

最近、せん断変形が局所的に大きくなるせん断帯 (shear band) の研究が活発になってきている。特にせん断帯発生の必要条件は、土とか岩などを含む種々の物質においてもその発生条件と方向を予測するのに数多く応用されている (例えば、Bardet[1], Bigoni and Hueckel[2], Rudnicki and Rice[5], Runneson et al.[6])。しかしながら、それらのほとんどの理論的研究はその解析の複雑性を回避するため微小変形論に限られている。

岩質材料におけるせん断帯は、過大な圧縮応力のもとでの室内実験や地層の断層などにしばしば観察され、この場合、変位は小さくても、局所的せん断変形は非常に大きくなり、もはや微小変形理論ではその適用には限界があり、物質の変形挙動をより正確に理解するためにも、有限変形理論で考察することが重要であることは明らかなである。

そこで、本研究では、初めにコーシー応力の Jaumann速度を用いた有限変形における一般的な物質に対する非関連流動速に従う弾塑性物質の構成式を述べたのち、3次元問題における有限変形の場合のせん断帯発生条件に必要な塑性硬化係数を完全に隔な形で表現する。(著者らの知る限り、このような一般的な場合の表現式は、本論文が最初である。)最後にこの得られた表現式の有効性を示すために、Drucker-PragerとMohr-Coulombの降伏条件を用いた弾塑性物質において数値計算例を述べる。

2. 構成式

なめらかな塑性ポテンシャルと降伏関数を用いた非関連流動速に従う等方均一な弾塑性物質を考える。有限変形における構成式でよく用いられるコーシー応力テンソルの Jaumann速度と変形速度Dの関係では(例えば, Bardet[1], Rice[4], Rice and Rudnicki[5]) 次式のように与えられる。

$$\dot{\gamma} = C^{ep} : D \quad (1)$$

ここで C^{ep} は4階の増分弾塑性係数テンソルである。Hを塑性硬化係数とし、PとQをそれぞれ塑性ポテンシャルと降伏関数の単位外向き法線とすると、増分弾塑性係数テンソルは

$$C^{ep} = C^e - \frac{C^e : P \otimes Q : C^e}{H + Q : C^e : P} \quad (2)$$

となる。ここで C^e はGと λ をLameの定数とし、Iと δ はそれぞれ4階と2階の単位テンソルとすると $C^e = 2G I + \lambda \delta \otimes \delta$ となる。

Jaumann 応力速度はWをスピンテンソル(速度勾配の非対称部分)とすると、

$$\dot{\sigma} = \sigma - W \cdot \sigma + \sigma \cdot W \quad (3)$$

で定義される。

3. セン断帯発生条件

歪局所化理論の主な目的の一つは、均一な応力、歪場でセン断帯発生の必要条件を決定することである。その条件は、増分釣合式が楕円型であることが失われる条件であり、速度ゼロの加速度波が存在する条件に等しい。セン断帯発生の一般的な理論はRudnicki and Rice[5]とRice[4]によって与えられ、例えばBardet[1], Bigoni and Hueckel[2], Yatomi et al.[8]により議論されている。ここではRice[4]の論文を参照し、簡単にその必要条件を述べる。

セン断帯の外側の速度勾配を L^0 とし、 ΔL を、セン断帯の法線方向の距離だけの関数である速度勾配の外側と内側の差とすると、セン断帯の内側の速度勾配は

$$L = L^0 + \Delta L \quad (4)$$

で定義される。その時、幾何学的な適合条件により速度勾配の差は、

$$\Delta L = g \otimes n \quad (5)$$

なるランク1のテンソルに制限される。 n はセン断帯の単位法線ベクトルであり、 g はセン断帯の法線方向の距離だけの関数であり、セン断帯の外側ではゼロとなるベクトルである。

この時、式(5)より、変形速度とスピンテンソルの差は

$$\Delta D = \frac{1}{2}(g \otimes n + n \otimes g), \quad \Delta W = \frac{1}{2}(g \otimes n - n \otimes g) \quad (6)$$

となる。

さらに、増分釣合式は、次式のようになる。

$$n \cdot (\dot{\sigma} - \dot{\sigma}^0) = 0. \quad (7)$$

セン断帯が生じる瞬間において、構成式が外と内で連続的な応答をする場合(連続分岐)、構成式(1)を式(7)に代入し、式(3)と(6)を使うと次式を得る。

$$B \cdot g = 0 \quad (8)$$

ここで構成式(1)に対するBは、後で述べる。結局上式(8)により、セン断帯が生成するための必要条件は、

$$\det(B) = 0. \quad (9)$$

となる。ここで式(9)の行列式の値を得るのに、Cayley-Hamiltonの定理を使うと

$$\det(B) = \frac{1}{3} \text{tr} B^3 + \frac{1}{6} (\text{tr} B)^3 - \frac{1}{2} \text{tr} B \text{tr} B^2. \quad (10)$$

与えられる。

構成式(1)の場合、テンソルBは

$$B = n \cdot C^p \cdot n + \frac{1}{2}[(n \cdot \sigma \cdot n)\delta + \sigma \cdot n \otimes n - n \otimes n \cdot \sigma - \sigma] \quad (11)$$

となる(例えば, Bardet[1], Rice[4] 参照). 式(1)の場合, 式(11)は

$$B = (G + \frac{1}{2}n \cdot \sigma \cdot n)\delta + (G + \lambda)n \otimes n - \frac{a \otimes b}{H + P : C^e : Q} - \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}(\sigma \cdot n \otimes n - n \otimes n \cdot \sigma) \quad (12)$$

ここで

$$a = 2Gn \cdot P + \lambda n \operatorname{tr} P, \quad b = 2GQ \cdot n + \lambda n \operatorname{tr} Q \quad (13)$$

とおいた. 式(10)を使って, 式(9)より塑性硬化係数は

$$\begin{aligned} H = & -2GP : Q - \lambda \operatorname{tr} P \operatorname{tr} Q \\ & + k_1 \{ (a \cdot b) [(2G + \lambda)(G + 2n \cdot \tilde{\sigma} \cdot n - I_{\tilde{\sigma}}) - (n \cdot \tilde{\sigma} \cdot n)I_{\tilde{\sigma}} + II_{\tilde{\sigma}} + n \cdot \tilde{\sigma}^2 \cdot n] \\ & - (a \cdot n)(b \cdot n) [(G + \lambda)(G + n \cdot \tilde{\sigma} \cdot n - I_{\tilde{\sigma}}) + n \cdot \tilde{\sigma}^2 \cdot n] \\ & - (a \cdot n)(b \cdot \tilde{\sigma} \cdot n)(2G + \lambda - I_{\tilde{\sigma}}) + (b \cdot n)(a \cdot \tilde{\sigma} \cdot n)(2n \cdot \tilde{\sigma} \cdot n - \lambda - I_{\tilde{\sigma}}) \\ & + (a \cdot \tilde{\sigma} \cdot b)(2G + \lambda + n \cdot \tilde{\sigma} \cdot n - I_{\tilde{\sigma}}) \\ & + (b \cdot n)(a \cdot \tilde{\sigma}^2 \cdot n) - (a \cdot n)(b \cdot \tilde{\sigma}^2 \cdot n) - (a \cdot \tilde{\sigma} \cdot n)(b \cdot \tilde{\sigma} \cdot n) \\ & + a \cdot \tilde{\sigma}^2 \cdot b \} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで, $\tilde{\sigma} = \sigma/2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_1} = & (2G + \lambda)(G + n \cdot \tilde{\sigma} \cdot n - I_{\tilde{\sigma}})(G + 2n \cdot \tilde{\sigma} \cdot n) + n \cdot \tilde{\sigma}^3 \cdot n \\ & + (2G + \lambda - I_{\tilde{\sigma}})(n \cdot \tilde{\sigma}^2 \cdot n) + (2G + \lambda + n \cdot \tilde{\sigma} \cdot n)II_{\tilde{\sigma}} - \det(\tilde{\sigma}) \end{aligned}$$

また, $I_{\tilde{\sigma}}$, $II_{\tilde{\sigma}}$ はそれぞれ応力テンソル $\tilde{\sigma}$ の第1, 第2不変量である.

上式(14)で $\tilde{\sigma} = 0$ とすると, 周知の微小変形の場合の塑性硬化係数となる(例えば, Bardet[1], Bigoni and Hueckel[2], Prevost[3], Rice[4] 参照).

4. 数値計算例

本節では, 前節で得られた結果を使って, 平面歪条件のもとでの2つの単純な場合(周全体の引張りと圧縮の場合)を詳細に考察する.

このような問題は, 例えば, Bardet[1], Bigoni and Hueckel[2], Rudnicki and Rice[3], Yatomi et al.[8]が種々の物質モデルを使って, いくつかの局所せん断帯の結果を得ている. しかし, ほとんどの場合, せん断帯の生成は最初から2次元問題に仮定されていた. 一方, ここで得られた平面歪の計算例は, 一般的に得られた3次元問題の単なる特別な場合となっている.

Runessonら[6]と同様に, x_1, x_2 座標軸を主軸座標系とすると, 平面成分は $P_1, P_2, Q_1, Q_2, \sigma_1, \sigma_2$ となり P_3, Q_3, σ_3 は面外主軸方向になる. 引張りを正に取り, 主応力が $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$. 又, 上記の平面応力成分を常に $\sigma_1 \geq \sigma_2$ と仮定する.

本例では, $\sigma_I = \sigma_1, \sigma_2 = \sigma_{III}$ として, σ_{II} は面外主応力とし, $2\sigma_{II} = \sigma_I + \sigma_{III}$ と仮定する(Yatomi et al.[8]参照).

せん断帯をなす面の単位法線ベクトルを n とし, x_1, x_2 面において x_1 軸と $n(\cos\theta, \sin\theta)$ とのなす角を θ とする.

以上の様に仮定すると、式(14)の硬化係数は次式のように表せる。

$$\frac{H}{2G} = c_0 + \frac{a_3 \tan^6 \theta + a_2 \tan^4 \theta + a_1 \tan^2 \theta + a_0}{b_3 \tan^6 \theta + b_2 \tan^4 \theta + b_1 \tan^2 \theta + b_0} \quad (15)$$

ここで、係数 a_i , b_i と c_0 は文献[7] で与えられている。この時、限界せん断帯の方向は θ_{cr} は上述の θ を変数と見た時の H の最大値問題の解として与えられる。上式で $x = \tan^2 \theta$ とおくと、 H を最大にする方向 θ_{cr} は、次の4次方程式の根となる。

$$q_4 x^4 + q_3 x^3 + q_2 x^2 + q_1 x + q_0 = 0 \quad (16)$$

ここで

$$q_0 = a_1 b_0 - a_0 b_1, \quad q_1 = 2(a_2 b_0 - a_0 b_2), \quad q_2 = 3a_3 b_0 + a_2 b_1 - a_1 b_2 - 3a_0 b_3$$

$$q_3 = 2(a_3 b_1 - a_1 b_3), \quad q_4 = a_3 b_2 - a_2 b_3 \quad (17)$$

上式を代数的に解き、実数解がいくつかある場合は、式(15)の H を最大にする根を θ_{cr} とする。角 ϕ と ψ をそれぞれ内部摩擦角、ダイレイタンシー角とすると、Mohr-Coulomb の降伏条件より、

$$P_I = \frac{1 + \sin \psi}{\sqrt{2(1 + \sin^2 \psi)}}, \quad P_{II} = 0, \quad P_{III} = \frac{\sin \psi - 1}{\sqrt{2(1 + \sin^2 \psi)}}, \quad (18)$$

$$Q_I = \frac{1 + \sin \phi}{\sqrt{2(1 + \sin^2 \phi)}}, \quad Q_{II} = 0, \quad Q_{III} = \frac{\sin \phi - 1}{\sqrt{2(1 + \sin^2 \phi)}}, \quad (19)$$

Drucker-Prager モデルの場合、偏差応力関連流動則を使うと、

$$Q = \cos \alpha S + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \alpha \delta, \quad P = \cos \beta S + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \beta \delta, \quad (20)$$

ここで S は単位偏差応力である。角 α , β は Coulomb の条件で定義された ϕ と ψ との間に次式の関係がある。

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3} \tan \phi}{\sqrt{2 - \tan^2 \phi}}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{3} \tan \psi}{\sqrt{2 - \tan^2 \psi}} \quad (21)$$

微小変形理論による平面歪の場合の、せん断帯の方向と限界塑性硬化係数は文献[6] で記してある。本研究における有限変形の場合、平面歪引張り（圧縮）の場合の結果が方向に関しては Fig. 1, 限界塑性硬化係数に関しては Fig. 2 の右側（左側）に記してある。ここで、 x_1 方向の応力は引張りの場合 $\sigma_{II}/G = 0.001$, 圧縮の場合 $\sigma_I/G = -0.001$ と固定した。また、ポアソン比は $\nu = 0.25$, $\phi = 30^\circ$, $\psi = 0^\circ$ とした。Fig. 1 より、Mohr-Coulomb と Drucker-Prager の場合、引張り、圧縮いづれの場合もせん断帯の方向は、 x_1 方向の応力の絶対値が大きくなると同じ極限值へ近づいていることがわかる。Fig. 1 より、限界塑性硬化係数は Mohr-Coulomb モデルの場合連続であるが、その極小値が圧縮側にある。Drucker-Prager モデルの場合は限界塑性硬化係数は、微小変形の場合、引張りと圧縮側で異なり、有限変形の場合は x_1 方向の応力の絶対値と共に単調増加している。（すなわち有限変形理論による方が、より早くせん断帯が出るようになる。）

5. 結論

本研究では、種々の構成式モデルに応用できる有限変形の場合にも有効なせん断帯生成の必要条件の表現式を得た。本表現式によるせん断帯の方向と対応する限界塑性硬化係数は、それらの結果が与えられた応力の大きさによって異なることから、微小変形理論によるものより、より正確に実験値に合わせることが出来る。

また、得られた本表現式は、有限要素法等による数値解析での結果を調べる場合などにも役に立つであろう。

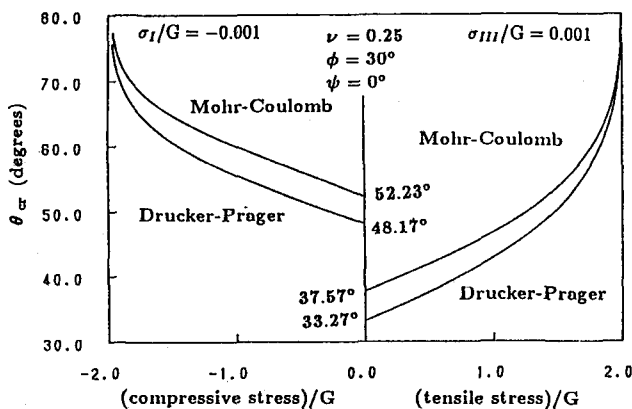


Fig. 1. Critical orientation vs tensile and compressive stress.

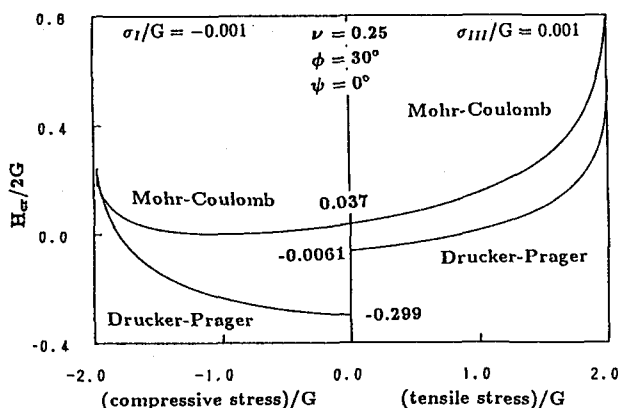


Fig. 2. Critical plastic hardening modulus vs tensile and compressive stress.

参考文献

- [1] Bardet, J.P., A comprehensive review of strain localization in elastoplastic soils, *Comput. and Geotechnics*, Vol.10, pp.163-188, 1990.
- [2] Bigoni, D. and Hueckel, T., Uniqueness and localization -I. Associative and non-associative elastoplasticity, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.28, pp.197-213, 1991.
- [3] Prevost, J.H., Localization of deformations in elastic-plastic solids, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol.8, pp.187-196, 1984.
- [4] Rice, J.R., The localization of plastic deformation. In *Theoretical and Applied Mechanics, Proc. 14th IUTAM Congress, Delft, The Netherlands, 30 August-4 September 1976* (Edited by W.T.Koiter), pp.207-220. North-Holland, Amsterdam.
- [5] Rudnicki, J.W. and Rice, J.R., Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.23, pp. 371-394, 1975.
- [6] Runesson, K., Ottosen, N.S. and Peric, D., Discontinuous bifurcations of elastic plastic solutions at plane stress and plane strain, *Int. J. Plasticity*, Vol.7, pp.99-121, 1991.
- [7] Szabó, L., Shear band formulations in finite strain elastoplasticity, *Int. J. Solids Struct.*, (submitted for publication), 1991.
- [8] Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I., General theory of shear bands formulation by a non-coaxial cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol.29, pp.41-53, 1989.