

(68) 亀裂内透水特性に関する確立論的評価

大成建設(株) 正会員 岩野政浩

Stochastic Approach to Flow through a Single Joint

Masahiro IWANO Taisei Corporation

Abstract

Fracture conductivity is one of the most important properties of jointed rock, but it is one of the most difficult parameters to measure (Brace 1980). In discrete modeling, the parallel plate model is most frequently used to estimate fracture conductivity. Real fracture surfaces, however, are not smooth parallel surfaces. The surface roughness, asperity contact and infill material may retard the flow and reduce the hydraulic conductivity. The fracture aperture varies nonlinearly with normal and shear stresses. Fracture flow, hence, is sensitive to the displacement of the fracture surfaces induced by pressure changes in fluid and stress changes in the rock blocks. To estimate the hydraulic conductivity more accurately, more realistic fracture aperture modeling is needed. On the other hand, Gelhar(1979,1986) used the stochastic analysis mainly for the flow /transport equation in aquifers. In these analysis, transmissivity in aquifers is assumed to be a stochastic process. In this research, a variable fracture aperture is modeled as a two-dimensional stationary lognormal stochastic process. Equivalent homogeneous aperture is found to predict the same fluid flux as the areal mean flux for the random model. The effective aperture and hydraulic conductivity tensor are also defined. These are dependent on the geometric mean, the variance and the correlation structure of the logaperture process.

1. はじめに

岩盤の透水性は、本来母岩基質部の透水性と亀裂部の透水性に基づいて統一的に評価されなければならない。特に地下深部に存在する硬質塊状岩盤の場合には、基質部の透水性が岩盤内に存在する亀裂部の透水性に比較して低い場合、岩盤の透水性は亀裂内の透水特性、亀裂の空間的分布性状及び連結性状に強く支配される。亀裂の空間的分布性状に対しては、Long(1984), Rouleau(1984), Dershowitz(1984)らが実際の岩盤データに基づく評価手法、幾何学的モデル化手法を提案している。亀裂の水理学的連結性状については、パーコーション理論によるRobinson(1984), 下茂(1987)らの研究がある。一方、亀裂内の透水特性についてはIwai(1976), Pyrak-Nolte(1987)らの実験的研究、Brown(1987)の解析的研究があるが、これらの研究は主に、Snow(1969)が提案した三乗則の成立条件、幾何学的開口幅と水理学的開口幅の関係について議論している。また、Neuzil and Tracy(1981)は流れに直角方向の開口幅の変化を、Tsang and Witherspoon(1981)は流れの方向における開口幅の分布を考慮した有効開口幅の推定方法を提案している。しかしながら、これら一連の研究は、亀裂内の透水特性が平行板モデルによる三乗則に基づいて評価することが可能であるとして

いる。Louis(1969)の室内実験及び菊池ら(1987)の現位置試験結果より、亀裂内の水の運動は、亀裂内開口幅の分布状態、上下面の接触状況、狭在物の有無に大きく依存し、二次元的な複雑な系路を取ることが明らかにされている。亀裂内開口幅の分布状態は、亀裂の成因に由来するため、その状況を認識するのは極めて難しいが、Gentierら(1989)、Pyrak-Nolteら(1987)の貴重な観察・計測結果も報告されているものの、開口幅の分布状況を確率論的に結論づけるまでには至っていない。本研究では、Gelharらが不均質な透水性分布を有する滞水層の透水性評価に用いた確率論的アプローチに基づいて、二次元的な開口幅の分布状況を有する亀裂内の透水性を評価するひとつの試案を示すものである。

2. スペクトル法について

水理学的パラメータの空間分布が地下水挙動に与える影響を考慮した研究としては、Monte Carlo simulation(Warren and Price, 1961; Freeze, 1975), Perturbation analysis(Tsang and Pinder, 1977), Sensitivity analysis(McElroy and Yukler, 1978), Self-consistent analysis(Dagan, 1979; Chirilin and Dagan, 1980), Spectral analysis(Gelhar, 1976; Bakr et al, 1978)といったものが存在する。しかしながら連続的に分布する水理学的パラメータを取り扱う場合には、Gelharらが用いたスペクトル法が最適であると考えられる。スペクトル法は、Buyevich(1969)らが間隙率の三次元的空間分布が定常浸透に与える影響を解析するのに地下水分野で初めて用いられ、Gelharらが透水係数の空間分布を考慮した滞水層の浸透問題に適用して一般的に広められた。詳細についてはNeuman(1982)又は、Gelhar(1984)を参照していただき、本論文ではその概要のみを示すものとする。

水理学的パラメータ(間隙率、透水係数、分散係数など)を空間的に分布する確率過程と考え、これらの確率変数が構造的にある相関を持って空間的に存在すると仮定する。この構造的な相関性は、二次の定常性の仮定をもとで、自己相関関数(Auto-covariance function)により表現され、自己相関関数のフーリエ変換としてスペクトル密度関数が定義される。また、確率過程($f(x)$)が定常な場合には、Fourier-Stieltjes的表現が可能であり(Lumley and Panofsky, 1964)、確率微分方程式に代入することで、確率変数($f(x)$)と応答変数($h(x)$)のフーリエ振幅間の関係を定める。この関係より、応答変数のスペクトル密度関数、自己相関関数、分散値を推定し、確率変数の分散状況が応答変数の分散にどのような影響を及ぼすかを解析的に定めていくものである。また、得られた応答関数の自己相関関数、分散値よりバリオグラムを算定し、応答関数の空間的依存性、相関性を議論することが可能である。図-1に一連の解析フローと、Bakrら(1976)が対数透水係数を一次元的に分布する確率変数と考え、一次元定常浸透解析にスペクトル法を適用した例を示す。

3. 亀裂内浸透における定式化

本研究においては、図-2に示すように、開口幅分布 $b(x, y)$ を二次元確率過程と考え、問題を簡略化するため二次の定常性を仮定する。次に、開口幅の分布はGentierらの観察結果を参考して、対数正規分布に従うものとする。また、本検討においては、開口幅の分布は、亀裂の生成過程に応じて何らかの方向性を有するものと考え、この方向性を開口幅の自己相関関数によって表現し得るものとする。また、亀裂内の全てのポイントで局所的に三乗則が成立するものとする。定常状態での連続式、運動方程式は次式によって与えられる。

$$\nabla Q = \nabla(bu) = 0, \quad u = -b^2 g / 12\nu \cdot \nabla \phi \quad b: \text{開口幅}, u: \text{流速}, g: \text{重力加速度} \quad \text{--- ①}$$

上式より全水頭 ϕ による式を求めると次のようになる。

$$\nabla^2 \phi + 3 \nabla \phi \cdot \nabla (\ln b) = 0 \quad \text{--- ②}$$

式②は、Mizellら(1982)が二次元の非均質な貯留係数分布を有するような滞水層の透水特性の評価に用いた式と類似しており、貯留係数を開口幅で置換した形になっている。図-1のフローに基づいて、対数開口幅と全水頭をその平均値と変動の部分に分離すると次式が得られる。ここで、 B は対数開口幅の平均値で開口幅分布の定常性より一定、また H は全水頭の平均値で流れの方向に線形と仮定する。

$$\ln b = B + \beta(x_1, x_2), \quad \phi = H(x_1) + h(x_1, x_2) \quad \text{--- ③}$$

平均動水勾配 J は次式で与えられる。

$$J = -dH/dx_1 \quad \text{--- ④}$$

式③、④を式②に代入すると、確率微分方程式は、

$$\nabla^2 h - 3J \frac{d\beta}{dx_1} + 3 \nabla h \nabla \beta = 0 \quad \text{--- ⑤}$$

さらにこの平均値を取り、式⑤との差分を取れば、変動微分方程式として次式を得ます。

$$\nabla^2 h - 3J \frac{d\beta}{dx_1} + 3 (\nabla h \nabla \beta - \overline{\nabla h \nabla \beta}) = 0 \quad \text{--- ⑥}$$

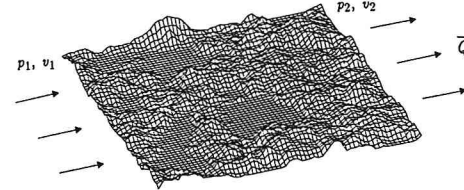
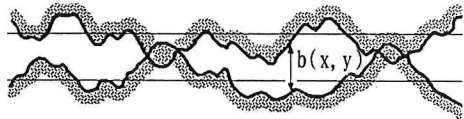
平均値からの変動量 h と β は各々平均値に比べ小さなものと考え、高次項を省略すると、

$$\nabla^2 h - 3J \frac{d\beta}{dx_1} = 0 \quad \text{--- ⑦}$$

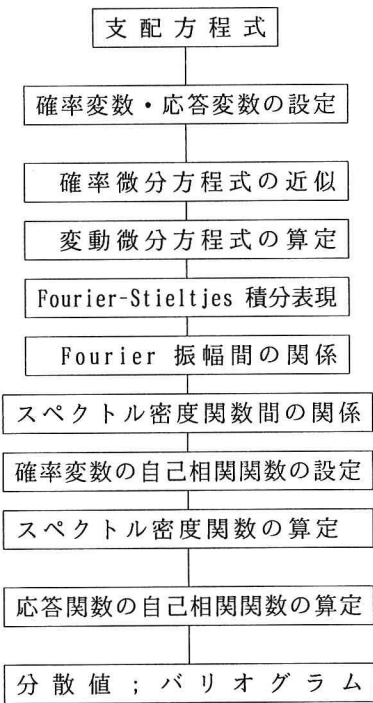
変動量 h と β の定常性の仮定より、Fourier-Stieltjes 積分表現が存在し、各々次のように表現される。

$$h = \int_k e^{ikx} dZ_h(k), \quad \beta = \int_k e^{ikx} dZ_\beta(k) \quad \text{--- ⑧}$$

ここで、 k は 2 次元の波数ベクトルである。



図－2 開口幅の定義と 2 次元分布の例 (after Brown, 1989)



$$\frac{d}{dx} \left[K(x) \frac{d\Phi}{dx} \right] = 0, \quad K: \text{permeability} \quad \Phi: \text{hydraulic head}$$

$$\ln K = F + f, \quad F = E[\ln K] = \ln K_1, \quad E[f] = 0$$

$$\Phi = H + h, \quad H = E[\Phi], \quad E[h] = 0$$

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{df}{dx} \cdot \frac{dH}{dx} = 0, \quad E \left[\frac{d^2 H}{dx^2} \right] = 0$$

$$\frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{df}{dx} \cdot \frac{dH}{dx} = 0, \quad \frac{dH}{dx} = -\frac{q}{K_1} = -J$$

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dZ_f(k), \quad h = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dZ_h(k), \quad k: \text{wave number}$$

$$dZ_h(k) = -i dZ_f(k) \frac{J}{k}, \quad J: \text{mean hydraulic gradient}$$

$$S_{hh}(k) = E[dZ_h(k) \cdot dZ_h^*(k)] = \frac{J^2}{k^2} E[dZ_f(k) \cdot dZ_f^*(k)] = \frac{J^2}{k^2} S_{ff}(k)$$

$$R_{ff}(\xi) = \sigma_f^2 \left(1 - \frac{|\xi|}{1} \right) e^{-\frac{|\xi|}{1}}, \quad \xi: \text{separation distance}$$

$$S_{hh}(k) = \frac{J^2}{k^2} S_{ff}(k) = \frac{J^2}{k^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\xi} R_{ff}(\xi) d\xi = \frac{2k^2 \sigma_f^2 l^3}{\pi(1 + k^2 l^2)^2}$$

$$R_{hh}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\xi} S_{hh}(k) dk = J^2 \sigma_f^2 l^2 \left(1 + \frac{|\xi|}{1} \right) e^{-\frac{|\xi|}{1}}$$

$$\sigma_h^2 = R_{hh}(0) = J^2 \sigma_f^2 l^2, \quad \gamma(\xi) = \sigma_h^2 \cdot R_{hh}(\xi)$$

図－1 スペクトル法の解析フロー及び解析例

式⑧を式⑦に代入することで、フーリエ振幅間の関係式として、

$$dZ_n(k) = -\frac{3ik_1}{k^2} dZ_p(k) \quad (9)$$

さらに、水頭と開口幅のスペクトル密度間の関係式として式⑩を得る。

$$S_{hh}(k) = \frac{9J^2 k_1^2}{k^4} S_{pp}(k) \quad (10)$$

ここで、 $k^2 = k_1^2 + k_2^2$

それ故、開口幅の変動による水頭の分散評価式は次のように表現される。

$$\sigma_h^2 = \int_k S_{hh}(k) dk = \int_k \frac{9J^2 k_1^2}{k^4} S_{pp}(k) dk \quad (11)$$

4. 有効開口幅と透水テンソル

有効開口幅の定義としては、不均質な開口幅の分布を有する亀裂内の流量を、一定の開口幅を有する亀裂内の流量と等価として逆算した平均的な開口幅ということになるが、以下にスペクトル法による有効開口幅と透水テンソルの算定方法を示す。平均動水勾配の方向 (x_1 方向) への平均流量は

$$\bar{Q}_1 = \bar{b}u_1 = -\frac{J}{12\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = -\frac{J}{12\nu} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial (H+h)}{\partial x_1} \right), b_1 = eB \quad (12)$$

さらに、指数項をテイラー展開し、2 次以上の高次項を省略すると次式になる。

$$\bar{Q}_1 = -\frac{J}{12\nu} \left[\left(1 + \frac{\rho}{2} \sigma_p^2 \right) J - \frac{3}{2} \frac{\partial h}{\partial x_1} \right], \sigma_p^2 = \beta^2 \quad (13)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = \beta y_1 = \int_k S_{\beta y_1}(k) dk = \int_k dZ_{\beta y_1} dZ_{\beta y_1}^* dk = \int_k \frac{3Jk^2}{k^2} S_{pp}(k) dk \quad (14)$$

よって最終的に

$$\bar{Q}_1 = -\frac{J}{12\nu} \left[\left(1 + \frac{\rho}{2} \sigma_p^2 \right) \frac{3Jk^2}{k^2} \int_k S_{pp}(k) dk \right] \quad (15)$$

例えば、スペクトル密度関数として、Mizellら(1982)が用いた 4 種類のスペクトルを考える限り、

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = 3J \sigma_p^2 \left[\frac{\rho \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\rho + 1} \right] \quad (16)$$

となり平均流量は、図-3 に示すような一般の場合は、

$$\bar{Q}_1 = -\frac{J}{12\nu} \left\{ 1 + \frac{\rho}{2} \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\rho \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\rho + 1} \right) \right] \right\} J, \rho = \lambda_1 / \lambda_2 \quad (17)$$

ここで α は平均動水勾配と開口幅分布の最大相関方向との角度である。

典型的な場合として、等方的な分布状況 ($\rho = 1$) 及び完全な平行板条件 ($\sigma_p^* = 0$) では、

$$\bar{Q}_1 = -\frac{J}{12\nu} J = K_f J, K_f = -\frac{J}{12\nu} \quad (18)$$

という平均開口幅による流量算定式と同一になる。また、平均動水勾配方向と開口幅分布の最大相関方向が同一 ($\alpha = 0$) で、動水勾配方向は開口幅が一定 ($\rho = \infty$) の場合には (図-4 参照)

$$\bar{Q}_1 = -\frac{J}{12\nu} \left(1 + \frac{\rho}{2} \sigma_p^2 \right) J = -\frac{J}{12\nu} \exp \left(\frac{\rho}{2} \sigma_p^2 \right) J = -\frac{J}{12\nu} b^3 J \quad (19)$$

より、平均動水勾配方向の有効開口幅は次式で与えられる。

$$\hat{b} = \left(b^3 \exp \left(\frac{\rho}{2} \sigma_p^2 \right) \right)^{\frac{1}{3}} = (b^3)^{\frac{1}{3}}; \text{ arithmetic mean} \quad (20)$$

この式は、Neuzil and Tracy(1981)の評価式と同一になる。次に、平均動水勾配方向と最大相関方向が直交 ($\alpha = \pi/2$) し、平均動水勾配と直交する方向には開口幅が一定 ($\rho = \infty$) の場合には、

$$\bar{Q}_1 = -\frac{J}{12\nu} \left(1 - \frac{\rho}{2} \sigma_p^2 \right) J = -\frac{J}{12\nu} \exp \left(-\frac{\rho}{2} \sigma_p^2 \right) J = -\frac{J}{12\nu} b^{-3} J \quad (21)$$

となり、平均動水勾配方向の有効開口幅は次式で与えられ、Tsang and Witherspoon(1981) の評価式になる。

$$\hat{b} = \left(b^3 \exp \left(-\frac{\rho}{2} \sigma_p^2 \right) \right)^{\frac{1}{3}} = \left(b^{-3} \right)^{\frac{1}{3}}; \text{ harmonic mean} \quad (22)$$

一般的には平均流量は、有効開口幅テンソル (b_{ij}^3)、透水テンソル (K_{ij}) を用い次のように表現できる。

$$\bar{Q}_i = -\frac{J}{12\nu} \left[\left(1 + \frac{\rho}{2} \sigma_p^2 \right) \delta_{ij} - \rho B_{ij} \right] J = -\frac{J}{12\nu} b_{ij}^3 J = K_{ij} J \quad (23)$$

$$B_{ij} = \int_k \frac{k_i k_j}{k^2} S_{pp}(k_1, k_2) dk_1 dk_2 \quad (24)$$

図-5 に示すような、Mizellら(1982)が用いた 4 種類の自己相関関数のうち、指数形を用いるとすれば、自己相関関数及びスペクトル密度関数は各々次式のように表される。

$$R_{pp}(\tau) = \sigma_p^2 \exp[-\tau/\lambda], \lambda = (\tau_1^2 \lambda_1^2 + \tau_2^2 \lambda_2^2)^{1/2} \quad (25)$$

$$S_{pp}(k) = \frac{\sigma_p^2 \lambda_1 \lambda_2}{2\pi(1 + \lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2)^{3/2}} \quad (26)$$

式②④、②⑤より、

$$B_{11} = \frac{\rho}{\rho+1} \left(\frac{\rho \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\rho+1} \right), B_{22} = \frac{\rho}{\rho+1} \left(\frac{\rho \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\rho+1} \right), B_{12} = B_{21} = -\frac{\rho}{\rho+1} \left(\frac{\rho-1}{\rho+1} \right) \sin \alpha \cos \alpha$$

式②③より、透水テンソルは次式のように算定できる。

$$K_{11} = \frac{8}{12\nu} b_f^3 \left\{ 1 + \sigma_p^2 \left[\frac{2}{\rho+1} \left(\frac{\rho \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\rho+1} \right) \right] \right\}, K_{22} = \frac{8}{12\nu} b_f^3 \left\{ 1 + \sigma_p^2 \left[\frac{2}{\rho+1} \left(\frac{\rho \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\rho+1} \right) \right] \right\}$$

$$K_{12} = K_{21} = -\frac{8}{12\nu} b_f^3 \sigma_p^2 \left(\frac{\rho-1}{\rho+1} \right) \sin \alpha \cos \alpha$$

また透水テンソルの主値は、 $\alpha = 0$ の場合、

$$K_{\max} = \frac{8}{12\nu} b_f^3 \left\{ 1 + \frac{2}{\rho+1} \left(\frac{\rho-1}{\rho+1} \right) \right\} = \frac{8}{12\nu} b_f^3 \exp \left[\frac{2}{\rho+1} \left(\frac{\rho-1}{\rho+1} \right) \right]$$

$$K_{\min} = \frac{8}{12\nu} b_f^3 \left\{ 1 - \frac{2}{\rho+1} \left(\frac{\rho-1}{\rho+1} \right) \right\} = \frac{8}{12\nu} b_f^3 \exp \left[-\frac{2}{\rho+1} \left(\frac{\rho-1}{\rho+1} \right) \right]$$

となり、主値の比は次式で表現できる。

$$R = \exp \left[\frac{2}{\rho+1} \left(\frac{\rho-1}{\rho+1} \right) \right]$$

つまり、その異方性の度合は、開口幅分布の相関構造上の異方性の度合い (ρ) と対数開口幅の分散 (σ_p^2) によって評価可能となる。また、この場合、主軸の方向は、平均動水勾配の方向と一致する。 $\rho=1, 2, \infty$ の場合について方向別透水係数 [K^p] を算定し、 $1/\sqrt{K^p}$ を等方構造の場合 ($\rho=1$) の結果で正規化した場合を示す。この図より開口幅相関構造の異方性の度合いが大きくなるにつれて、透水係数の異方性も強まる様子がわかる。主透水係数の方向で、等方の場合 ($\rho=1$) に比べて、 $\rho=2$ の場合で1.16倍、 $\rho=\infty$ の場合で1.57倍の透水性の増大が見られる。また異方性の度合も、1.35 ($\rho=2$)、2.46 ($\rho=\infty$) と大きくなってくる。

5. まとめ

亀裂内の開口幅分布を二次元の確率過程と仮定し、定常状態での亀裂内の透水特性を確率論的に推定する手法を示した。本手法を用いることにより、開口幅の不均質分布特性、構造的な異方性を考慮して、単独亀裂内の有効開口幅及び透水テンソルを近似的に算定した。しかし、今回は、亀裂内での局所的な三乗則の成立、確率変数、応答変数の定常性等を仮定しており、今後の議論も必要である。さらに、亀裂内の浸透問題だけでなく物質移行特性の評価、不均質に分布する水理パラメーターを有する岩盤の等価な透水係数の評価等にスペクトル法を今後適用していく予定である。

[参考文献]

- 1) Brace, I.J.R.M. & M.S., Vol.17(1980)
- 2) Gelhar, W.R.R., Vol.15(6), 1979
- 3) Gelhar, W.R.R., Vol.22(9), 1986
- 4) Long, Ph.D.Th., 1983
- 5) Rouleau, Ph.D.Th., 1984
- 6) Dershowitz, Ph.D.Th., 1984
- 7) Robinson, Ph.D.Th., 1984
- 8) Iwai, Ph.D.Th., 1976
- 9) Snow, W.R.R., Vol.5(6), 1969
- 10) Pyrak-Nolte, 6th I.S.R.M., 1987
- 11) Brown, J.G.R., Vol.92(132), 1987
- 12) Neuzil & Tracy, W.R.R., Vol.17(1), 1981
- 13) Tsang & Witherspoon, J.G.R., Vol.86(B10), 1981
- 14) Gentier et al., R.M. & R.E., Vol.22(3), 1989
- 15) Warren & Price, S.P.E.J., Vol.1, 1961
- 16) Freeze, W.R.R., Vol.11(5), 1975
- 17) McElae & Yukler, W.R.R., Vol.14(3), 1978
- 18) Dagan, W.R.R., Vol.18(4), 1979
- 19) Chirlin & Dagan, W.R.R., Vol.16(6), 1980
- 20) Bakr et al., W.R.R., Vol.14(2), 1978
- 21) Mizell et al., W.R.R., Vol.18(4), 1982
- 22) Tsang & Pinder, Adv. W.R., Vol.1(1), 1977
- 23) Buyevich & Leonov, J.F.M., Vol.37, 1969
- 24) Brown, J.G.R., Vol.94(B7), 1989
- 25) Neuman, Recent Trend in Hydrogeology, U.S.G.S.Rep., 1982
- 26) Gelhar, Fundamental of Transport Phenomena in Porous Media, 1982
- 27) Lumley & Panofsky, The Structure of Atmosphere Turbulence, 1964
- 28) Louis, R.M.Rep.No.10, Imperial College of London, 1969

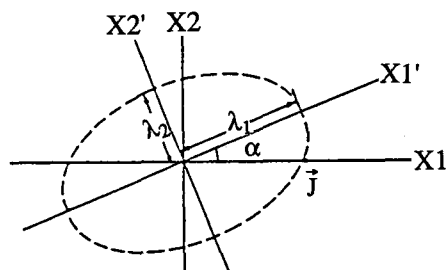


図-3 平均動水勾配と開口幅分布の相関

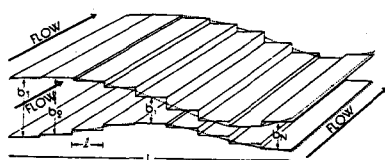


図-4 Neuzil and Tracy Model

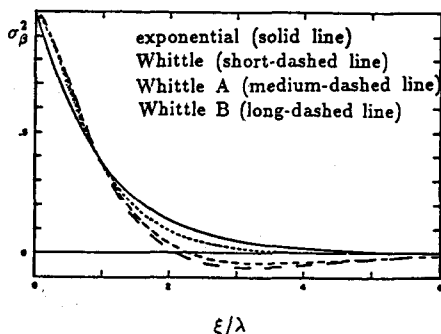


図-5 Autocovariance Function

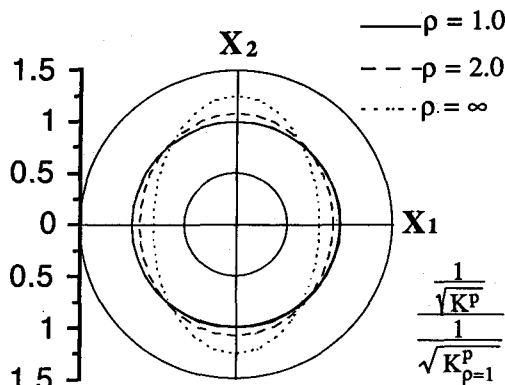


図-6 方向別透水係数の推定結果