

(63) 円形トンネルの壁面に作用する 三次元分布の荷重による応力・変形解析

山梨大学工学部 正 員 平 嶋 健 一
山梨大学工学部 正 員 川上哲太郎
山梨大学工学部 学生員 ○柴 田 善 央

Analysis of Stresses and Deformation Due to 3D Loading Conditions
Applied to the Walls of a Circular Tunnel.

Ken-ichi HIRASHIMA, Yamanashi University
Tetsutaro KAWAKAMI, Yamanashi University
Yoshihisa SHIBATA, Student, Yamanashi Univ.

Abstract

An analytical solution presents for the stresses and deformations due to three-dimensional loading applied to the walls of a circular tunnel or borehole in a homogeneous isotropic elastic medium. By using of the tunnel and a Fourier series in the polar angle, the governing partial differential equations reduces to a set of ordinary differential equations in the Fourier coefficients of the field quantities. Numerical results will be shown at the day of this Symposium.

1. まえがき

トンネル内の平板載荷試験や孔内試験では、トンネル孔軸方向に有限な距離の範囲に働く荷重ないし変位状態となるのに対し、その測定値の理論的整理は通常、奥行き方向には一定とした2次元的な処理を行って対象岩盤の変形係数などを求めている。本論文では、厳密な3次元状態であるとした理論解析を行ない、2次元解析による取り扱いの精度、適用範囲等についての知見を得ることを目的とする。すなわち、ここでの解析目標は円形断面のトンネル孔壁に矩形状の3次元荷重が作用する場合の孔周辺部の3次元的な応力、変形分布を求めることにある。なお、この種の3次元解析を試みているものとして Booker & Carter (1984)¹⁾やByalic (1970)²⁾らを挙げることができる。

2. 問題の設定

等方等質の無限に拡がった弾性媒体内に半径 a の十分長い円形トンネル（または円形ボアホール）が開削されたものとする。その弾性定数をヤング係数 E 、ポアソン比 ν およびせん断弾性係数 $G (=E/2((1+\nu)))$ とする。トンネル壁面に作用する荷重としては Fig. 1 に示すように半径方向の部分等分布荷重が矩形状に、かつ直径方向の片側または両側に作用する場合を考える。座標系としては円柱座標系 (r, θ, z) を用いる。

3. 解析理論

座標系 (r, θ, z) に沿う変位成分を u_r, u_θ, w とすれば、これらの変位で表示した釣合方程式 (Navier の式) は物体力を無視して次のように与えられる³⁾。

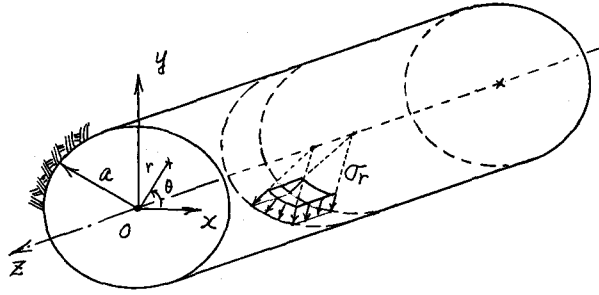


Fig.1 座標系と荷重状態

$$\left. \begin{aligned} G \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial r} &= 0, \\ G \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + (\lambda + G) \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} &= 0, \\ \nabla^2 e &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 e は体積ひずみ、 ∇^2 はラプラス演算子であって、それぞれ次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} e = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(1)の支配方程式を解くために、変位、応力に関するFourier変換、Fourier級数を以下のように定義する¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} (u_r, u_\theta, w, e) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha z} (U, V, -iW, F) d\alpha, \\ (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha z} (S_r, S_\theta, S_z) d\alpha, \\ (\tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha z} (T_{r\theta}, -iT_{rz}, T_{\theta z}) d\alpha, \\ (U, W, F, S_r, S_\theta, S_z, T_{rz}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (U^{(n)}, W^{(n)}, F^{(n)}, S_r^{(n)}, S_\theta^{(n)}, S_z^{(n)}, T_{rz}^{(n)}) \cos n\theta, \\ (V, T_{r\theta}, T_{\theta z}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (V^{(n)}, T_{r\theta}^{(n)}, T_{\theta z}^{(n)}) \sin n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} (U, W, F, S_r, S_\theta, S_z, T_{rz}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (U^{(n)}, W^{(n)}, F^{(n)}, S_r^{(n)}, S_\theta^{(n)}, S_z^{(n)}, T_{rz}^{(n)}) \cos n\theta, \\ (V, T_{r\theta}, T_{\theta z}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (V^{(n)}, T_{r\theta}^{(n)}, T_{\theta z}^{(n)}) \sin n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(3)、(4)を式(1)、(2)に代入し整理すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} G \left\{ \frac{d^2 U^{(n)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU^{(n)}}{dr} - \left(\alpha^2 + \frac{n^2 + 1}{r^2} \right) U^{(n)} - \frac{2n}{r^2} V^{(n)} \right\} + (\lambda + G) \frac{dF^{(n)}}{dr} &= 0, \\ G \left\{ \frac{d^2 V^{(n)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV^{(n)}}{dr} - \left(\alpha^2 + \frac{n^2 + 1}{r^2} \right) V^{(n)} - \frac{2n}{r^2} U^{(n)} \right\} - (\lambda + G) \frac{n}{r} F^{(n)} &= 0, \\ \frac{dF^{(n)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF^{(n)}}{dr} - \left(\alpha^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) F^{(n)} = 0, \quad F^{(n)} = \frac{dU^{(n)}}{dr} + \frac{U^{(n)}}{r} + \frac{n}{r} V^{(n)} + \alpha W^{(n)}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式(5)は変形Bessel型の微分方程式であるから、簡単に解は求められて次のようになる。

$$F^{(n)} = A_1^{(n)} K_n(\alpha r) + A_2 I_n(\alpha r) . \quad (6)$$

上式によって、 $F^{(n)}$ が求められれば式(5)_{1, 2}は $F^{(n)}$ を非同次項としてもつ、 $U^{(n)}$ 、 $V^{(n)}$ に関する連立微分方程式となる。そこで今、 $U^{(n)}$ 、 $V^{(n)}$ 、 $W^{(n)}$ を次のように特解と同次解の和、すなわち、

$$U^{(n)} = U_p^{(n)} + U_c^{(n)} , \quad V^{(n)} = V_p^{(n)} + V_c^{(n)} , \quad W^{(n)} = W_p^{(n)} + W_c^{(n)} . \quad (7)$$

として求めるものとすれば、これらは最終的に次のように得られる。

$$U_p^{(n)} = -\frac{\lambda + G}{2G} r F^{(n)} , \quad V_p^{(n)} = 0 , \quad W_p^{(n)} = \frac{1}{\alpha} \left\{ F^{(n)} + \frac{\lambda + G}{2G} \left(r \frac{dF^{(n)}}{dr} + 2F^{(n)} \right) \right\} . \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi^{(n)} &= (U_c^{(n)} + V_c^{(n)}) / 2 = B_1^{(n)} K_{n+1}(\alpha r) + B_2^{(n)} I_{n+1}(\alpha r) , \\ \eta^{(n)} &= (U_c^{(n)} - V_c^{(n)}) / 2 = C_1^{(n)} K_{n-1}(\alpha r) + C_2^{(n)} I_{n-1}(\alpha r) . \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで、第2節の問題設定により領域が無限に広がっているものとすれば、 $r \rightarrow \infty$ での $F^{(n)}$ 、 $\xi^{(n)}$ 、 $\eta^{(n)}$ の有限性により、係数 $A_2^{(n)}$ 、 $B_2^{(n)}$ 、 $C_2^{(n)}$ は共に零でなければならない。

このことから、変位係数 $U^{(n)}$ 、 $V^{(n)}$ 、 $W^{(n)}$ は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} U^{(n)} &= -\frac{\lambda + G}{2G} r A_1^{(n)} K_n(\alpha r) + B_1^{(n)} K_{n+1}(\alpha r) + C_1^{(n)} K_{n-1}(\alpha r) , \\ V^{(n)} &= B_1^{(n)} K_{n+1}(\alpha r) - C_1^{(n)} K_{n-1}(\alpha r) , \\ \alpha W^{(n)} &= \frac{\lambda + G}{2G} A_1^{(n)} \left\{ \alpha r K_n(\alpha r) + 2K_n(\alpha r) \right\} + B_1^{(n)} \alpha K_n(\alpha r) + C_1^{(n)} \alpha K_n(\alpha r) . \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

この式を次のようにMatrix表示する。

$$U_n = D_n A_n . \quad (10')$$

同様に、応力係数 $S_r^{(n)}$ 、 $S_\theta^{(n)}$ 、 $S_z^{(n)}$ 、 $\dots$ 、 $T_{\theta z}^{(n)}$ について計算を実行すると、これらの係数も未知定数 $A_1^{(n)}$ 、 $B_1^{(n)}$ 、 $C_1^{(n)}$ を用いて表示することができる。それらの結果をMatrix表示すると付録の式(a)、(b)、(a)'、(b)'のように表わされる。式(10)'と式(a)'を組み合わせ、未知定数ベクトル A_n を消去すると次のようになる。

$$U_n = D_n A_n = D_n S_n^{-1} H_n \equiv \Phi_n H_n , \quad \therefore H_n = \Phi_n^{-1} U_n . \quad (11)$$

ここに、

$$U_n = \{U^{(n)}, V^{(n)}, W^{(n)}\}^T , \quad H_n = \{S_r^{(n)}, T_{r\theta}^{(n)}, T_{rz}^{(n)}\}^T . \quad (12)$$

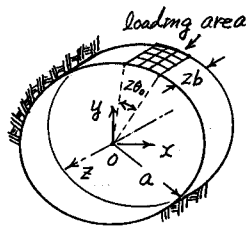
これから、トンネル壁面の作用荷重に関する応力係数 $S_r^{(n)}$ 、 $T_{r\theta}^{(n)}$ 、 $T_{rz}^{(n)}$ が与えられれば、式(11)により変位係数ベクトル U_n が、また、式(10)'から A_n が求まる。これと式(3)、(4)、(10)および付録の式(a)、(b)によって実空間での応力、変位の全てが計算できることになる。

したがって、あとは応力係数 $S_r^{(n)}$ 、 $T_{r\theta}^{(n)}$ 、 $T_{rz}^{(n)}$ の値を設定する必要がある。以下では2つの場合に区分してこれらを与えることとする。

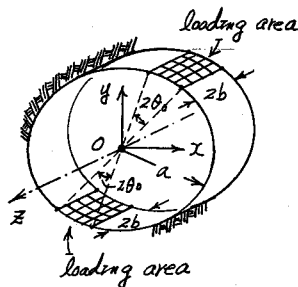
[a] 半径方向の部分分布荷重 σ_r がFig. 2(a)のように与えられる場合

このとき、 $r = a$ のトンネル壁面にはせん断応力成分 $\tau_{r\theta}$ 、 τ_{rz} が作用しないことから $T_{r\theta}^{(n)}$ 、 $T_{rz}^{(n)} = 0$ が成立する。 $S_r^{(n)}$ は次のように、 z 方向にFourier変換、 θ 方向にFourier級数展開を実施することにより最終的に次のように求められる。

$$S_r^{(n)} = \delta_{n0} \frac{\theta_0}{\pi^2} \frac{\sin \alpha b}{\alpha} + (1 - \delta_{n0}) \frac{2}{\pi^2} \frac{\sin \alpha b}{\alpha} \frac{\sin n\theta_0}{n} , \quad T_{r\theta}^{(n)} = T_{rz}^{(n)} = 0 . \quad (13)$$



(a) 片側載荷状態



(b) 両側載荷状態

Fig.2 荷重載荷領域と座標系

この式を式(10)に代入し、さらにその結果を式(3)に用いれば、変位を求める公式が次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha z} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{11}^{(n)} \cdot S_r^{(n)} \cos n\theta d\alpha, \quad u_\theta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha z} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{21}^{(n)} \cdot S_r^{(n)} \sin n\theta d\alpha, \\ w &= -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha z} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{31}^{(n)} \cdot S_r^{(n)} \cos n\theta d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

上式中の $\Phi_{ij}^{(n)}$ は、式(10)のMatrix Φ_n の*i*行、*j*列の要素である。

[b] 半径方向の部分分布荷重 σ_r がFig.2(b)のように与えられる場合

このとき、 $S_r^{(n)}$ 、 $T_{r\theta}^{(n)}$ 、 $T_{rz}^{(n)}$ は次のようになる。

$$S_r^{(n)} = \delta_{n0} \frac{\theta_0}{\pi^2} \frac{\sin \alpha b}{\alpha} + (1 - \delta_{n0}) \frac{2 \sin \alpha b \sin n\theta_0}{\pi^2 \alpha n} (1 + \cos n\pi), \quad T_{r\theta}^{(n)} = T_{rz}^{(n)} = 0, \quad (15)$$

以下は [a] の場合と同様にして変位、その他を求めることができる。

4. むすび

数値計算およびそれらと2次元的取り扱いとの比較、考察については講演会当日に発表する予定である。

- 付録 -

応力係数 $S_r^{(n)}$ 、 $T_{rz}^{(n)}$ 、 $S_\theta^{(n)}$ 、 $S_z^{(n)}$ および $T_{r\theta}^{(n)}$ を未知係数 A_1 、 B_1 、 C_1 を用いて表示すると次のようになる。

$S_r^{(n)}$	$-(\lambda + G) \alpha r K_n'(\alpha r)$ $-G K_n(\alpha r)$	$2G \alpha K_{n+1}'(\alpha r)$	$2G K_{n-1}'(\alpha r)$	A_1
$T_{r\theta}^{(n)}$	$\frac{\lambda + G}{2} n K_n(\alpha r)$	$-G \left\{ \frac{n+1}{r} K_{n+1}(\alpha r) - \alpha K_{n+1}'(\alpha r) \right\}$	$-G \left\{ \frac{n+1}{r} K_{n+1}(\alpha r) - \alpha K_{n+1}'(\alpha r) \right\}$	$B_1^{(n)}$
$T_{rz}^{(n)}$	S_{31}	$G \left\{ \alpha K_n'(\alpha r) - \alpha K_{n+1}'(\alpha r) \right\}$	$G \left\{ \alpha K_n'(\alpha r) - \alpha K_{n-1}'(\alpha r) \right\}$	$C_1^{(n)}$

(a)

$$\begin{pmatrix} S_{\theta}^{(n)} \\ S_z^{(n)} \\ T_{\theta z}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G K_n(\alpha r) & \frac{2G}{r}(n+1)K_{n+1}(\alpha r) & \frac{2G}{r}(n-1)K_{n-1}(\alpha r) \\ (\lambda+2G)K_n(\alpha r) & 2G\alpha K_n(\alpha r) & 2G\alpha K_n(\alpha r) \\ \frac{Gn}{\alpha r} \frac{\lambda+G}{2G} \alpha r K_n'(\alpha r) & G\alpha K_{n+1}(\alpha r) & G\alpha K_{n+1}(\alpha r) \\ + 3K_n(\alpha r) & + \frac{n}{r} K_n(\alpha r) & + \frac{n}{r} K_n(\alpha r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{(n)} \\ B_1^{(n)} \\ C_1^{(n)} \end{pmatrix} \quad (b)$$

ここで

$$S_{31} = \frac{\lambda+G}{2} \left\{ 3K_n'(\alpha r) + K_n''(\alpha r) + \alpha r K_n(\alpha r) \right\} + G K_n'(\alpha r).$$

上式をMatrix表示して次のように書き表わす。

$$H_n = S_n A_n, \quad K_n = I_n A_n \quad (a)', (b)'$$

参考文献：

- 1) Booker, JR, & Carter, JP, Int. J. Num. Anal. Methods in Geomech, Vol. 8, pp445-455, 1984.
- 2) Byalic, DY, Proc. 2nd Congr. ISRM, pp641-642, 1970.
- 3) Timoshenko, SP & Goodier, JN, "Theory of Elasticity", 2nd edn., McGraw-Hill, 1951.