

(70) 要素の変形を考慮した不連続体解析

埼玉大学工学部 浜島良吉, ○大矢敏雄, 羽生 剛

Analysis of discontinuous mass considering the deformation of elements

Ryokichi HAMAJIMA, Toshio OHYA, Takeshi HANYU ; Saitama University

Abstract

Usually rock mass contains many cracks and joints. When the constitutive equation necessary for their analysis is determined based on experiments, the strength deformation characteristics differ according to the sizes and shape of the specimen, and the loading method, i.e., rigid plate loading or uniform pressure loading. Particularly when the behaviors after the peak load are put in question, these factors have a large effect.

The authors presented new discontinuous analysis methods considering the deformation of elements to obtain true material characteristics.

1 はじめに

近年の地下空間開発の必要性から種々のアプローチにより不連続性岩盤の解析が成されている。本研究ではこうした亀裂あるいはすべり進展と要素変形とを同時に考慮しう不連続体解析へのアプローチを考える。

図.1 (a)においては通常の有限要素解析で用いられる三角形要素分割であり、図.1 (b)はこれをドローネの三角形とするボロノイ分割を示す。図.1 (c)は図.1 (a)の三角形要素に内接するように作成された粒状要素である。これら図.1 (a)(b)(c)の要素は領域内に任意に点を発生させ、これより自動的に作成することが出来る。ここでは図.1 (a)の三角形メッシュ分割を基にハイブリッド応力法による要素変形を考慮した不連続体解析を示し、図.1 (b)のボロノイ分割においては、ハイブリッド変位法を用いた解析法の定式化を行う。しかしこれらの解析法のみでは岩盤内部の力学的特性、特に図.1 (d)にみられるひずみ軟化領域での特性を詳しく検討することが出来ない。これに対しては図.1 (c)の粒状要素モデルを用いた解析が考えられよう。不連続体解析には種々の方法が考えられるが、1つの解析法で全ての力学現象を捉えることは困難であり、それぞれを使

い分け、又、いくつかの組合せで解析を行う必要がある。

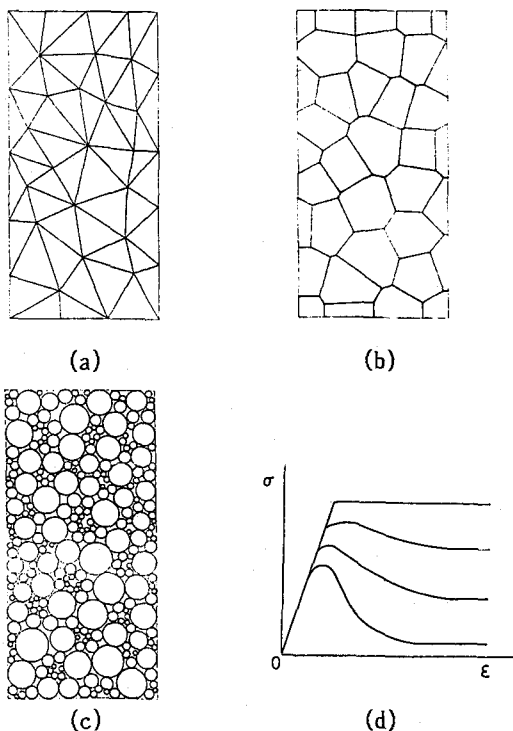


図.1 要素種類

2 ハイブリッド応力法

ここでは領域 V を N 個の有限の大きさの要素 $V_1, V_2, \dots, V_N$ に仮想的に分割し、これらの要素の集合体として物体を取り扱う。

ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギー原理の汎関数は 1 個の要素について示せば次式のように表せる。

$$\Pi_{CH} = \sum_n \left\{ \int \int_{V_n} B(\sigma_{ij}) dx dy - \int_{\partial V_n} u_i T_i dS - \int_{S \sigma_n} u_i \bar{T}_i dS \right\} \quad \dots(1)$$

ここで、 $B(\sigma_{ij})$: コンプリメンタリエネルギー、 u_i : 変位、 V_n : 要素の体積、 ∂V_n : 要素の境界、 $S \sigma_n$: 力学的境界、 σ_{ij} : 応力、 $T_i = \sigma_{ij} n_j$ 、 n_j : 方向余弦、 $\bar{T}_i$: 外力、 Σ : 要素全部の和である。

また、付帯条件は釣合条件式と幾何学的境界での境界条件である。

上式を図. 2 のような局所座標系を用いて表すと、

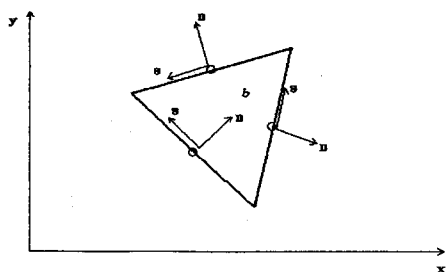


図. 2 局所座標系

変位、応力について次式が成立する。

$$\begin{aligned} u_x &= lU - mV \\ u_y &= mU + lV \\ \sigma_n &= \sigma_x l^2 + 2\tau_{xy} lm + \sigma_y m^2 \\ \sigma_s &= \sigma_x m^2 - 2\tau_{xy} lm + \sigma_y l^2 \\ \tau_{ns} &= -(\sigma_x - \sigma_y) lm + \tau_{xy} (l^2 - m^2) \end{aligned} \quad \dots(2)$$

ここで、 l, m : 方向余弦、 u_x, u_y : x, y 方向の変位、 U, V : 要素境界の n, s 方向の変位である。

式(2)を用いて式(1)を変換すると、

$$\Pi_{CH} = \int \int_{V_n} B(\sigma_{ij}) dx dy - \int_{\partial V_n} (U \sigma_n + V \tau_{ns}) dS + \int_{S \sigma_n} (U \bar{\sigma}_n + V \bar{\tau}_{ns}) dS \quad \dots(3)$$

3 ひび割れ面における条件式の導入

ひび割れ面における条件式を引張応力については仮想ひび割れモデルを用い、以下のように仮定する。

$$d\sigma_n - C_{NN} dU = 0, d\tau_{ns} - C_{NS} dV = 0 \quad \dots(4)$$

ここで、 C_{NN} は引張軟化曲線の勾配、 dU はひび割れ幅、 C_{NS} はせん断剛性、 dV はずれである。

せん断破壊については、完全弾塑性とし、初期降伏面としてはモルクーロンを仮定する。

$$d\tau_{ns} \pm C_1 d\sigma_n = 0 \quad \dots(5)$$

ここで、 C_1 は摩擦係数である。

さらに、ラグランジェの未定乗数 λ, μ, ν を用いて式(4), (5)を式(3)に導入すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi_{CH}^* &= \Pi_{CH} \\ &+ \int_{SC} [\lambda (d\sigma_n - C_{NN} dU) \\ &+ \mu (d\tau_{ns} - C_{NS} dV)] dS \\ &+ \int_{SI} \nu (d\tau_{ns} \pm C_1 d\sigma_n) \quad \dots(6) \end{aligned}$$

ここで、 SC は引張破壊面、 SI はすべり破壊面を意味する。式(6)のラグランジェの未定乗数の物理的意味は停留条件式より求めることができる。

すなわち、

$$\begin{aligned} dU &= \lambda, dV = \mu && SC \text{ 上において} \\ dU &= C_1 \nu, dV = \nu && SI \text{ 上において} \end{aligned}$$

となる。したがって、弾塑性剛性方程式を求めるための変分原理は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi_{CH}^* &= \Pi_{CH} \\ &+ \int_{SC} (\lambda d\sigma_n + \mu d\tau_{ns}) dS \\ &- \frac{1}{2} (\lambda^2 C_{NN} + \mu^2 C_{NS}) dS \\ &+ \int_{SI} \nu (d\tau_{ns} \pm C_1 d\sigma_n) \quad \dots(7) \end{aligned}$$

4 割裂試験シミュレーション

本手法を用いてコンクリートの割裂引張試験をシミュレートする。このような実験は長谷川らによって行われており、直径が異なると加圧板と試験体との接触長が変化するので応力分布の差異が生じ、それが寸法効果の一因であるとも考えられる¹⁾と述べている。本シミュレーションにおいては、長谷川らの行った実験より得られた試験体直径による接触長の変化(図.3)を考慮して解析を行った。図.4は解析に用いたひずみ軟化モデルを表している。ここでは、2直線モデルにおける折れ点の応力を引張強度の1/3とするピーターソンモデルを用いた²⁾。なお、破壊エネルギーは0.1kgf/cmと仮定した。解析に用いた諸定数は表.1に示す。

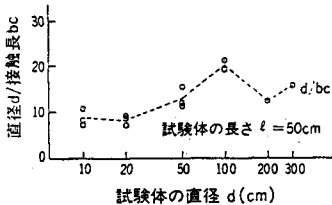


図.3 直径dと直径d/接触長bcの関係

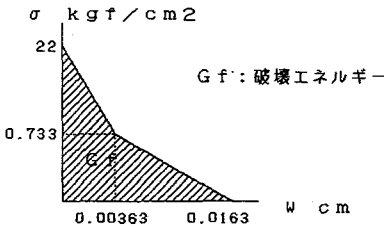


図.4 ひずみ軟化モデル
表.1 材料物性値

ヤング率	3106000 kgf/cm ²
ポアソン比	0.2
引張強度	22 kgf/cm ²
圧縮強度	238.9 kgf/cm ²
破壊エネルギー	0.1 kgf/cm
ひずみ軟化則	ピーターソンモデル
摩擦係数	1.2233
粘着力	42.609 kgf/cm ²

5 解析結果

図.5(a)(b)は直径10cm,300cmの各試験体で最初に引張破壊が起こった時点(1)および降伏時(2)の中心軸に沿った垂直応力の分布とひび割れ状態を併せて示してある。ひび割れ図での数字はひび割れ進展の順を示している。供試体の直径が10cmの場合は引張ひび割れが中心部から進展し、300cmでは端部から進展している。これは、供試体直径が大きくなると破壊時の载荷条件が線荷重に近づく、応力状態が図のように移行することと対応している。

図.6は直径dと割裂引張強度f tspの関係を表している。

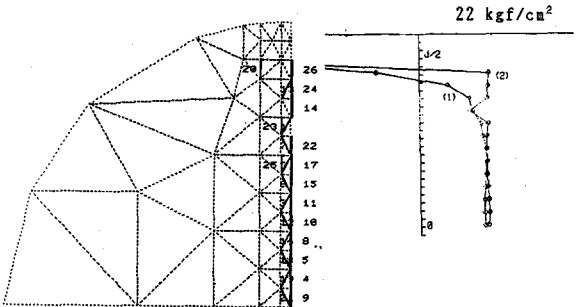


図.5(a) 直径10cm試験体

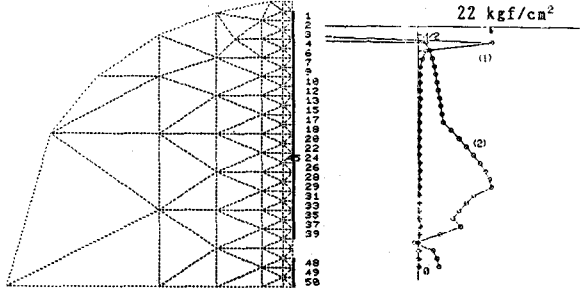


図.5(b) 直径300cm試験体

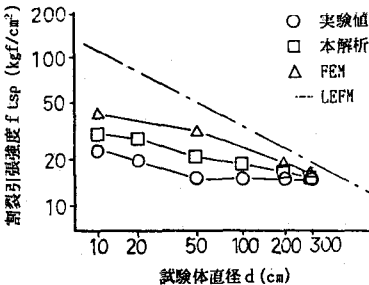


図.6 直径dと割裂引張強度f tspの関係

6 ハイブリッド変位法

不連続体ベースの解析法として、川井により提案された剛体バネモデルがある。このモデルは通常の有限要素法(FEM)と同様に、構造体を有限個の任意形状の微小要素に分割し、その要素自身は剛体であると仮定し、隣接する剛体要素を互いにバネで連結したモデルである。そのため要素間の相対変位が許されることになり、境界边上のすべりの表現が可能となる。このRBSMの利点を生かしつつ、要素の変形をも考慮した解析法の定式化について述べる。

まず、2次元場を考える。通常のFEM同様、要素内変位を x, y の1次関数として、次式のように仮定する。

$$\begin{cases} u = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ v = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases} \quad \dots(8)$$

ただしFEMと違う点は図.7に示すように要素重心に格点を設けていることである。

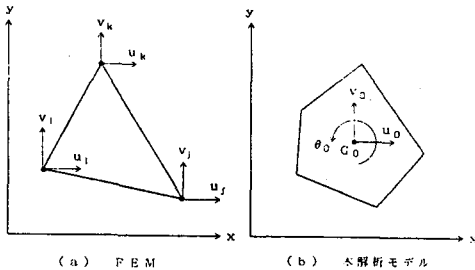


図.7 格点設定場所の比較

ここで、式(8)に含まれる6個の未知定数は要素重心点の変位(u_0, v_0, θ_0)と、要素内のひずみ($\epsilon_x, \epsilon_y, \Gamma_{xy}$)で表わすことが出来、これより要素内変位を次のように表わすことが出来る。

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta_0 \\ \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \Gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \dots(9)$$

ただし、

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(Y-Y_0) & X-X_0 & 0 & Y-Y_0 \\ 0 & 1 & X-X_0 & 0 & Y-Y_0 & X-X_0 \end{bmatrix}$$

これを図.8で示すような2要素間で考えると、式(10)となり一般表示で書くと式(11)のように表現することが出来る。

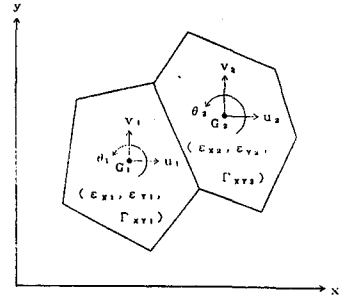


図.8 2要素間の剛体変位

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = [H_d] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + [H_\epsilon] \begin{Bmatrix} \epsilon_{x1} \\ \epsilon_{y1} \\ \Gamma_{xy1} \\ \epsilon_{x2} \\ \epsilon_{y2} \\ \Gamma_{xy2} \end{Bmatrix} \quad \dots(10)$$

$$\{U\} = [H_d] \{u\} + [H_\epsilon] \{\epsilon\} \quad \dots(11)$$

ここで、

$$\{U\}^T = \{U_1 \ V_1 \ U_2 \ V_2\}$$

$$\{u\}^T = \{u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2\}$$

$$\{\epsilon\}^T = \{\epsilon_{x1} \ \epsilon_{y1} \ \Gamma_{xy1} \ \epsilon_{x2} \ \epsilon_{y2} \ \Gamma_{xy2}\}$$

$$[H_d] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(Y-Y_1) & 0 \\ 0 & 1 & X-X_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[H_\epsilon] = \begin{bmatrix} X-X_1 & 0 & Y-Y_1 & 0 \\ 0 & Y-Y_1 & X-X_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ X-X_2 & 0 & Y-Y_2 & 0 \\ 0 & Y-Y_2 & X-X_2 & 0 \end{bmatrix}$$

式(11)で表現される剛体変位を用いてポテンシャルエネルギーを求める。ポテンシャルエネルギー Π は次式で表される。

$$\Pi = V_i + V_b - W \quad \dots(12)$$

ここで、

V_i : 要素内ひずみエネルギー

V_b : 境界边上の分布バネに貯えられるひずみエネルギー

W : 外力のなす仕事

最小ポテンシャルエネルギー原理、すなわち、

$\{u\}$ についての変分

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{u\}} = 0$$

$\{\epsilon\}$ についての変分

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\epsilon\}} = 0$$

より、

最終的には次式で表わされる連立方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} K_{uu} \\ K_{eu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \varepsilon \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ue} \\ K_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_u \\ F_e \end{Bmatrix} \quad \dots(13)$$

ここで $\{F_u\}$, $\{F_e\}$ は、

$$\{F_u\} = \frac{\partial W}{\partial \{u\}}, \quad \{F_e\} = \frac{\partial W}{\partial \{\varepsilon\}}$$

式(13)で与えられる方程式は次のように考えることができる。

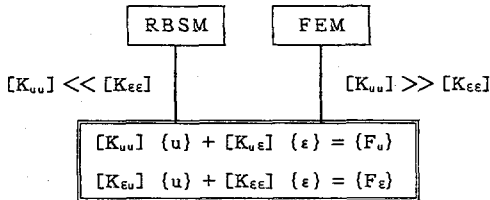


図.9 本解析モデルとFEM及びRBSMとの関係

(a) $K_{uu} \gg K_{ee}$ の場合

これは、要素間の剛性が要素内の剛性より極端に大きい場合を意味しており、物理的には外荷重の作用を受けて要素が変形し、要素間のバネはほとんど変形せず、ただ力だけを伝達する場合を意味する。従って、極限を考えればFEMに帰着する。

(b) $K_{uu} \ll K_{ee}$ の場合

これは、(a)と全く逆の場合で、外荷重を受けても要素はほとんど変形せず、ただ力のみを伝達し、要素間のバネだけが変形する場合を意味する。従って、極限を考えればRBSMに帰着する。

このように、本解析法はFEMとRBSMの特徴を併せもった解析法と言える。式(13)の方程式はFEMやRBSMの基礎方程式に比べてマトリックスの大きさがかなり大きくなってしまいが、その点を除けば現実的で広範囲に適用可能な解析が出来る。

7 反復解法

式(13)の方程式を一度に解かず、RBSMの解を利用した反復解法を行えばマトリックスの大きさはRBSMの基礎方程式と同じですむ。すなわち、式(13)の第1式より第1近似として次式を考える。

$$[K_{uu}] \{u\} = \{F_u\} \quad (\text{RBSM方程式}) \quad \dots(14)$$

これより要素重心の変位の第1近似解 $\{u^{(1)}\}$ が求まり、これを式(13)の第2式に代入して次式より、要素内のひずみの第1近似解 $\{\varepsilon^{(1)}\}$ を求める。

$$[K_{ee}] \{\varepsilon^{(1)}\} = \{F_e\} - [K_{eu}] \{u^{(1)}\} \quad \dots(15)$$

さらに、これを式(13)の第1式に代入し第2近似解を求めると言う反復計算を行い、解が許容誤差範囲内に入れば計算を止めると言う解法である。

8 まとめ

要素変形を考慮すると同時に要素境界での引張破壊、せん断すべりを考慮し得る解析手法としてハイブリッド応力法、およびハイブリッド変位法を示した。ハイブリッド応力法においては、付帯条件として、要素内部の応力の釣り合い条件を満足するように応力関数を仮定する必要がある、多角形要素、3次元解析への適用性が困難と思われること、さらに亀裂進展およびすべり発生面において no-tension 解析法のような応力解法が困難という難点がある。

これに対し、ハイブリッド変位法に関しては多角形要素が可能であり、亀裂進展に際してのプロセスゾーンに関する考察といったミクロな領域に関しての検討が可能である。また、積分形保存則モデルとしての立場から、熱、流体との連成解析が可能であり、3次元ボロノイ分割を用いた3次元解析への発展も容易であり、有限変形、動的解析等、今後幅広い発展性が期待できる。

<参考文献>

- (1) 塩谷俊幸：論文集（コンクリートのひび割れと寸法効果）1988
- (2) コンクリートの破壊力学に関するコロキウム 第1部 委員会報告 1990