

(73) クラックテンソルを用いた微視クラックの 進展に対する考察

株式会社 フジタ 技術研究所 正員 ○仲沢 武志
東北大学工学部 正員 佐武 正雄
株式会社 フジタ 技術研究所 正員 門田 俊一

Consideration of an Evolution Model for Microcracks by using Crack Tensor

FUJITA CORPORATION Takeshi Nakazawa
Tohoku University Masao Satake
FUJITA CORPORATION Shunichi Kadota

ABSTRACT

Mechanical properties of brittle materials, such as concrete and rocks, are greatly depend on the microstructures induced in the process of deformation. Thus, it is important to take into account the evolution of microstructures in the formation of constitutive equations for brittle materials. Then, in this paper, the concept of crack tensor is introduced to represent the effect of microcracks on the elastic properties of brittle materials, and constitutive equation with an evolution of microcracks.

1. まえがき

コンクリートや岩石のようなぜい性材料の非弾性挙動は微視クラックの進展に起因するものと考えられる。また、このような材料を破壊力学の考え方で解析する際には、巨視クラック先端近傍の微視クラック集積領域、いわゆるプロセスゾーンのモデル化が問題となる。よって、そのモデル化においては、材料に内材する微視クラックが巨視的力学特性に及ぼす影響を明かにすることが重要である。そこで、筆者等は、微視クラックの力学的効果をEshelbyの楕円体介在物法による固有ひずみで評価し、微視クラックによる微視構造の定量化として提案されているクラックテンソルとの対応づけを行い、微視構造の影響を考慮した弾性的な構成則を考察している¹⁾。しかしながら、微視クラックの進展による微視構造は、外力等の作用によって変化するものと考えられる。よって、ここでは、微視クラックによる微視構造の変化を考慮できるような構成則を提案し、若干の考察を行う。本文は、その概要を示したものである。

2. クラックテンソルを考慮した弾性的構成則¹⁾²⁾

Eshelbyの楕円体介在物法を図-1に示すような2次元スリット状クラックに適用した場合、それを平均化する領域の面積をAとすれば、領域A内の平均的な固有ひずみを考慮した全ひずみ ε_{ij} とクラックテンソル

$$F_{ij} = \frac{2\pi}{A} \sum_k a^{(k)2} n^{(k)}_i n^{(k)}_j \quad (1)$$

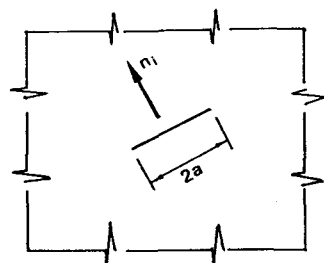


図-1 2次元スリット状クラック

の関係は、クラック間の力学的相互作用を考慮しない場合には、次式のように得られる。

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^0_{ij} + \varepsilon^*_{ij} = (D_{ijkl} + L_{ijkl}) \sigma_{kl} \quad (2)$$

ここに、 $2a$ はクラックの大きさを表し、 n_i はクラック面法線ベクトルを表す。また、 ε^*_{ij} は固有ひずみ、 D_{ijkl} は母材の弾性係数である。なお、母材は等方弾性体であるものとする。また、 L_{ijkl} は微視クラックによる固有ひずみの影響を表すものであり、平面応力状態に対しては次式のように求められる。

$$L_{ijkl} = \frac{1}{4E} (F_{ik} \delta_{jl} + F_{jk} \delta_{il} + F_{il} \delta_{jk} + F_{jl} \delta_{ik}) \quad (3)$$

式(2)が従来から考察されている微視クラックの影響を考慮した構成則である。しかしながら、微視構造を構成する個々の微視クラックは、外力等の作用によって進展するものと考えられるが、式(2)では微視クラックの進展を考慮することはできない。そこで、次に微視クラックの進展を考慮できる構成則について考察する。

3. 微視構造の変化を考慮した構成則

先に記述したように、微視クラックは、外力等の作用によって進展すると考えられるため、それに伴って、微視構造は変化する。よって、このような微視構造の変化を表現できるような構成則を提案する。なお、ここで記述する構成則はMroz等⁴⁾によっても考察されているが、彼等は微視構造の定量化に転位密度テンソルを用いている。さらに、微視クラックの進展則も考察しているが、その進展方向を表現する“directional tensors”や材料の塑性的な硬化挙動を表す係数の具体的な記述はなされておらず、概念的なものを提案している。そこで、ここでは、塑性論での塑性ひずみ流れ則の考え方にに基づき、“directional tensors”に対する具体的な形を提案する。また、材料の塑性的な硬化挙動を表す係数についても、従来の塑性論を参考として考察する。

微視構造の変化を考慮できるような構成則は、増分形で考察されている塑性論を参考し、以下のようなものからなる。

(1) 微視クラック成長基準 (2) クラック進展方向を記述するテンソル (3) 硬化関数

これらは各々増分形塑性論における降伏関数、塑性ひずみ流れ則および硬化関数に対応するものである。

以下に、これらについて記述する。

(1) 微視クラック進展基準¹⁾

微視構造を構成する個々の微視クラックの進展挙動は、クラックの長さ、クラックの方向分布、外力等の条件で異なると考えられるが、ここでは、考察の第1段階として、塑性論における降伏基準のように表せるものとする。なお、筆者等¹⁾は、異方性材料に対する降伏基準³⁾を参考として、次式のようなクラック成長基準 J を提案している。

$$J(\sigma_{ij}, F_{kl}, r) = G_{ij} \sigma_{ij} + \sqrt{H_{ijkl} \sigma^*_{ij} \sigma^*_{kl}} - r = 0 \quad (4)$$

ここに、 σ^*_{ij} は偏差応力であり、 r は基準とする強度である。また、係数テンソル G_{ij} 、 H_{ijkl} はクラックテンソルを引数として等方テンソル値関数で展開されるものである。ここでは、異方性の示す性質と計算の便宜を考慮して、クラックテンソルの関数 J への寄与はそれぞれの項で応力テンソルと同次であるものとし、異方性の影響を主な考察の対象とすることから、クラックテンソルのスカラー不変量は考慮しないものとする。このように考えた場合、係数テンソル G_{ij} 、 H_{ijkl} は次式のようになる。

$$\begin{aligned} G_{ij} &= s F_{ij} \\ H_{ijkl} &= h_1 (\delta_{ij} F_{kl} + \delta_{kl} F_{ij}) + h_2 F_{ij} F_{kl} \\ &\quad + h_3 (F_{ir} F_{rk} \delta_{ij} + F_{kr} F_{rj} \delta_{il} + F_{ir} F_{rl} \delta_{kj} + F_{ir} F_{rj} \delta_{ik}) \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 s 、 $h_1 \sim h_3$ は材料定数であるが、 $\delta_{ij} \sigma^*_{ij} = 0$ であるので、 h_1 は任意でよい。そこで、ここでは、簡単のために、 h_1 をゼロとする。その適用性については文献1)を参照されたい。

(2) クラック進展方向を記述するテンソル

微視クラック進展方向を記述するテンソルは、増分形の塑性論における塑性ひずみの流れ則に対応するものである。ここでは、微視クラックの進展の影響をクラックテンソルの増分で表すものとし、次式を考える。

$$\dot{F}_{ij} = q c_{ij} \quad (6)$$

ここに、 c_{ij} は微視クラックの進展方向を規定するテンソルであり、Mroz等⁴⁾の"directional tensors"に相当するものである。また、 q は微視クラック進展密度に対する比例定数を示す。微視クラックの進展は、対象とする材料の挙動に依存するものであるので、各々の材料特性を把握する必要がある。ここでは、このような実験的考察が少ないことから、次に示すような3つの場合を提案する。

(ケース1)

$$c_{ij} = \alpha m_i m_j + \beta s_i s_j \quad (7)$$

ここに、 m_i :最小主応力方向の単位ベクトル

s_i :最大主応力方向の単位ベクトル

α, β :実験定数

(ケース2)

$$c_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (8)$$

δ_{ij} :クロネッカーのデルタ

(ケース3)

$$c_{ij} = \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (9)$$

G :ポテンシャル

クラックテンソルで表現されるような微視クラックとは逆に、クラック密度が小さく、個々のクラックが大きいような巨視クラックの成長する方向は、最大主応力に直交する方向とみなすことができる。ケース1において、 $\alpha > \beta$ としたときには、そのような概念を微視クラックの成長に適用したものである。ケース2は、微視クラックの成長は等方であるとしたものである。ケース1の表現によって、ケース2を表すことはできるが、微視クラックの進展が等方的であるような場合、それは材料特性と考えられることから、このようにケース2として記述する。ケース3は、微視クラックの成長は応力テンソルに共軸としたものである。これは、塑性論における塑性ひずみ流れ則を適用したものである。

(3) 硬化関数

増分形の塑性論と同様な概念であるが、ここで考察する構成則に対する実験的検討が少ないことから、考察の第1段階として、硬化関数の具体的関数形については考慮しないものとする。

(4) 一般的構成則の誘導

微視構造の変化を考慮した構成則の一般形を誘導する。増分形で表されている塑性論での定式化と同様に、微視クラック成長基準 J を全微分すると次式を得る。なお、ここでは材料の塑性的な硬化を表す関数はクラックテンソルで表されるものとする。

$$\dot{J} = \frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} \dot{F}_{ij} + \frac{\partial J}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial F_{ij}} \dot{F}_{ij} = 0 \quad (10)$$

式(10)にクラック進展方向のテンソル式(6)を代入し、係数 q について整理すると次式を得る。

$$q = \frac{\frac{\partial J}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl}}{- \left[\frac{\partial J}{\partial F_{mn}} + \frac{\partial J}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial F_{mn}} \right] c_{mn}} \quad (11)$$

式(11)を式(6)に代入することによって、微視構造の変化と応力増分の関係を、次式のように得ることができる。

$$\dot{F}_{ij} = \frac{c_{ij} \frac{\partial J}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl}}{- \left[\frac{\partial J}{\partial F_{mn}} + \frac{\partial J}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial F_{mn}} \right] c_{mn}} \quad (12)$$

ところで、微視クラックによる微視構造を考慮した弾性的構成則は式(2)であるが、そこでは、全ひずみが、応力テンソルとクラックテンソルの関数として得られている。よって、ここでは、全ひずみに対する増分を次式で得られるものとする。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = (D_{ijkl} + L_{ijkl}) \dot{\sigma}_{kl} + M_{ijkl} \dot{F}_{kl} \quad (13)$$

ここに、 M_{ijkl} は次式である。

$$M_{ijkl} = \frac{1}{4E} (\sigma_{ik} \delta_{jl} + \sigma_{jk} \delta_{il} + \sigma_{il} \delta_{jk} + \sigma_{jl} \delta_{ik})$$

式(13)に式(12)から得られるクラックテンソルの増分を代入することによって、微視構造の変化を考慮した構成則を次式のように得ることができる。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = (D_{ijkl} + L_{ijkl}) \dot{\sigma}_{kl} + M_{ijpq} N_{pqkl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (14)$$

なお、ここに、 N_{ijkl} は次式である。

$$N_{ijkl} = \frac{c_{ij} \frac{\partial J}{\partial \sigma_{kl}}}{- \left[\frac{\partial J}{\partial F_{mn}} + \frac{\partial J}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial F_{mn}} \right] c_{mn}} \quad (15)$$

式(14)がここで提案する微視構造の変化を考慮した構成則である。

以上は一般的な記述であるため、次により詳しく考察する。

4. 微視構造の変化を考慮した構成則の考察

ここで提案した微視構造の変化を考慮した構成則の適用性を以下に考察する。3. で提案した構成則を用いて材料非線形挙動を表現する。説明のため式(14)を行列表示すれば、構成則は次式のように表される。

$$\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ 2\dot{\epsilon}_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1+F_{11}+S_{11}, & -\nu+S_{12}, & F_{12}+S_{13} \\ -\nu+S_{21}, & 1+F_{22}+S_{22}, & F_{12}+S_{23} \\ F_{12}+S_{31}, & F_{12}+S_{32}, & 2(1+\nu) \\ & & +(F_{11}+F_{22})+S_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{12} \end{pmatrix} \quad (16)$$

ここに、 F_{11} , F_{22} , F_{12} はクラックテンソルの成分である。また、 S_{ij} はクラックの進展の影響を表すものであり、式(15)における $\partial J / \partial \sigma_{ij}$, $\partial J / \partial F_{ij}$ および c_{ij} より求められるものである。簡単のために上述のケース1を考え、微視クラックの進展は最大主応力に直交する場合、すなわち、式(7)において、 $\alpha = 1$, $\beta = 0$ とする。さらに、座標軸を応力の主軸とし、 $\dot{\sigma}_{22} = \dot{\sigma}_{22}$ で他の応力成分はゼロとなるような1軸載荷を考える。この場合、クラックの進展の影響を表すものは、 S_{22} および S_{33} が考えられるが、 $\dot{\sigma}_{12}$ がゼロのため、 S_{33} は材料挙動に影響しない。また、既存する微視クラックによって、軸応力の作用によりせん断ひずみが生じるが、式(7)のように考える場合、これは弾性的なひずみであり、微視クラックの進展は影響しない。従って、ここでは、クラックの進展の影響を説明するために、次式のような、載荷方向の1軸応力-ひずみ関係を考える。

$$\dot{\epsilon}_{22} = \frac{1}{E} (1 + F_{22} + S_{22}) \dot{\sigma}_{22} \quad (17)$$

ここに、

$$S_{22} = \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial J}{\partial \sigma_{22}} C_{22} \sigma_{22} \quad (18)$$

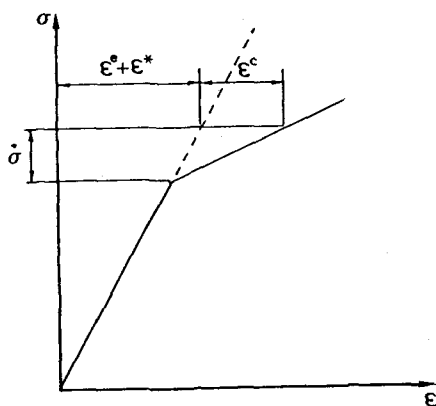


図-2 微視クラックの進展を考慮した
応力-ひずみ関係

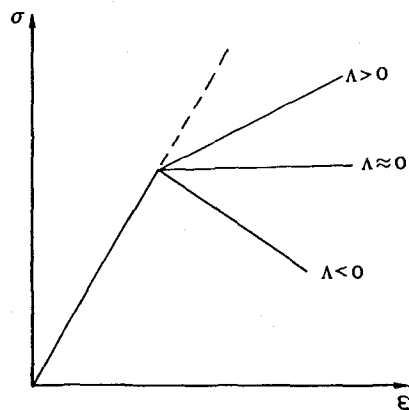


図-3 クラック進展硬化

$$\Lambda = - \left[\frac{\partial J}{\partial F_{ij}} + \frac{\partial J}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial F_{ij}} \right] C_{ij} \quad (19)$$

これらを模式的に表したものが図-2である。図中の記号 ε^* はクラックの進展によるひずみを表している。

クラック進展基準後の挙動は、その影響によるひずみが生じ、コンプライアンスが上昇している。その結果として、材料挙動は塑性的な硬化を示している。なお、このような材料の塑性的な硬化挙動をここでは「クラック進展硬化」と呼ぶこととする。また、クラック進展硬化を表すためには、硬化を表す係数 Λ は正の値である必要がある。 Λ がゼロでは式(18)を計算することはできないが、限りなくゼロに近い値では、 S_{22} は無限大となり、塑性論での完全流れを表す。また、係数 Λ が負の場合には、 $(\partial J / \partial \sigma_{ij}) \dot{\sigma}_{ij}$ もまた負でなければ、クラックテンソルの増分における成分が負となる。これは荷重の増加によって微視クラックによる微視構造の減少を表し、一般には考えにくい。よって、 $(\partial J / \partial \sigma_{ij}) \dot{\sigma}_{ij}$ が負となるためには、応力増分が負である必要がある。これは、材料挙動としてひずみ軟化を示すことになる。これらを模式的に示したものが図-3である。

5. あとがき

微視クラックによる微視構造をクラックテンソルで定量化し、それを考慮した構成則を、微視クラックの進展による微視構造の変化を考慮できるように拡張した。ここで記述したものは、コンクリートや岩石等の材料の非線形挙動が微視クラックの進展によるものと考えた構成則である。一般的な定式化の記述であるため、今後さらに実験的検討等とともに詳細な考察をしたいと考えている。

参考文献

- 1) 仲沢武志、佐武正雄：クラックテンソルによる微視クラックの表現とその応用、第22回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集、1990
- 2) M.Oda, K.Suzuki and T.Maeshibu: "Elastic Compliance for Rock-like Materials with Random Cracks" Soils and Foundation, Vol. 24, No. 3, 1984
- 3) S.C.Cowin: "Fabric Dependence of An Anisotropic Strength Criterion", Mechanics of Materials 5, 1986
- 4) A.Dragon and Z.Mroz: Continuum Model for Plastic-Brittle Behaviour of Rock and Concrete, Int. J. Sci., Vol. 17, 1979